МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

УДК 624.07:534.1

© 2001 г. С.Э. ЗАЙЦЕВ, О.Н. ТУШЕВ

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ АДДИТИВНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ВИБРАЦИЙ НА ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача анализа влияния высокочастотных случайных вибраций различной природы (аддитивные и параметрические) на "медленное движение" системы, которая совместно с устройствами подвески и другими элементами может быть описана обыкновенным векторным дифференциальным уравнением. Считается, что внешние воздействия стационарные или нестационарные определены в рамках корреляционной теории. Решение ищется на основе представления вектора фазовых координат системы в форме интегростепенного ряда по матрице, содержащей случайные вибрации. При ограничении квадратическим приближением для мультипликативных составляющих, в результате получается удобная явная зависимость относительно элементов корреляционной матрицы вибраций, что позволяет выявить "вклад" каждой из них в динамическое поведение системы.
Результаты иллюстрируются примером.

Эффект, связанный с воздействием высокочастотных аддитивных и параметрических вибраций на динамическую систему, хорошо изучен. Классическим примером этому является "увод" маятника при "быстрой" синусоидальной вибрации его подвески. Чаще всего при этом рассматриваются уравнения Матье или Хилла с правой частью. Подобные результаты получены и для случайных стационарных вибраций. Таким образом, для простых систем и стационарных воздействий этот эффект достаточно просто описывается качественно и количественно. Существенные трудности возникают, когда система имеет много степеней свободы при наличии нескольких случайных вибраций, стационарных или, что еще значительно сложнее – нестационарных.

Для задачи виброзащиты механических объектов некоторых типов, например измерительных приборов, имеющих динамически активные элементы, рассматриваемая здесь постановка имеет особое значение. Может оказаться, что вибрация не приводит к катастрофическим последствиям, т.е., например, ускорения и перемещения находятся в заданных допусках даже с большими запасами, но при этом функциональные свойства приборов существенно нарушаются. Чаще это проявляется в появлении ложного сигнала. Величина этого сигнала радикально зависит от "настройки" параметров системы амортизации. С расчетной точки зрения важно не только определить ложный сигнал, но и оценить "вклад" в него каждой из вибраций.

В настоящей статье предлагается достаточно общий подход к решению рассматриваемого класса задач, позволяющий во многом обойти указанные выше трудности и ответить на вопросы, возникающие при разработке виброзащиты. Заметим, что по существу излагаемый здесь аппарат пригоден для анализа динамики более широкого круга систем.

Будем считать, что динамика изучаемой системы описывается векторным дифференциальным уравнением в форме Коши:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{X} + \mathbf{A}_1(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{1}$$

где $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор фазовых координат, $\mathbf{A}_1(t)$ – вектор случайных аддитивных воздействий, $\mathbf{A}_2(t)$ – матрица случайных мультипликативных воздействий.

Произведем формальные преобразования неоднородного уравнения (1) к однородному путем расширения размерности фазового пространства на единицу. Для этого дополним (1) тривиальным скалярным уравнением $\dot{x}_{n+1} = 0$ и $x_{n+1}(t_0) = 1$.

Тогда, оставив прежнее обозначение для вектора фазовых координат, получим

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_2(t) & \mathbf{A}_1(t) \\ \mathbf{0} & 0 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

где $\mathbf{G}(t)$ – блочная матрица, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})^T$, $\mathbf{X}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, 1)^T$, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots 0)$ – нулевая строка.

Для удобства обозначений будем считать, что элементы матрицы $\mathbf{A}_2(t)$ $a_{ij}(t)\forall i, j$ и векторы $\mathbf{A}_1(t)$ $a_i(t)\forall i$ составляют единый вектор $\mathbf{A}(t)$ с элементами $a_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, m$; $m = n^2 + n$). При этом элементы с номерами $n^2 + 1, \ldots, m$ соответствуют аддитивным возмущениям.

Будем считать, что для вектора $\mathbf{A}(t)$ заданы: $\mathbf{M}_A(t)$-вектор математических ожиданий и $\mathbf{K}_A(t, t')$-матрица корреляционных функций.

