

УДК 531.38

© 2001 г. А.М. ПИЛЬКЕВИЧ В.А. СТОРОЖЕНКО, М.Е. ТЕМЧЕНКО

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ
 ТВЕРДОГО ТЕЛА,
 ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НА "КОРОТКОЙ" СТРУНЕ**

Исследуется устойчивость одной из форм стационарного движения подвешенного на струне осесимметричного твердого тела. Рассматриваемая форма движения имеет место, когда линейные параметры тела и длина струны соизмеримы между собой и удовлетворяют условию Бугаенко-Велигоцкого [1]. Задача устойчивости в данном случае сводится к рассмотрению системы с четным количеством отрицательных показателей Пуанкаре (случай гироскопической стабилизации). К исследованию привлекаются графо-аналитические методы, позволившие получить зоны устойчивости в пространстве характерных параметров.

1. Пусть осесимметричное твердое тело, обладающее массой m , подвешено на абсолютно гибкой, нерастяжимой и безынерционной струне длины l и вращается с постоянной угловой скоростью ω (см. фиг. 1). Обозначим через O_1 и G соответственно точку подвеса струны к оси ротора вертикально установленного мотора и центр масс тела.

Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с центром в точке O_1 и осью ζ , направленной по вертикали вверх (фиг. 1). В центре масс тела – точке G поместим начало поступательно перемещающейся системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$, оси которой параллельны соответствующим осям ξ, η, ζ во все время движения тела. Положение тела в пространстве определим тремя углами Эйлера ψ, θ, ϕ (фиг. 2). Аналогично положение струны в пространстве определим углами ψ_1, θ_1 так, как это показано на фиг. 1. Выбирая только что перечисленные углы $\psi, \theta, \phi, \psi_1, \theta_1$ в качестве обобщенных координат исследуемой системы и составляя уравнения движения ее в форме уравнений Лагранжа II рода, получим (см. [2, 3]):

$$\begin{aligned}
 & (A^* - C)(\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) + C_{\phi} + \\
 & + mal \sin \theta (\ddot{\psi}_1 \sin \theta_1 + 2 \cos \theta_1 \dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1) \cos (\psi_1 - \psi) + \\
 & + mal \sin \theta [\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) \sin \theta_1] \sin (\psi_1 - \psi) = 0 \\
 & A^*(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) + C\dot{\psi} \sin \theta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) + mal \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) + \\
 & + mal \cos \theta [\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)] \cos (\psi - \psi_1) - \\
 & - mal \cos \theta (\ddot{\psi} \sin \theta_1 + 2 \cos \theta_1 \dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1) \sin (\psi - \psi_1) + mga \sin \theta = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ml^2\ddot{\theta}_1 + mal \sin \theta_1 (\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}) - ml^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\psi}_1^2 + \\
& + mal \cos \theta_1 \cos (\psi_1 - \psi) [\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)] + \\
& + mal \cos \theta_1 (2 \cos \theta \dot{\psi} \dot{\theta} + \sin \theta \ddot{\psi}) \sin (\psi_1 - \psi) + mgl \sin \theta_1 = 0 \\
& ml^2 (\ddot{\psi} \sin^2 \theta_1 + 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1) + mal \sin \theta_1 (2 \cos \theta \dot{\psi} + \\
& + \sin \theta \ddot{\psi}) \cos (\psi_1 - \psi) + mal \sin \theta_1 [(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) \sin \theta - \cos \theta \ddot{\theta}] \sin (\psi_1 - \psi) = 0 \\
& C \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где a – расстояние от точки подвеса тела к струне до центра масс тела (фиг. 1); A , C – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции тела, и кроме того введено обозначение

$$A^* = A + ma^2 \tag{1.2}$$

Заметим, что обобщенная координата ϕ входит в полученную систему уравнений только в виде производной по времени, т.е. эта координата является циклической. Кроме того, обобщенные координаты ψ_1 и ψ входят в состав этих же уравнений только в виде их разности. Отсюда следует, что наряду с координатой ϕ исследуемая механическая система обладает еще одной циклической координатой. В работе [2] в качестве такой координаты была выбрана полусумма этих углов $(\psi_1 + \psi)/2$.

Выясним, при каких условиях возможно движение системы, при котором тело со струной совершают вращение вокруг неподвижной вертикали ζ как единое твердое целое. При таком стационарном движении совокупность уравнений (1.1) должна допускать следующее частное решение:

$$\begin{aligned}
\theta_1 = \theta_1^0 = \text{const}; \quad \theta = \theta^0 = \text{const}; \quad \psi_1 - \psi = \text{const} \\
\phi = \phi^0 = \text{const}; \quad \dot{\psi}_1 = \dot{\psi} = \omega = \text{const}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Согласно определению классических углов Эйлера [4], для углов нутации θ^0 и θ_1^0 принят интервал изменения $0 \leq \theta^0, \theta_1^0 \leq \pi$. В данном случае исключим из рассмотрения стационарные движения, соответствующие значениям угла θ_1^0 в области $\pi/2 < \theta_1^0 \leq \pi$ (когда точка крепления тела к струне O_2 расположена выше неподвижной точки O_1 ; см. фиг. 1), и угла θ^0 в аналогичных пределах $\pi/2 < \theta^0 \leq \pi$ (центр масс тела G находится выше точки крепления тела к струне O_2). Поэтому в рассматриваемом случае углы θ^0 и θ_1^0 будут находиться в интервалах

$$0 \leq \theta^0, \theta_1^0 \leq \pi/2 \tag{1.4}$$

Что же касается углов ψ_1^0, ψ^0, ϕ^0 , оставим для них обычно применяемый интервал возможных значений $[0, 2\pi]$.

Стационарное движение тела, соответствующее частному решению (1.3), в силу уравнений (1.1) будет осуществляться, если только между углами θ_1^0 и θ^0 будут справедливы следующие соотношения:

$$\omega^2 \cos \theta_1^0 (l \sin \theta_1^0 + a \sin \theta^0) = g \sin \theta_1^0 \tag{1.5}$$

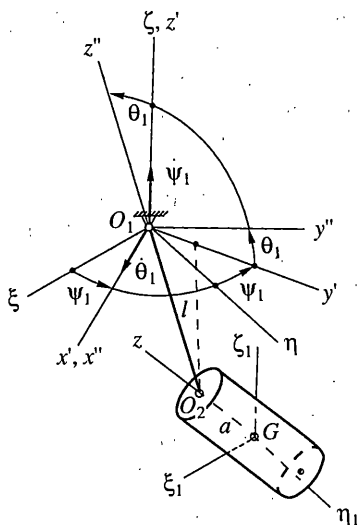
$$\omega^2 \cos \theta^0 [(A - C) \sin \theta^0 + ma(a \sin \theta^0 + l \sin \theta_1^0)] = mga \sin \theta^0$$

$$\text{если } \psi_1^0 - \psi^0 = 0$$

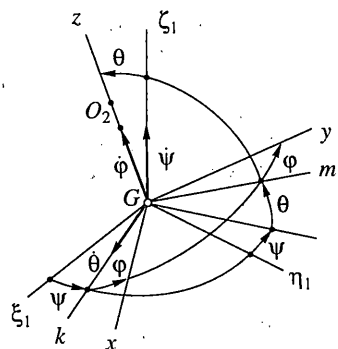
$$\omega^2 \cos \theta_1^0 (l \sin \theta_1^0 - a \sin \theta^0) = g \sin \theta_1^0 \tag{1.6}$$

$$\omega^2 \cos \theta^0 [(A - C) \sin \theta^0 + ma(a \sin \theta^0 - l \sin \theta_1^0)] = mga \sin \theta^0$$

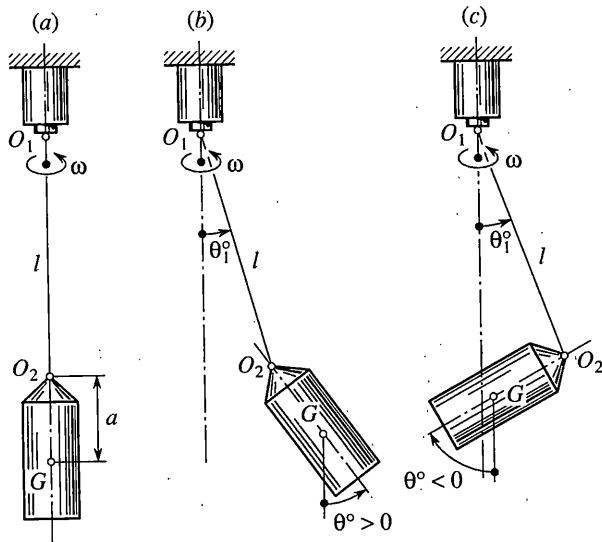
$$\text{если } \psi_1^0 - \psi^0 = \pi$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Стационарное движение, определяемое равенствами (1.5), представляет собой так называемую маятнкообразную форму движения тела, при которой струна и ось динамической симметрии тела отклонены по одну сторону от вертикали (фиг. 3, б). Эта форма движения и ее устойчивость были полностью изучены в работах [5, 2], и на их рассмотрении останавливаться не будем.

Равенства (1.6) описывают другую форму стационарного движения, называемую "болтанкой", при которой струна и ось симметрии тела отклонены по разные стороны от вертикали (фиг. 3, в). Исследование устойчивости этой формы движения встретило серьезные затруднения, и в полной мере эта задача не решена до сих пор. В [6] было показано, что данная форма движения обладает четным количеством степеней

неустойчивости [7], вследствие чего здесь может иметь место гироскопическая стабилизация движения. В [2, 8] изучалась устойчивость этой формы движения при достаточно большой длине струны по сравнению с линейными размерами самого тела. Оказалось, что гироскопическая стабилизация в данном случае не всегда имеет место, существует небольшой диапазон угловой скорости, в котором движение является неустойчивым.

В [1] исследовано влияние длины струны на характер форм стационарного движения. Было показано, что эти формы стационарного движения могут претерпевать существенные изменения при малой длине струны, соизмеримой с линейными размерами тела (случай так называемой "короткой" струны). В частности, была обнаружена одна интересная форма движения, которая, как оказалось, имеет место, когда параметры системы удовлетворяют следующему равенству:

$$A-C = 2ma(l-a) \quad (2.1)$$

Остановимся подробнее на рассмотрении этой формы движения. Обратимся к уравнениям равновесия (1.6), которые при учете соотношения (2.1) могут быть приведены к виду

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1^0}{l \sin \theta_1^0 - a \sin \theta^0} = \frac{\operatorname{tg} \theta^0}{(2l-a) \sin \theta^0 - l \sin \theta_1^0} \quad (2.2)$$

Путем несложных преобразований второе из равенств (2.2) может быть представлено следующим образом:

$$\sin \frac{\theta^0 - \theta_1^0}{2} \left(l \sin \theta_1^0 \cos \frac{3\theta^0 + \theta_1^0}{2} + a \sin \theta^0 \cos \frac{\theta^0 - \theta_1^0}{2} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Последнее соотношение удовлетворяется в случае, когда обобщенные координаты θ^0 и θ_1^0 связаны условием

$$\theta^0 = \theta_1^0 \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) определяет своеобразную форму стационарного движения, в которой угол отклонения струны от вертикали равен углу отклонения от вертикали самого тела, однако направления этих отклонений противоположны.

3. Исследуем устойчивость формы стационарного движения твердого тела типа "болтанки", удовлетворяющего условиям относительного равновесия (1.6). С этой целью обобщенным координатам θ , θ_1 , ψ , ψ_1 , ϕ и их производным по времени дадим некоторые приращения по сравнению с их стационарными значениями, определяемыми из формул (1.3). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \theta &= \theta^0 + \mu, & \theta_1 &= \theta_1^0 + \mu_1, & \psi &= \psi^0 + \nu, & \psi_1 &= \psi_1^0 + \nu_1, & \phi &= \phi^0 + \phi \\ \dot{\theta} &= \dot{\mu}, & \dot{\theta}_1 &= \dot{\mu}_1, & \dot{\psi} &= \omega + \dot{\nu}, & \dot{\psi}_1 &= \omega + \dot{\nu}_1, & \dot{\phi} &= \dot{\phi} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставим только что полученные равенства в совокупность уравнений (1.1) и ограничимся членами первого порядка малости относительно переменных μ , μ_1 , ν , ν_1 , ϕ и их производных по времени. Тогда, после некоторых преобразований с учетом соотношений (1.6), придем к следующей совокупности дифференциальных уравнений возмущенного движения:

$$\begin{aligned} (A^* \sin^2 \theta^0 + C \cos^2 \theta^0) \ddot{\nu} + C \cos \theta^0 \ddot{\phi} - mal \sin \theta^0 \sin \theta_1^0 \ddot{\nu}_1 + \\ + (A^* - C) \omega \sin 2\theta^0 \dot{\mu} - 2mal \omega \sin \theta^0 \cos \theta_1^0 \dot{\mu}_1 - mal \sin \theta^0 \sin \theta_1^0 \omega^2 (\nu - \nu_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^* \ddot{\mu} - mal \cos(\theta_1^0 - \theta^0) \ddot{\mu}_1 - (A^* - C) \omega \sin 2\theta^0 \dot{v} + C \sin \theta^0 \dot{\phi} + \\
& + 2mal \omega \cos \theta^0 \sin \theta_1^0 \dot{v}_1 - [(A^* - C) \cos 2\theta^0 \omega^2 + mal \sin \theta^0 \sin \theta_1^0 \omega^2 - \\
& - mga \cos \theta^0] \mu + mal \cos \theta^0 \cos \theta_1^0 \omega^2 \mu_1 = 0 \\
& - a \cos(\theta_1^0 + \theta^0) \ddot{\mu} + ml^2 \ddot{\mu}_1 + 2\omega \cos \theta_1^0 (a \sin \theta^0 \dot{v} - l \sin \theta_1^0 \dot{v}_1) + \\
& + \omega^2 a \cos \theta_1^0 \cos \theta^0 \mu + (g \cos \theta_1^0 - l \omega^2 \cos 2\theta_1^0 - a \omega^2 \sin \theta_1^0 \sin \theta^0) \mu_1 = 0 \\
& l \sin \theta_1^0 \ddot{v}_1 - a \sin \theta^0 \ddot{v} + 2\omega (l \cos \theta_1^0 \dot{\mu}_1 - a \cos \theta^0 \dot{\mu}) - a \omega^2 \sin \theta^0 (v_1 - v) = 0 \\
& C(\dot{\phi} + \dot{v} \cos \theta^0 - \sin \theta^0 \omega \dot{\mu}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение полученной совокупности уравнений будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu^0 \exp(i\omega\lambda t), \quad v = v^0 \exp(i\omega\lambda t), \quad \mu_1 = \mu_1^0 \exp(i\omega\lambda t) \\
v_1 &= v_1^0 \exp(i\omega\lambda t), \quad \phi = \phi^0 \exp(i\omega\lambda t)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставим решение (3.3) в систему уравнений (3.2). В результате после некоторых преобразований получим характеристическое уравнение системы в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}
-a_1 \lambda^2 + a_2 & -ia_3 \lambda & -a_4 \lambda^2 + a_5 & 0 \\
-ia_3 \lambda & -(a_6 \lambda^2 + a_7) / \sin \theta^0 & 0 & a_8 \\
-a_4 \lambda^2 + a_5 & 0 & -a_9 \lambda^2 + a_{10} & -a_{11} i \lambda \\
0 & a_8^* / ml & i \lambda a_{11} / ml & -(a_{12} \lambda^2 + a_{13})
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= A + ma^2 \frac{\sin^2(\theta_1^0 + \theta^0)}{\cos^2 \theta_1^0} \\
a_2 &= A \sin \theta^0 - \frac{ma(l \sin \theta_1^0 - a \sin \theta^0)}{l \sin \theta^0 \sin \theta_1^0 \cos^2 \theta_1^0} (l \cos^2 \theta_1^0 \sin \theta_1^0 - a \sin \theta^0 \cos^2 \theta^0) \\
a_3 &= (2A - C) \cos \theta^0; \quad a_4 = \frac{mal \sin \theta_1^0}{\cos \theta_1^0} \sin(\theta_1^0 + \theta^0) \\
a_5 &= \frac{2ma \cos \theta^0 (l \sin \theta_1^0 - a \sin \theta^0)}{\sin 2\theta_1^0}, \quad a_6 = A \sin \theta^0 \\
a_7 &= \frac{ma(l \sin \theta_1^0 - a \sin \theta^0)^2}{l \sin \theta_1^0}, \quad a_8 = \frac{ma(l \sin \theta_1^0 - a \sin \theta^0) \sin \theta^0}{\sin \theta_1^0} \\
a_9 &= ml^2, \quad a_{10} = ml^2 \sin^2 \theta_1^0 - \frac{m a l \sin \theta^0}{\sin \theta_1^0}, \quad a_{11} = 2ml^2 \cos \theta_1^0 \\
a_{12} &= l, \quad a_{13} = a \sin \theta^0 / \sin \theta_1^0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Исследуемая форма стационарного движения в соответствии с решением (3.3) будет устойчивой в первом приближении, если все корни характеристического уравнения (3.4) будут действительны.