Запишем решение (2) в виде:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G})\mathbf{X}_0 \tag{3}$$

где $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G})$ – фундаментальная матрица, определяемая на интервале времени $[t_0, t]$.

Разобьем матрицу $\mathbf{G}(t)$ на две, одна из которых $\mathbf{G}_0(t)$ зависит только от математических ожиданий, а вторая $\mathbf{R}(t)$ от центрированных составляющих

$$\mathbf{G}_0(t) = \begin{Vmatrix} \mathbf{M}_2(t) & \mathbf{M}_1(t) \\ \mathbf{0} & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{R}_0(t) = \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_2^0(t) & \mathbf{A}_1^0(t) \\ \mathbf{0} & 0 \end{Vmatrix}$$

где $\mathbf{M}_1(t)$, $\mathbf{M}_2(t)$ – вектор и матрица математических ожиданий аддитивных и мультипликативных возмущений.

Теперь воспользуемся известным преобразованием фундаментальной матрицы от суммы двух матриц коэффициентов [1]. Тогда получим

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{D})\mathbf{X}_0 \tag{4}$$

$$\mathbf{D}(t) = \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\right]^{-1}\mathbf{R}(t)\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0) \tag{5}$$

В [1] показано, что любую фундаментальную матрицу можно разложить в интегростепенной ряд. При этом он абсолютно и равномерно сходится на любом замкнутом интервале изменения аргумента t, если элементы матрицы коэффициентов ограничены и интегрируемы по Риману.

После разложения $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{D})$ в такой ряд (4) трансформируется к виду:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\left[\mathbf{E} + \int_{t_0}^{t}\mathbf{D}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\mathbf{D}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{D}(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 + \ldots\right]\mathbf{X}_0 \tag{6}$$

Ограничимся в (6) тремя членами, что соответствует квадратическому приближению.

В рассматриваемом здесь случае представляет интерес "медленное" движение системы, которое определяется математическим ожиданием. Осреднение (6) с учетом того, что $\langle \mathbf{D}(t)\rangle \equiv 0$ приводит к следующему соотношению:

$$\mathbf{M}_x(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\left[\mathbf{E} + \left\langle \int_{t_0}^{t} \mathbf{D}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\mathbf{D}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \right\rangle\right]\mathbf{X}_0 \tag{7}$$

Преобразуем теперь формальное равенство (7) и представим вектор $\mathbf{M}_x(t)$ в виде явной зависимости от элементов матрицы $\mathbf{K}_A(t, t')$. Для этого используем понятие "матричной единицы" $\mathbf{I}_{jk}$, которой называется матрица со всеми нулевыми элементами за исключением элемента с номером "j, k", равного единице. Понятно, что это не зависит от принятой нумерации элементов в матрице, например, при сквозной построчной $\mathbf{I}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). Разложим $\mathbf{D}(t)$ по матричным единицам с нумерацией, принятой при формировании $\mathbf{K}_A(t, t')$, тогда получим

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j^0(t)\mathbf{H}_j(t) \tag{8}$$

$$\mathbf{H}_j(t) = \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\right]^{-1}\mathbf{I}_j\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0) \tag{9}$$

После подстановки (9) в (7), несложных преобразований и осреднения имеем

$$\mathbf{M}_x(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\left[\mathbf{E} + \sum_{j,k}\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}_j(\tau_2)\int_{t_0}^{t}k_{jk}^A(\tau_1,\tau_2)\mathbf{H}_k(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2\right]\mathbf{X}_0 \tag{10}$$

где выполняются следующие условия суммирования:

$$\text{если } j \leqslant n^2, \text{ то } k = 1, 2, \ldots, m; \quad \text{если } j > n^2, \text{ то } k = 1, 2, \ldots, n^2 \tag{11}$$

Условия (11) исключают из суммы в (10) элементы блока корреляционной матрицы $\mathbf{K}_A(t, t')$, соответствующие аддитивным воздействиям. Коэффициенты при этих корреляционных функциях заведомо тождественно равны нулю в силу линейности рассматриваемой системы.