4. Решение уравнения (3.4) при фиксированных параметрах, характеризующих данную механическую систему, не представляет труда. Однако представляет интерес исследование зависимости распределения устойчивости от изменения параметров самой системы m, A, C, l, a , величины угловой скорости ω , а также углов θ^0, θ_1^0 ,

характеризующих изучаемую форму стационарного движения. При решении этой задачи будем считать, что имеет место соотношение (2.1) между параметрами системы, соответствующее движению тела на "короткой" струне. Вследствие этого, как показано выше, выполняется равенство (2.4) между обобщенными координатами θ^0 и θ_1^0 . При этом предположении характеристическое уравнение (3.4) после соответствующих преобразований можно представить в следующем виде:

$$z(b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3) = 0 \quad (z = \lambda^2) \quad (4.1)$$

$$b_0 = \sigma(4\Theta^2 - 4\Theta - \sigma)$$

$$b_1 = -4 \left[(3 - \kappa)\sigma - \frac{(1 - \kappa)^2}{\kappa} \right] \Theta^2 + \left[3\sigma^2 - \frac{4\sigma}{\kappa}(\kappa^2 - 2\kappa - 1) + 4 \frac{(1 - \kappa)^3}{\kappa^2} \right] \Theta +$$

$$+ 2\sigma \left[\sigma(1 - \kappa) - \frac{(1 - \kappa)^2}{\kappa} \right]$$

$$b_2 = -4 \left[(3 - \kappa) \frac{(1 - \kappa)^2}{\kappa^2} - \sigma \left(\kappa - \frac{1 - \kappa}{\kappa} (3 - 2\kappa) \right) \right] \Theta^2 + \quad (4.2)$$

$$+ \left[-(\kappa + 3)\sigma^2 + \frac{\sigma}{\kappa}(1 - \kappa)^2 - 4\sigma - 4 \frac{(1 - \kappa)^3}{\kappa^2} \right] \Theta -$$

$$- \sigma^2(\kappa^2 - 3\kappa + 1) + \frac{\sigma}{\kappa}(2\kappa^2 - 5\kappa + 3)(1 - \kappa) - \frac{(1 - \kappa)^4}{\kappa^2}$$

$$b_3 = 4 \left[\sigma \frac{1 - \kappa}{4\kappa}(\kappa + 3) + \frac{(1 - \kappa)^2}{\kappa} \right] \Theta^2 + \left[\kappa\sigma^2 - \frac{2\sigma}{\kappa}(1 - \kappa)^2(1 + \kappa) + \frac{(1 - \kappa)^3}{\kappa^2}(\kappa + 3) \right] \Theta -$$

$$- \kappa(1 - \kappa)\sigma^2 - \frac{(1 - \kappa)^2}{\kappa}(1 - 2\kappa)\sigma + \frac{(1 - \kappa)^4}{\kappa^2}$$

$$\Theta = \cos^2 \theta^0, \quad \kappa = \frac{a}{l}, \quad \sigma = \frac{A}{ma^2}, \quad q = \frac{A - C}{ma^2} \quad (4.3)$$

В этих обозначениях соотношение (2.1), которое является условием существования рассматриваемой формы стационарного движения, приобретает вид

$$q = 2(1 - \kappa)\kappa \quad (4.4)$$

Следует заметить, что характеристическое уравнение (4.1) имеет двукратный нулевой корень $z = \lambda^2 = 0$. Наличие двух нулевых корней здесь вызвано тем обстоятельством, что, как уже было отмечено выше, исследуемая механическая система имеет две циклических координаты ϕ и $(\psi + \psi_1)/2$. Как известно [7], относительно этих координат движение заведомо является неустойчивым. В соотношении с этим упомянутый двукратный корень в уравнении (4.1) следует опустить и последующее исследование устойчивости проводить относительно оставшихся (нециклических) координат, именно: $\theta, \theta_1, (\psi - \psi_1)/2$. В результате объектом исследования в дальнейшем будет уравнение

$$b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0 \quad (4.5)$$

коэффициенты b_i ($i = 0, 1, 2, 3$) которого по-прежнему определяются равенствами (4.2).

Для дальнейшего исследования необходимо определить область возможных значений параметров, характеризующих данную механическую систему. Будем делать

это в предположении, что твердое тело представляет собой прямой круговой цилиндр с радиусом основания r и высотой $2a$. Как известно, экваториальный и осевой моменты инерции такого цилиндра определяются следующим образом:

$$A = m(a^2/3 + r^2/4), \quad C = mr^2/2 \quad (4.6)$$

Введем параметр $e = r^2/a^2$. Тогда, с учетом обозначений (4.3), получим

$$\sigma = \frac{A}{ma^2} = \frac{4+3e}{12}, \quad q = \frac{A-C}{ma^2} = \frac{4-3e}{12} \quad (4.7)$$

Будем считать далее, что вращающийся на струне цилиндр имеет вытянутую форму, вследствие чего между его главными центральными моментами имеет место неравенство

$$A > C \quad (4.8)$$

Используя далее второе из равенств (4.7), приходим к выводу, что параметр e должен изменяться в пределах

$$0 \leq e < 4/3 \quad (4.9)$$

Из условия (4.4) существования рассматриваемой формы стационарного движения и равенств (4.7) следует такая зависимость между параметром κ и только что введенным параметром e :

$$\kappa = 24/(28-3e) \quad (4.10)$$

При использовании установленных выше неравенств (4.9) приходим к выводу, что соотношение (4.10) устанавливает следующие пределы для возможных значений параметра κ :

$$6/7 \leq \kappa < 1 \quad (4.11)$$

На основании проведенных рассуждений коэффициенты характеристического уравнения b_i ($i = 0, 1, 2, 3$), определяющиеся равенствами (4.2), являются функциями лишь двух параметров, именно: параметра $\Theta = \cos^2\theta^0$ и параметра $e = r^2/a^2$.

5. Обратимся к исследованию характеристического уравнения (4.5). Для этого будем использовать графо-аналитический метод, основы которого изложены в [9, 10]. Заменим предварительно в формулах (4.2) для коэффициентов характеристического уравнения b_i ($i = 0, 1, 2, 3$) величины σ, q, κ их выражениями через введенный выше параметр e посредством формул (4.7) и (4.10). Разрешая далее характеристическое уравнение (4.5) относительно параметра Θ , получим

$$\Theta(z; e) = \frac{-A_1(z; e) \pm \sqrt{A_1^2(z; e) - 4A_0(z; e)A_2(z; e)}}{2A_0(z; e)} \quad (5.1)$$

В правой части равенства (5.1) введены следующие обозначения:

$$A_0 = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$$

$$A_1 = b_0z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3 \quad (5.2)$$

$$A_2 = c_0z^3 + c_1z^2 + c_2z + c_3$$

где, в свою очередь

$$a_0 = 192(27e^3 - 468e^2 + 1680e + 3136) \quad (5.3)$$

$$a_1 = 96(-189e^3 + 2700e^2 - 7344e - 12992)$$

$$a_2 = 12(81e^4 - 648e^3 - 6336e^2 + 47232e + 23296)$$

$$a_3 = 6(-81e^4 + 1296e^3 - 3744e^2 - 14592e + 23296)$$

$$b_0 = 192(-27e^3 + 468e^2 - 1680e - 3136)$$

$$b_1 = 24(27e^4 + 324e^3 - 9648e^2 + 32960e + 64512)$$

$$b_2 = 2(-729e^4 + 9504e^3 + 9504e^2 - 281088e - 399616)$$

$$b_3 = 567e^4 - 12528e^3 + 37152e^2 + 54528e + 36608$$

$$c_0 = -4(81e^4 - 1296e^3 + 3168e^2 + 16128e + 12544)$$

$$c_1 = 4(243e^4 - 2160e^3 - 1440e^2 + 3840e + 1792)$$

$$c_2 = -891e^4 + 432e^3 + 15840e^2 + 56064e + 46336$$

$$c_3 = 243e^4 + 3024e^3 + 2592e^2 - 6912e - 3328$$

Для исследования устойчивости рассматриваемой механической системы построим график функции (5.1), в которой $A_0(z; e)$, $A_1(z; e)$, $A_2(z; e)$ являются функциями переменной z и, кроме того, зависят от одного параметра e . Исследуем вначале подкоренное выражение в правой части равенства (5.1), именно

$$\Delta(z; e) = A_1^2(z; e) - 4A_0(z; e)A_2(z; e) \quad (5.4)$$

Подставляя в правую часть равенства (5.4) выражения для A_i из формул (5.2), получим функцию $\Delta(z; e)$ в виде следующего полинома:

$$\Delta(z; e) = d_0z^6 + d_1z^5 + d_2z^4 + d_3z^3 + d_4z^2 + d_5z + d_6 \quad (5.5)$$

$$d_0 = 3072(2187e^7 - 64152e^6 + 524880e^5 + 746496e^4 - 22788864e^3 + 29804544e^2 + 198094848e + 157351936)$$

$$d_1 = 1536(-32805e^7 + 831060e^6 - 5252688e^5 - 18055872e^4 + 229886208e^3 - 97477632e^2 - 1602220032e - 1388068864)$$

$$d_2 = 768(2187e^8 + 109350e^7 - 3321324e^6 + 20844864e^5 + 56376000e^4 - 710208000e^3 + 212708352e^2 + 4856807424e + 4348854272)$$

$$d_3 = 192(-32805e^8 + 53946e^7 + 10631736e^6 - 104610528e^5 + 111770496e^4 + 1731497472e^3 - 2028165120e^2 - 13948788736e - 11769511936)$$

$$d_4 = 4(2053593e^8 - 30408048e^7 - 27527040e^6 + 2411617536e^5 - 11163889152e^4 - 10266365952e^3 + 86356131840e^2 + 226924363776e + 169926787072) \quad (5.6)$$

$$d_5 = 4(-1082565e^8 + 20610288e^7 - 11696592e^6 - 10264320e^5 + 2608962048e^4 - 5210763264e^3 - 23150444544e^2 - 32041402368e - 20175454208)$$

$$d_6 = 793881e^8 - 15886368e^7 + 131896512e^6 - 606279168e^5 + 1420125696e^4 + 1833836544e^3 + 1524547584e^2 + 6691356672e + 3200843776$$

Проведем исследование корней полученного полинома при использовании теоремы Н.Н. Меймана [11], которая состоит в следующем:

пусть имеется алгебраическое уравнение n -й степени с вещественными коэффициентами

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (5.7)$$

Построим полином вида

$$f(z) + if'(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n + i[na_0z^{n-1} + (n-1)a_1z^{n-2} + \dots + a_{n-1}] \quad (5.8)$$

На основании этого полинома построим такой определитель:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & na_0 & \dots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & na_0 & \dots & 2a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

Составим далее ряд

$$1, R_2, R_4, R_6, \dots, R_{2n-2}, R_{2n} \quad (5.10)$$

в котором $R_2, R_4, R_6, \dots, R_{2n-2}, R_{2n}$ — четные диагональные миноры определителя (5.9).

Суть теоремы Меймана состоит в том, что число пар комплексных корней уравнения (5.7) равно числу перемен знаков в ряду (5.10).

Используем эту теорему к исследованию корней полинома (5.5), который является подкоренным выражением в равенстве (5.1). Приравнивая этот полином нулю, получим уравнение

$$\Delta = d_0 z^6 + d_1 z^5 + d_2 z^4 + d_3 z^3 + d_4 z^2 + d_5 z + d_6 = 0 \quad (5.11)$$

Составим далее определитель вида (5.9) для уравнения (5.11)

$$\begin{vmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6d_0 & 5d_1 & 4d_2 & 3d_3 & 2d_4 & d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6d_0 & 5d_1 & 4d_2 & 3d_3 & 2d_4 & d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6d_0 & 5d_1 & 4d_2 & 3d_3 & 2d_4 & d_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6d_0 & 5d_1 & 4d_2 & 3d_3 & 2d_4 & d_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6d_0 & 5d_1 & 4d_2 & 3d_3 & 2d_4 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6d_0 & 5d_1 & 4d_2 & 3d_3 & 2d_4 & d_5 \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

Как можно убедиться из рассмотрения определителя (5.12), минор $R_2 > 0$ всегда.

Аналитическое исследование знаков миноров $R_4, R_6, R_8, R_{10}, R_{12}$ довольно громоздко, в чем можно убедиться, обращаясь к выражениям d_i ($i = 0, \dots, 6$), поэтому пришлось прибегнуть к численным исследованиям на ЭВМ.

Итак, минор R_4 после проведения элементарных преобразований приводится к виду

$$R_4 = -d_0^2(12d_0d_2 - 5d_1^2) = -2^{30}3^4(3e-7)^{14}(3e+1)^6(3e+4)^2 P_7(e) \quad (5.13)$$

где полином $P_7(e)$ определяется следующим образом:

$$P_7(e) = 34992(e/4)^7 - 172773(e/4)^6 - 454410(e/4)^5 + 501957(e/4)^4 + \\ + 1153764(e/4)^3 + 143685(e/4)^2 - 191562(e/4) - 45029 \quad (5.14)$$

Корни приведенного полинома будут следующими:

$$25.909172, -6.981462, 1.717605, 7.113065, -5.337255, -1.335563 \pm 0.061401i \quad (5.15)$$

Отсюда следует, что на интервале $[0, 4/3)$ изменения параметра e полином $P_7(e)$ всегда отрицателен и корней не имеет. Принимая во внимание это обстоятельство и выражение (5.13), убеждаемся, что для всех e из интервала $[0, 4/3)$ минор R_4 положителен.

Аналогичные исследования (см. [3]) показывают, что минор R_6 также положителен в исследуемом подынтервале $e \in [0, 4/3)$. Что касается минора R_8 , то, как оказалось, он в интервале изменения параметра $e [0, 4/3)$ имеет два корня e_1 и e_2 :

$$e_1 = 0.509816, \quad e_2 = 1.089157 \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что полином $R_8(e)$ в подынтервале $[0, u_1)$ отрицателен, при $e_1 < e < e_2$ — положителен и при $e_2 < e < 4/3$ вновь становится отрицательным.

Определим далее знак минора $R_{10}(e)$ при $e \in [0, 4/3)$. После элементарных преобразований этот минор приводится к виду

$$R_{10}(e) = -2^{53} 3^5 (\frac{3}{4}e - 7)^{24} (\frac{3}{4}e + 1)^7 (\frac{3}{4}e + 4)^2 P_{43}(e) \quad (5.17)$$

где $P_{43}(e)$ — полином 43-й степени относительно параметра e . Производя далее численные исследования, убеждаемся в том, что в интервале $[0, 4/3)$ минор $R_{10}(e)$ будет отрицательным.

Наконец, определим знаки минора $R_{12}(e)$ в интервале $e \in [0, 4/3)$. Общий вид этого минора определяется равенством (5.12). После простых, но громоздких преобразований минор $R_{12}(e)$ может быть преобразован к виду

$$R_{12}(e) = 2^{63} 3^{10} (\frac{3}{4}e - 7)^{25} (\frac{3}{4}e - 1)^3 (\frac{3}{4}e + 1)^7 (\frac{3}{4}e + 4)^2 P_2^2(e) P_8^2(e) P_{32}(e) \quad (5.18)$$

где $P_2(e)$, $P_8(e)$, $P_{32}(e)$ — полиномы соответственно 2-й, 8-й и 32-й степени относительно параметра e . Анализ корней этих полиномов показывает следующее: полином $P_2(e)$ в интересующем интервале $[0, 4/3)$ не имеет вещественных корней. Полином $P_8(e)$ имеет два действительных корня:

$$e_1^0 = 0.061206 \text{ и } e_2^0 = 0.159125 \quad (5.19)$$

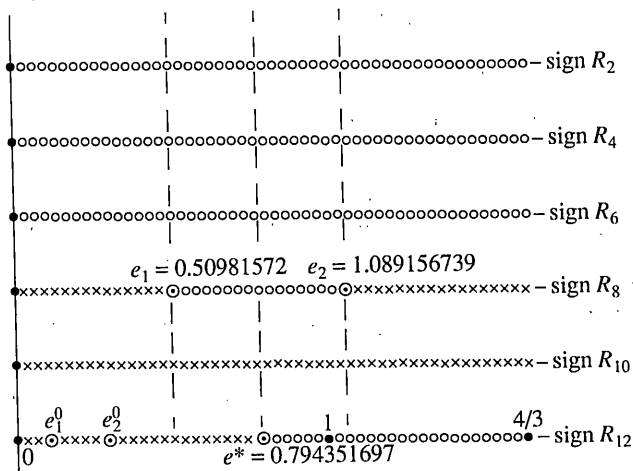
Полином $P_{32}(e)$ на том же интервале $[0, 4/3)$ имеет один корень:

$$e = e^* \approx 0.794352 \quad (5.20)$$

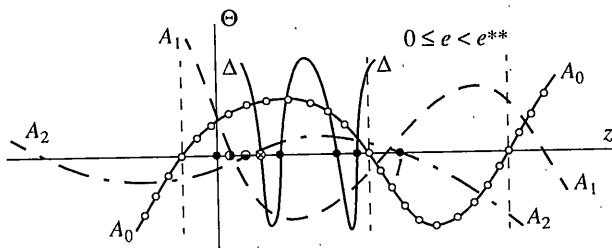
Отсюда следует, что минор R_{12} на интервале $[0, e^*)$ отрицателен (за исключением кратных корней e_1^0, e_2^0 , где он обращается в нуль) и положителен на интервале $(e^*, 4/3)$.

Для определения перемен знаков в ряду (5.10) составим своеобразную диаграмму. На фиг. 4 отложены в одном и том же масштабе отрезки прямой, соответствующие сегменту $[0, 4/3)$. На каждом из таких отрезков укажем на основании проведенных расчетов, где каждый из миноров положителен, а где отрицателен. При этом светлыми точками отмечены значения e , где соответствующий минор положителен, а крестами — где он отрицателен, как это показано на фиг. 4. На этом же рисунке отмечены указанные выше точки e_1 и e_2 . Через точки e_1 , e_2 и e^* проведем вертикальные вспомогательные прямые.

Анализируя фиг. 4, убеждаемся, что для всех значений $0 \leq e < e^*$ ряд (5.10) будет иметь только одну перемен знаков. Это означает, что для всех $0 \leq e < e^*$ уравнение (5.11) будет иметь лишь одну пару комплексно-сопряженных корней и четыре вещественные корни. Для всех же значений $e^* < e < 4/3$ будет иметь место две переменны знаков. В результате на этом интервале уравнение будет иметь две пары комплексно-сопряженных корней и лишь два вещественных корня.



Фиг. 4



Фиг. 5

В случае, когда параметр e принимает значение e_1^0, e_2^0 или e^* минор R_{12} , как показано выше, обращается в нуль. Теорема Меймана в этом случае не дает ответа на вопрос о количестве перемен знаков в ряду (5.10), а, следовательно, и о числе действительных корней полинома (5.5). Однако, как показано в [11], минор R_{12} одновременно является дискриминантом для функции $f(z)$ и ее производной $f'(z)$. Поэтому упомянутые значения параметра e , где этот дискриминант обращается в нуль, являются кратными корнями уравнения (5.11). Это обстоятельство является весьма существенным при дальнейшем исследовании функции (5.1).