Удобство соотношения (10) заключается в том, что дает возможность оценить "вклад" каждой из корреляционных и взаимокорреляционных функций матрицы $\mathbf{K}_A(t, t')$, что позволяет установить иерархию их влияния на общий результат.

Коротко остановимся на вычислительных аспектах полученных соотношений. Численная реализация (10) наиболее удобна, если трактовать фундаментальную матрицу $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G})$ как мультипликативный интеграл [1]. Допустим, имеется однородное линейное уравнение

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}_0(t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 \tag{12}$$

Как указывалось ранее, фундаментальная матрица уравнения (12) представляется в форме сходящегося ряда

$$\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^{t}\mathbf{G}_0(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^{t}\mathbf{G}_0(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{G}_0(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 + \ldots \tag{13}$$

В [2] показано, что уравнению $\dot{\mathbf{Z}} = -\mathbf{Z}\mathbf{G}_0(t)$, $\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0$, где $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ соответствует фундаментальное решение $\left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\right]^{-1}$, которое разлагается в знакопеременный интегростепенной ряд с такими же условиями сходимости, что и у (13):

$$\left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G}_0)\right]^{-1} = \mathbf{E} - \int_{t_0}^{t}\mathbf{G}_0(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{G}_0(\tau_2)\mathbf{G}_0(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 - \ldots \tag{14}$$

Если $\mathbf{G}_0(T) = \mathbf{G}_0 = \mathrm{const}$, соотношения (13) и (14) преобразуются в матричные экспоненты

$$\left.\begin{aligned} \exp(\mathbf{G}_0 t) &= \mathbf{E} + \mathbf{G}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{G}_0^2(t - t_0)^2 + \ldots \\ \exp(-\mathbf{G}_0 t) &= \mathbf{E} - \mathbf{G}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{G}_0^2(t - t_0)^2 - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Рекуррентную связь между значениями фундаментальных матриц в моменты времени t и $t + \Delta$ (Δ – шаг по времени) можно установить следующим образом:

$$\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta}(\mathbf{G}_0) = \mathbf{\Omega}_{t}^{t+\Delta}(\mathbf{G}_0)\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{G}_0)$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta}(\mathbf{G}_0)\right]^{-1} = \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{G}_0)\right]^{-1}\left[\mathbf{\Omega}_{t}^{t+\Delta}(\mathbf{G}_0)\right]^{-1}$$

При этом

$$\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t_0}(\mathbf{G}_0) = \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t_0}(\mathbf{G}_0)\right]^{-1} = \mathbf{E}$$

Тогда, считая, что шаг Δ достаточно мал, чтобы принять $\mathbf{G}_0(t)$ постоянной на интервале $[t, t + \Delta]$, а в разложении (15) ограничиться только линейным приближением, получим фундаментальные матрицы участков в виде

$$\mathbf{\Omega}_{t}^{t+\Delta}(\mathbf{G}_0) \cong \mathbf{E} + \mathbf{G}_0(t)\Delta \tag{16}$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{t}^{t+\Delta}(\mathbf{G}_0)\right]^{-1} \cong \mathbf{E} - \mathbf{G}_0(t)\Delta \tag{17}$$

Для уточнения решения на интервале $[t, t + \Delta]$ можно использовать в разложениях члены более высокого порядка малости, например $\frac{1}{2}\mathbf{G}_0^2(t)\Delta^2$.

Если использовать линейное приближение, т.е. соотношения (16), (17), то процедура полностью соответствует методу интегрирования первого порядка. Поскольку переход к очередному моменту времени осуществляется умножением матриц, то получаемый в результате интеграл называется мультипликативным [1].

В качестве примера рассмотрим систему, имеющую следующее описание:

$$T^2\ddot{x} + 2\xi T\dot{x} + [1 + a_2^0(t)]x = a_1(t) \tag{18}$$

$$T_1\dot{a}_2^0 + a_2^0 = ha_1^0(t) \tag{19}$$

где T, T_1 – постоянные времени, $a_2^0(t)$ – центрированные мультипликативные воздействия, $a_1(t)$ – аддитивное воздействие, представляющее собой белый шум с математическим ожиданием в виде ступенчатой функции $1(t–t_0)$.