6. Обратимся теперь к рассмотрению функций $A_0(z; e)$, $A_1(z; e)$ и $A_2(z; e)$, которые входят в правую часть исследуемого уравнения (5.1). Согласно равенствам (5.2) и (5.3) эти функции представляются в виде следующих полиномов:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 192z^3(27e^3 - 468e^2 + 1680e + 3126) + 96z^2(-189e^3 + 2700e^2 - 7344e - 12992) + \\
 &+ 12z(81e^4 - 648e^3 - 6336e^2 + 47232e + 23296) + \\
 &+ 6(-81e^4 + 1296e^3 - 3744e^2 - 14592e + 23296)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 192z^3(-27e^3 + 468e^2 - 1680e - 3136) + \\
 &+ 24z^2(27e^4 + 324e^3 - 9648e^2 + 32960e + 64512) + \\
 &+ 2z(-729e^4 + 9504e^3 + 9504e^2 - 281088e - 399616) + \\
 &+ 567e^4 - 12528e^3 + 37152e^2 + 54528e + 36608
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & -[4z^3(81e^4 - 1296e^3 + 3168e^2 + 16128e + 12544) + \\
& + 4z^2(-243e^4 + 2160e^3 + 1440e^2 - 3840e - 1792) + \\
& + z(891e^4 - 432e^3 - 15840e^2 - 56064e - 46336) - \\
& - 243e^4 - 3024e^3 - 2592e^2 + 6912e + 3328]
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Определим число нулей только что приведенных функций в интервале $e \in [0, 4/3]$. Для этой цели вновь воспользуемся теоремой Меймана. Проведем вначале это исследование для функции $A_0(z; e)$. Аналогично предыдущему для этой функции составляется ряд из миноров $M_2(e)$, $M_4(e)$, $M_6(e)$, подобно приведенному выше ряду (5.10):

$$1, M_2, M_4, M_6 \tag{6.4}$$

Миноры $M_2(e)$, $M_4(e)$, $M_6(e)$, раскрытые по степеням параметра e , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
M_6(e) = & -1024(3e - 4)(3e - 28)^4(59049e^{10} - 3070548e^9 + 54692496e^8 - \\
& - 364336704e^7 + 299904768e^6 + 4689736704e^5 - 7594020864e^4 - 24482856960e^3 + \\
& + 68025581568e^2 + 204475465728e + 133097848832)
\end{aligned}$$

$$M_4(e) = -128(3e - 28)^2(729e^5 - 20736e^4 + 92448e^3 + 193536e^2 - 381696e - 581632)$$

$$M_2(e) = [32(27e^3 - 468e^2 + 1680e + 3136)]^2$$

Кроме очевидных нулей $e = 4/3$ и $e = 28/3$ эти функции будут иметь следующие нули:

а) для полинома $M_6(e)$:

$$\begin{aligned}
& 20.520764, 17.219515, 8.283926, 7.265356, 2.652821 \pm 2.429710i \\
& -1.651704 \pm 0.607501i, -1.900127, -1.391667
\end{aligned} \tag{6.5}$$

в) нули полиномов $M_4(e)$ и $M_2(e)$ соответственно

$$22.263421, 7.102892, 2.148439, -1.626290, -1.444018 \tag{6.6}$$

$$9.333333, 9.333333, -1.333333 \tag{6.7}$$

Анализ нулей миноров $M_2(e)$, $M_4(e)$, $M_6(e)$ показывает, что в интервал изменения параметра e , который представляет интерес, ни один из них не попадает. Следовательно, на этом интервале $M_2(e)$, $M_4(e)$, $M_6(e)$ не меняют знак. При значении $e = 0$ эти миноры положительны. Таким образом, при $e \in [0, 4/3]$ миноры $M_2(e)$, $M_4(e)$, $M_6(e)$ будут положительными, и ряд (6.4) не будет иметь перемен знака. Это означает, что для всех значений параметра e из интервала $[0, 4/3]$ функция A_0 всегда будет иметь только вещественные нули.

Для построения графика функции $A_0(z; e)$ определим, прежде всего, ее значение при $e = 0$. Согласно равенству (6.1) при $z = 0$ значение функции $A_0(0; e)$ оказывается равным

$$A_0(0; e) = 6(-81e^4 + 1296e^3 - 3744e^2 - 14592 + 23296) \tag{6.8}$$

Нетрудно убедиться, что для всех значений e из интервала $[0, 4/3]$ значения функции $A_0(0; e)$ положительны. Анализируя аналогичным образом значения функции $A_0(z; e)$ при $z = 1$, а также при $z \rightarrow \pm\infty$, убеждаемся, что график функции $A_0(z; e)$ для всех $e \in [0, 4/3]$ будет иметь вид, представленный на фиг. 5. Аналогичным образом строятся графики функций $A_1(z; e)$ и $A_2(z; e)$, также представленные на этой фигуре.

Определим значение параметра e , при котором графики функций $A_1(z; e)$ и $A_2(z; e)$ будут иметь на оси z точку пересечения. С этой целью воспользуемся известной теоремой алгебры, согласно которой необходимым и достаточным условием наличия общего корня у двух полиномов является равенство нулю их результата. В данном случае

$$R[A_1(z; e), A_2(z; e)] = -73728(3e - 28)^6(3e + 4)^2(3e - 4)P_3(e)P_5(e)P_6(e)$$

$$P_3(e) = 27e^3 - 972e^2 + 8208e + 15296$$

$$P_5(e) = 486e^5 - 9693e^4 - 93744e^3 - 303840e^2 - 424192e - 216320$$

$$P_6(e) = 729e^6 - 93312e^5 - 478224e^4 - 967680e^3 - 573696e^2 + 294912e + 102400$$

Из всех нулей функции $R(A_1, A_2)$ в интересующем нас интервале $[0, 4/3)$ изменения параметра e попадает лишь значение [3]:

$$e^{**} = 0.459190 \quad (6.9)$$

Дальнейший анализ и числовые расчеты показывают, что взаимное расположение функций $A_0(z; e)$, $A_1(z; e)$, $A_2(z; e)$ и $\Delta(z; e) = A_1^2(z; e) - 4A_0(z; e)A_2(z; e)$, показанное на фиг. 5 для $e \in [0, e^{**})$, при увеличении параметра e претерпевает некоторые изменения. В частности, при $e = e^{**}$ графики функций A_1 , A_2 и Δ пересекают ось z в одной и той же точке, а при дальнейшем увеличении параметра e точки пересечения оси z функциями $A_1(z; e)$ и $A_2(z; e)$ меняются местами (см. [3]).

7. При дальнейшем исследовании необходимо знание количества точек пересечения функции (5.1) с прямой $\Theta = 1$. Для его определения подставим в левую часть выражения (5.1) значение $\Theta = 1$. В результате, после соответственных преобразований, количество упомянутых точек пересечения будет определяться из равенства

$$A_0(z; e) + A_1(z; e) + A_2(z; e) = 0 \quad (7.1)$$

в котором функции $A_0(z; e)$, $A_1(z; e)$, $A_2(z; e)$ определяются соотношениями (6.1) – (6.3). После их использования условие (7.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & 4z^3(81e^4 - 1296e^3 + 3168e^2 + 16128e + 12544) + \\ & + 4z^2(-405e^4 + 4752e^3 - 5472e^2 - 25344e - 77056) + \\ & + z(1377e^4 - 11664e^3 + 41184e^2 - 60672e + 473344) + \\ & + 4(-81e^4 + 432e^3 - 4320e^2 + 9984e - 43264) = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Для определения характера корней только что приведенного уравнения вновь воспользуемся теоремой Меймана. В результате приходим к выводу, что для всех $e \in [0, 4/3)$ функция (5.1) будет пересекать прямую $\Theta = 1$ три раза.

8. Итак, обратимся к непосредственному построению на плоскости (z, Θ) графика функции (5.1).

Проведем прежде всего асимптоты. Очевидно, асимптотами этой функции являются вертикальные прямые, проходящие через нули функции $A_0(z; e)$. Согласно графику этой функции (см. фиг. 5), таких асимптот будет три: одна из них расположена слева от оси Θ , две другие – справа.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании других (невертикальных) асимптот функции (5.1). Согласно известным формулам, угловые коэффициенты k_{\pm} асимптот для положительной и отрицательной ветвей функции (5.1) определяются из предельных соотношений

$$k_{\pm} = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{\Theta(z; e)}{z} \quad (8.1)$$

Принимая во внимание формулы (6.1) – (6.3), убеждаемся, что как для положительной, так и для отрицательной ветвей функции (5.1) угловые коэффициенты (8.1) равны нулю. Величины же n_{\pm} , характеризующие отстояние горизонтальной асимптоты от оси абсцисс оказываются равными

$$n_{\pm} = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} [\Theta(z; e) - k_{\pm}z] = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0} \quad (8.2)$$

При помощи равенств (6.1) – (6.3) легко показать, что на интервале $[0, 4/3)$ изменения параметра e имеют место соотношения

$$a_0 = -b_0 > 0, \quad c_0 < 0 \quad (8.3)$$

В результате убеждаемся, что

$$n_+ > 0 \text{ и } n_- < 0 \quad (8.4)$$

Из соотношений (8.2) и (8.3) следует, что

$$n_+ + n_- = 1 \quad (8.5)$$

Тогда, очевидно

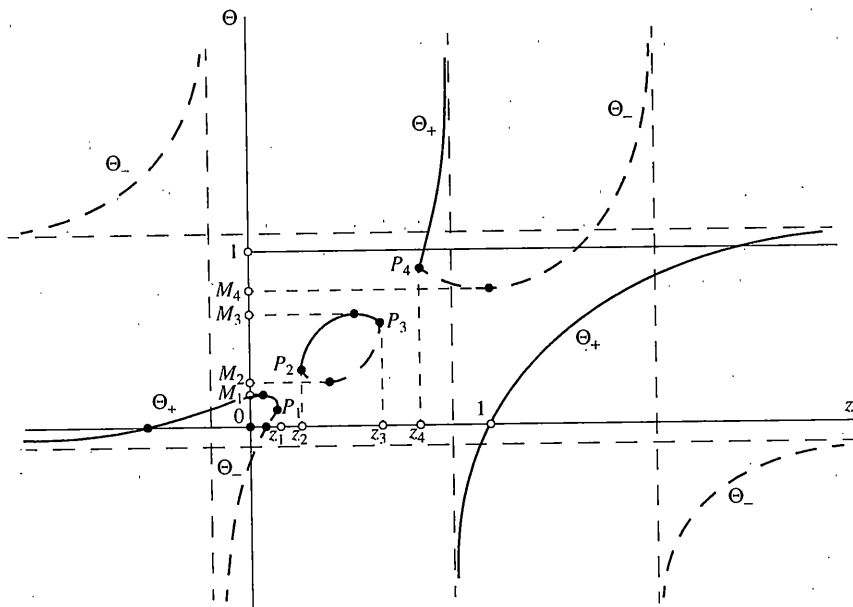
$$n_+ > 1, \quad n_- < 0 \quad (8.6)$$

Только что проведенный анализ позволяет заключить, что $\Theta_+(z; e) = n_-$ при $z \rightarrow -\infty$, т.е. горизонтальная асимптота для этой ветви проходит ниже оси абсцисс. Соответственно при $z \rightarrow +\infty$ положительная ветвь функции $\Theta_+(z; e)$ будет равна n_+ и будет проходить выше значения $\Theta = 1$. Аналогично асимптота отрицательной ветви функции $\Theta_-(z; e)$ при $z \rightarrow -\infty$ будет располагаться выше значения $\Theta = 1$, при $z \rightarrow +\infty$ асимптота отрицательной ветви функции $\Theta_-(z; e)$ будет располагаться ниже оси абсцисс.

Определим нули функции (5.1). В рассматриваемом случае они будут иметь место при равенстве нулю функции $A_2(z; e)$, которая определяется соотношением (6.3). Как следует из рассмотрения фиг. 5, при равенстве нулю функции $A_2(z; e)$ слева от оси ординат функция $A_1(z; e)$ будет положительна. Это означает, что в данном случае положительная ветвь функции (5.1) пересекает ось абсцисс. Такое же заключение можно сделать и при равенстве нулю функции $A_2(z; e)$, когда $z = 1$ (см. фиг. 5). При равенстве нулю функции $A_2(z; e)$, справа от оси ординат (при $z < 1$) функция $A_1(z; e)$ будет отрицательной. В результате уже отрицательная ветвь функции (5.1) пересечет ось абсцисс.

9. Обратимся теперь к непосредственному построению графика функции (5.1) при изменении параметра e в полусегменте $[0, 4/3)$. Для удобства исследования этот полусегмент разобьем на сегмент $[0, e^{**}]$ и два интервала (e^{**}, e^*) и $(e^*, 4/3)$.

Рассмотрим вначале сегмент $[0, e^{**}]$. Ранее было отмечено, что в данном сегменте подкоренное выражение функции (5.1) имеет четыре вещественных корня. Их расположение относительно корней функций $A_0(z; e)$, $A_1(z; e)$ и $A_2(z; e)$ представлено на фиг. 5. Принимая во внимание изложенное выше, построение графика функции (5.1) начнем с ее положительной ветви $\Theta_+(z; e)$. Как было отмечено, при $z \rightarrow -\infty$ $\Theta_+(z; e)$ стремится к горизонтальной асимптоте, определенной ранее. Эта ветвь пересекает ось абсцисс слева от оси ординат в точке, где упомянутая выше функция $A_2(z; e)$ обращается в нуль. На фиг. 6 ветвь $\Theta_+(z; e)$ показана сплошной жирной линией. При увеличении переменной z график функции $\Theta_+(z; e)$ пересекает ось Θ на положительной ее части для всех значений параметра e , расположенных на полусегменте $[0, 4/3)$. В этом легко убедиться, если принять во внимание графики функции $A_0(z; e)$, $A_1(z; e)$ и $A_2(z; e)$, изображенные на фиг. 5.



Фиг. 6

Проанализируем поведение функции $\Theta_+(z; e)$ при изменении переменной z на полу-сегменте $[0, z_1)$, где z_1 является первым действительным корнем подкоренного выражения этой функции. Числовые расчеты, которые проводились для каждого фиксированного значения e , показывают, что при $e = 0$ абсцисса максимума функции $\Theta_+(z; e)$ находится слева от значения z_1 . При возрастании параметра e и стремлении его к значению e_1^0 , при котором, как уже упоминалось, подкоренное выражение функции $\Theta_+(z; e)$ имеет кратные корни, абсцисса максимума этой функции увеличивается, и при $e = e_1^0 = 0.061206$ оказывается равной значению z_1 . Для всех $e \in (e_1^0, e^{**})$ абсцисса максимума функции $\Theta_+(z; e)$ лежит левее z_1 и с ростом e стремится к оси Θ . Значение e , при котором функция $\Theta_+(z; e)$ имеет максимум на оси ординат, находилось из условия равенства нулю производной, т.е. $d\Theta_+(z; e)/dz = 0$ при $z = 0$.

После элементарных преобразований задача свелась к нахождению корней полинома 15-й степени, из которых только один ($e = \tilde{e}$) оказался принадлежащим рассматриваемому полу-сегменту $[0; 4/3)$. Таким образом, функция $\Theta_+(z; e)$ будет иметь максимальное значение на оси Θ при $e = \tilde{e} = 0.465203$. Для значений $e > \tilde{e}$, максимум функции $\Theta_+(z; e)$ будет находиться слева от оси Θ .

Таким образом, для всех значений $e \in [0, \tilde{e})$, кроме значения $e = e_1^0$, положительная ветвь функции (5.1) будет иметь максимум, абсцисса которого будет располагаться в полу-сегменте $[0, z_1)$.

При изменении переменного z в интервале (z_2, z_3) , где z_2 и z_3 – второй и третий вещественные корни подкоренного выражения функции $\Theta_+(z; e)$, эта функция вначале будет монотонно возрастать. По мере своего приближения к значению $\Theta_+(z_3; e)$ эта функция будет достигать своего максимального значения для всех e , за исключением $e = e_2^0$. При этом каждый из упомянутых максимумов будет превышать значение $\Theta_+(z_3; e)$. При $e = e_2^0$ максимум функции $\Theta_+(z; e)$ будет равняться значению $\Theta_+(z_3; e_2^0)$.

При последующем увеличении переменной z функции $\Theta_+(z; e)$ от точки P_4 , абсцисса которой равна четвертому корню подкоренного выражения, пересекает прямую $\Theta = 1$ и устремляется к вертикальной асимптоте (фиг. 6). Справа от этой асимптоты функция $\Theta_+(z; e)$ пересекает ось абсцисс при $z = 1$ и далее при возрастании переменной z второй раз пересекает прямую $\Theta = 1$ и устремляется к своей второй горизонтальной асимптоте, о которой речь шла выше (фиг. 6).

Перейдем теперь к построению графика отрицательной ветви функции (5.1), именно $\Theta_-(z; e)$. Ранее было показано, что эта функция при $z \rightarrow -\infty$ стремится к горизонтальной асимптоте, расположенной выше прямой $\Theta = 1$. Слева от оси $z = 0$ ветвь $\Theta_-(z; e)$ имеет одну вертикальную асимптоту (см. фиг. 6, где эта ветвь обозначена штриховой линией). Справа от этой асимптоты график функции $\Theta_-(z; e)$ пересекает ось абсцисс, и в точке P_1 встречается с положительной ветвью функции (5.1). Заметим, что абсциссы точек встречи положительной и отрицательной ветвей функции $\Theta(z; e)$ являются корнями полинома (5.5), подробно исследованного ранее. При возрастании z эта ветвь располагается между точками P_2 и P_3 , абсциссы которых равны соответственно z_2 и z_3 . Числовые расчеты показывают, что для всех значений $e \in [0, e^*]$, за исключением значения $e = e_1^0$, функция $\Theta_-(z; e)$ имеет минимум, расположенный между точками z_2 и z_3 , а при $e = e_1^0 - z_{\min} = z_2$.