Здесь (18) является уравнением такой же структуры, как уравнение Матье, а (19) устанавливает связь между аддитивной и мультипликативной составляющими.

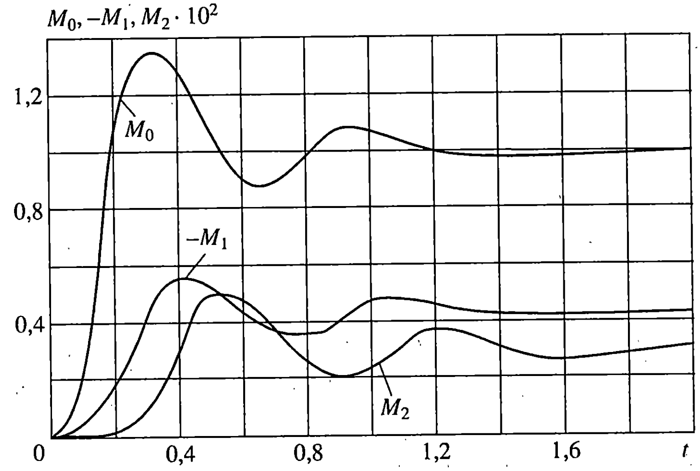
Такая постановка задачи является типичной для анализа динамики чувствительных элементов, например, маятникового акселерометра, при действии на них случайных вибрационных нагрузок. При этом параметры T_1 и h определяют условия закрепления прибора.

Решение уравнения (19) позволяет получить корреляционную функцию мультипликативного воздействия $K_{11}(t, t')$ и взаимокорреляционную функцию $a_1^0(t)$ и $a_2^0(t)$ в виде:

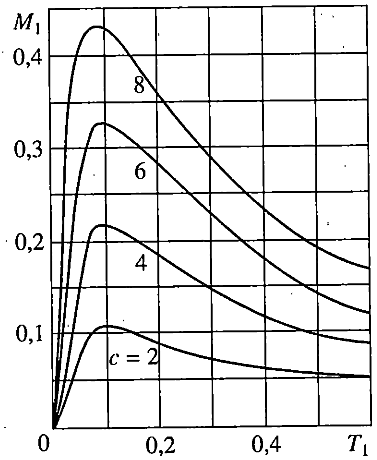
$$k_{11}(t - t') = \frac{ch^2}{2T_1}\exp\left(-\frac{|t - t'|}{T_1}\right)$$

$$k_{12}(t - t') = \frac{ch}{T_1}\exp\left(-\frac{|t - t'|}{T_1}\right)$$

В расчетах были приняты следующие значения параметров: $T = 0.1$, $\xi = 0.3$, $h^2 = 2 \cdot 10^{-4}$. На фиг. 1 для $c = 0.8$, $T = 0.1$ представлены: номинальное решение M_0 ("полезный сигнал") при $a_1^0(t) = a_2^0(t) \equiv 0$; "увод" показаний прибора вследствие вибраций, состоящих из двух компонент M_1 и M_2. При этом M_1 определяется корреляционной функцией мультипликативной составляющей, а M_2 – взаимной корреляцией $a_1(t)$ и $a_2^0(t)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Видно, что последняя по сравнению с "чистым" влиянием $a_2^0(t)$ пренебрежимо мала. На фиг. 2 изображены зависимости M_1 от T_1 в установившемся режиме. Кривые носят ярко выраженный "резонансный" характер; максимум достигается при $T = T_1$. Таким образом, система амортизации кроме обычных требований, которые к ней предъявляются [3] должна обеспечивать отстройку от этой крайне неблагоприятной точки.

Работа выполнена по гранту INTAS № 97-1140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
3. Вибрации в технике / Под ред. В.Н. Челомея. М.: Машиностроение, 1981. 456 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.10.1999