С увеличением переменной z положительная и отрицательная ветви вновь имеют общую точку P_4 (фиг. 6). После значения P_4 отрицательная ветвь $\Theta_-(z; e)$ пересекает прямую $\Theta = 1$ и стремится к еще одной вертикальной асимптоте (фиг. 6). Справа от асимптоты отрицательная ветвь будет все время отрицательной и при $z \rightarrow \infty$ будет стремиться к определенной ранее горизонтальной асимптоте, расположенной ниже оси абсцисс.

График функции (5.1) представлен на фиг. 6 для рассматриваемого изменения параметра e на сегменте $[0, e^{**}]$, за исключением значений $e = e_1^0$ и $e = e_2^0$.

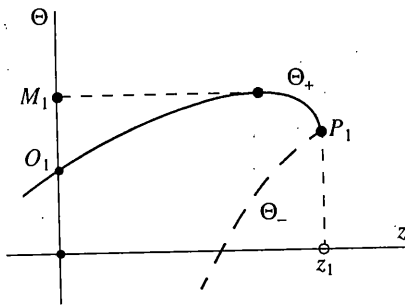
10. Обратимся к анализу построенного графика функции $\Theta(z; e)$. На рис. 6 проведем прямую, параллельную оси абсцисс через точку, ордината которой равна произвольному значению $\Theta \in [0, 1]$. Абсциссы точек пересечения этой прямой с графиком функции $\Theta(z; e)$ и будут искомыми корнями характеристического уравнения (4.5).

Выше было показано, что при $z \in (0, z_1)$ положительная ветвь $\Theta_+(z; e)$ в указанном ранее интервале измерения параметра $e \in [0, e^{**}]$ достигает своего наибольшего значения, которое превышает значение $\Theta(z_1; e)$ (см. фиг. 7, который является фрагментом графика 6 вблизи начала координат). Используя фиг. 6 и 7, убеждаемся, что для всех значений Θ , расположенных ниже точки O_1 , где положительная ветвь функции (5.1) пересекает ось Θ , характеристическое уравнение будет иметь лишь два положительных корня. Следовательно, в этой зоне изменения параметра e движение исследуемого тела будет неустойчивым. В полосе изменения параметра e от точки O_1 до M_1 (ордината максимума функции $\Theta_+(z; e)$ на интервале $[0, z_1]$) характеристическое уравнение будет иметь три положительных корня (фиг. 6), и, следовательно, для этих значений Θ движение тела будет устойчивым.

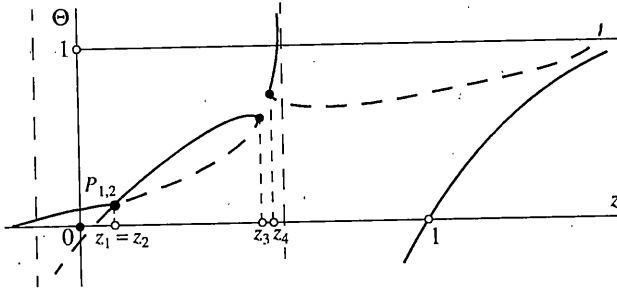
Проводя далее прямые, параллельные оси абсцисс, между точками M_2 (ордината минимума функции $\Theta_-(z; e)$ на интервале $[z_2, z_3]$) и M_3 (ордината максимума функции $\Theta_+(z; e)$ на интервале $[z_2, z_3]$), находим, что движение исследуемого тела будет устойчивым и на этом интервале.

Из фиг. 6 видно, что еще один интервал устойчивости ограничен точкой M_4 (ордината минимума функции $\Theta_-(z; e)$ на интервале $[z_4, 1]$) и предельным значением $\Theta = 1$.

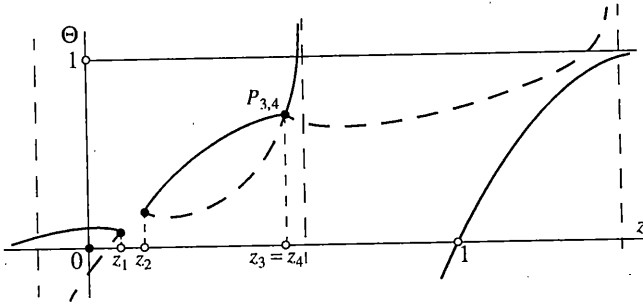
Таким образом, на интервале $\Theta \in [0, 1]$ обнаружены три зоны устойчивости, именно: $[O_1, M_1]$; (M_2, M_3) и $(M_4, 1]$, а также три зоны неустойчивости — $[0, O_1]$; (M_1, M_2) ; (M_3, M_4) . Эта качественная картина распределения устойчивости сохраняется при изменении параметра e в полусегменте $[0, e^{**}]$ за исключением двух значений $e = e_1^0$ и $e = e_2^0$.



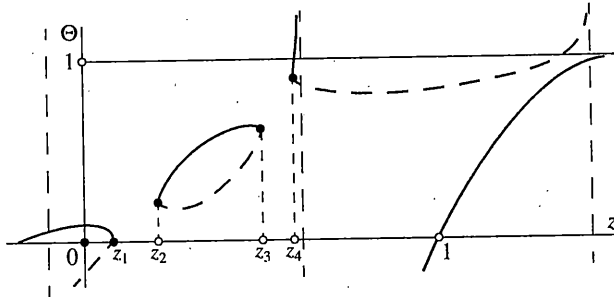
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Ранее было отмечено, что при значении $e = e_1^0$ наибольшее значение положительной ветви функции $\Theta_+(z; e)$ сливается с наименьшим значением функции $\Theta_-(z; e)$ в точке $z = z_1 = z_2$. В результате примерный график функции $\Theta(z; e)$ имеет вид, изображенный на фиг. 8. Из рассмотрения этого графика следует, что при $e = e_1^0$ область неустойчивости (M_1, M_2) вырождается в точку $P_{1,2}$. В остальном характер поведения тела не меняется.

В случае, когда значение параметра e равно e_2^0 , примерный график функции $\Theta(z; e_2^0)$ представлен на фиг. 9. Как видно из его анализа, здесь уже сливаются точки функции $\Theta(z; e)$ с абсциссами z_3 и z_4 (см. фиг. 6). В результате область неустойчивости (P_3, P_4) вырождается аналогично предыдущему случаю в точку $P_{3,4}$. В остальном же распределение зон устойчивости и неустойчивости движения тела будет аналогичным представленному на фиг. 6.

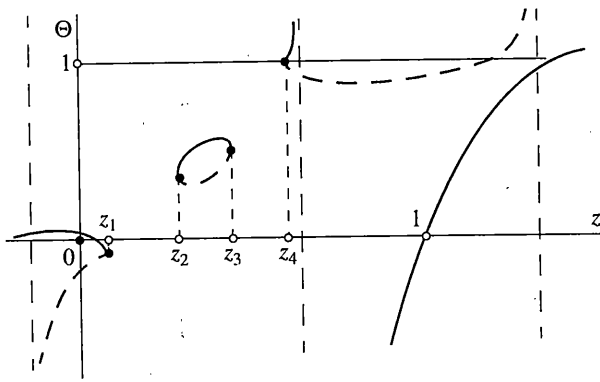
При дальнейшем увеличении параметра e точка P_1 – пересечения положительной и отрицательной ветвей функции $\Theta(z; e)$ опускается к оси абсцисс и при $e = e^{**}$ она окажется на самой оси абсцисс (фиг. 10). Качественная картина распределения областей устойчивого и неустойчивого движения исследуемого тела будет такой же, как и на фиг. 6.

Рассмотрим теперь случай, когда параметр e пробегает интервал (e^{**}, e^*) . Вначале при $e^{**} < e \leq \tilde{e}$ график функции $\Theta(z; e)$ будет аналогичен графику, изображенному на фиг. 6 с той лишь разницей, что точка пересечения положительной и отрицательной ветвей функции $\Theta(z; e)$ будет находиться под осью абсцисс. В результате распределение устойчивых и неустойчивых зон будет таким же, как и на фиг. 6. При $e = \tilde{e}$, как было упомянуто выше, максимум функции $\Theta_+(z; e)$ попадает на ось ординат, точки O_1 и M_1 совпадают и, следовательно, исчезает зона устойчивости, ограниченная этими точками. При изменении параметра e в интервале $\tilde{e} < e < e^*$ точка P_1 – встречи положительной и отрицательной ветвей будет опускаться все ниже оси абсцисс. Точка P_4 будет приближаться к прямой $\Theta = 1$, а точки P_2 и P_3 будут приближаться друг к другу, сужая тем самым зону устойчивости, расположенную между ними. Примерный вид графика функции в этом случае представлен на фиг. 11.

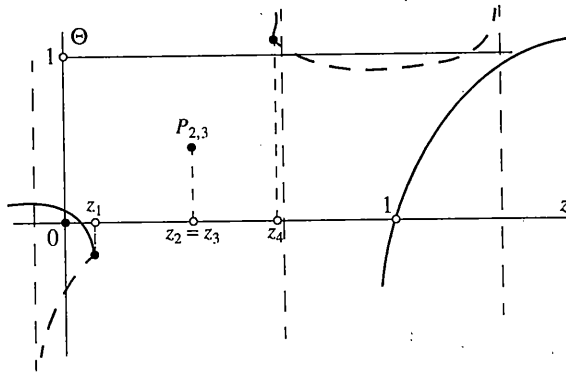
При дальнейшем увеличении параметра e зона между ординатами P_2 и P_3 сужается и при $e = e^*$ эти ординаты сливаются в точку (фиг. 12). Здесь уже устойчивым будет движение тела лишь в узкой зоне, близкой к прямой $\Theta = 1$. Заметим, что $e = e^*$ является, как уже упоминалось выше, третьим значением e , при котором два корня функции $\Delta(z; e)$ становятся кратными.

Обратимся теперь к рассмотрению случая, когда параметр e пробегает интервал $(e^*, 4/3)$. Как уже упоминалось ранее, в этом случае подкоренное выражение Δ функции $\Theta(z; e)$ имеет два вещественных корня. Расположение друг относительно друга упомянутых выше функций $A_0(z; e)$, $A_1(z; e)$, $A_2(z; e)$ и Δ представлено на фиг. 13. Построение функции $\Theta(z; e)$ в данном случае аналогично проведенному выше. На фиг. 14 представлен график функции $\Theta(z; e)$ при $e \in (e^*, 4/3)$. Анализ этого графика показывает, что здесь уже лишь одна зона значений параметра Θ , в которой движение исследуемого тела будет устойчивым. С приближением параметра e к значению $4/3$ эта зона уменьшается и приближается к прямой $\Theta = 1$. Заметим, что при $e = 4/3$ (эллипсоид инерции тела имеет форму шара) отрицательная ветвь $\Theta_-(z; e)$ будет располагаться выше прямой $\Theta = 1$, касаясь ее, в этом случае исследуемая форма движения тела не имеет места.

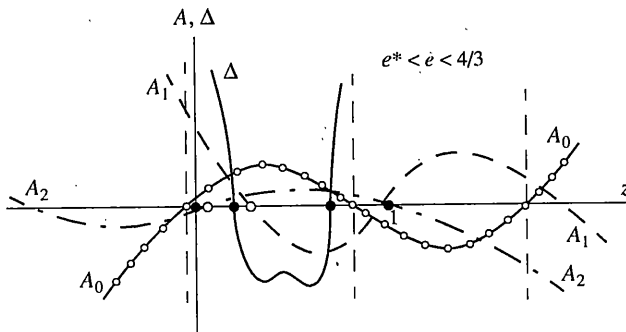
11. В п. 10 были построены графики функции $\Theta(z; e)$, позволяющие определять области устойчивости и неустойчивости движения тела в зависимости от изменения переменного z для различных значений параметра e на полуотрезке $[0, 4/3)$.



Фиг. 11



Фиг. 12

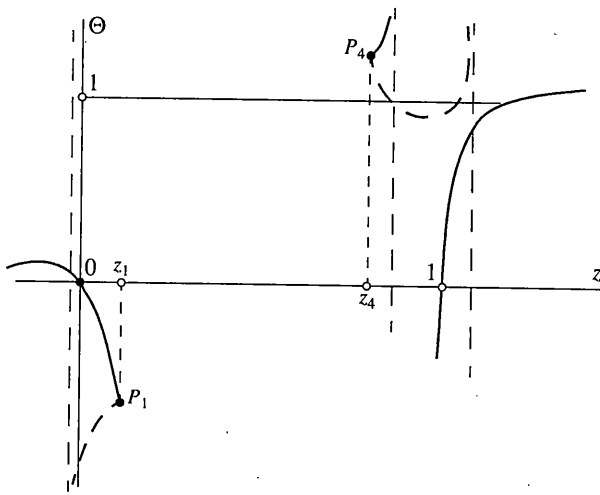


Фиг. 13

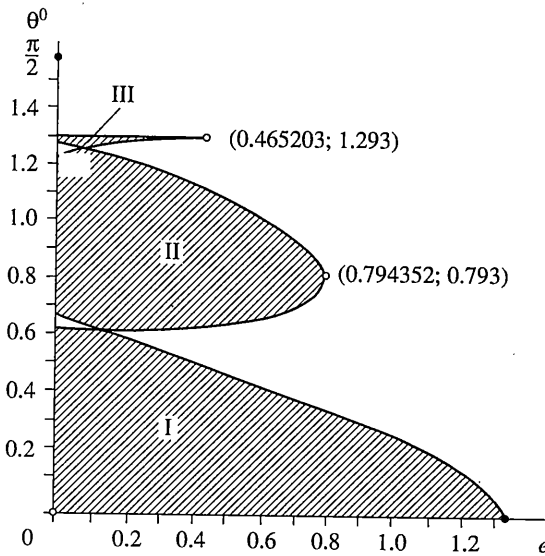
Представляет интерес получить график упомянутых выше зон непосредственно в координатах e и θ^0 , учитывая, что

$$\Theta = \cos^2 \theta^0, \quad z = \lambda^2 \quad (11.1)$$

При этом движение твердого тела будет устойчивым, если прямая, параллельная оси Oz , пересекает график функции $\Theta_{\pm}(z; e)$ в трех точках, имеющих неотрицательные значения z , т.е. вещественные значения λ . Исходя из этого замечания, приступим к построению зон устойчивости.



Фиг. 14



Фиг. 15

Из анализа графика функции $\Theta(z; e)$ следует, что существуют три зоны устойчивого движения тела, а именно:

I зона имеет место для всех рассматриваемых значений параметра e ;

II зона – при $e \in [0, e^*]$;

III зона, самая узкая и короткая, – для $e \in [0, \bar{e}]$.

Здесь, как уже упоминалось ранее, $\bar{e} = 0.465203$ и $e^* = 0.794352$. Перейдем к построению графика устойчивости движения тела в параметрах e и θ^0 . Для этого зафиксируем $e = e_0$, положив вначале $e_0 = 0$. Определим вначале границы зон устойчивости. Нижняя граница первой зоны устойчивости есть $\theta^0 = 0$. Верхняя граница соответствует $\min \Theta_-(z; e_0)$, где $z \in [z_4, z^*]$. Напомним, что здесь через z_1, z_2, z_3 и z_4 обозначены

действительные корни функции $\Delta(z; e)$, взятые в порядке возрастания, z^* – наибольший корень функции $A_0(z; e)$. Таким образом

$$\theta^0 = \arccos(\sqrt{\min \Theta_-(z; e_0)}) = \arccos \sqrt{M_4}$$

Для второй зоны устойчивости нижняя граница определяется выражением

$$\theta^0 = \arccos(\sqrt{\max \Theta_+(z; e_0)}) = \arccos \sqrt{M_3}$$

а верхняя граница – из условия

$$\theta^0 = \arccos(\sqrt{\min \Theta_-(z; e_0)}) = \arccos \sqrt{M_2}$$

причем $z \in [z_2, z_3]$.

И, наконец, для третьей зоны устойчивости нижняя граница находится из условия

$$\theta^0 = \arccos(\sqrt{\max \Theta_+(z; e_0)}) = \arccos \sqrt{M_1}, \quad z \in [0, z_1]$$

а верхняя – из выражения

$$\theta^0 = \arccos(\sqrt{\Theta_+(0; e_0)})$$

Определив граничные точки зон устойчивости, возьмем вместо e_0 $e_0 + \Delta e$ (мы брали $\Delta e = 0.01$ для $e \in [0, 0.2]$ и $\Delta e = 0.02$ для $e \in (0.2, 1.333333)$) и повторим эту процедуру (определение границ зон устойчивости) до тех пор, пока $e < 4/3$. Разумеется, границы второй и третьей зон устойчивости искались только для тех значений параметра e , где эти зоны существуют.

В результате проведенных построений была получена картина распределения устойчивости исследуемой формы стационарного движения тела в параметрах e, θ^0 , изображенная на фиг. 15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугаенко Г.О., Велігоцький Г.Г. Форми динамічної рівноваги однієї механічної системи // Наук. зап. Черкаськ. пед. ін-ту. 1963. Т. 17. С. 21–37.
2. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
3. Пилькевич А.М., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Устойчивость одной из форм стационарного движения твердого тела, подвешенного на "короткой" струне: Препринт № 2. Киев: ИМ НАНУ, 1999. 52 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. Темченко М.Е. Об устойчивости одного из положений динамического равновесия одной механической системы // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 1. С. 50–52.
6. Скимель В.Н. К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 130–132.
7. Четаев Н.Г. Устойчивость движения: Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 532 с.
8. Стороженко В.А., Шуман Б.М. Исследование гироскопической устойчивости одной из форм стационарного движения твердого тела на струне. Препринт № 91–32; Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. 34 с.
9. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. Об устойчивости вращения на струне твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 30–41.
10. Темченко М.Е. Об исследовании критериев устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела и волчка при наличии у них эллипсоидальной полости, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 26–31.
11. Мейман Н.Н. Некоторые вопросы расположения нулей полиномов. // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. Вып. 6. С. 154–188.

Киев

Поступила в редакцию
29.06.1999