

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. Г.И. КОЛОСОВ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предлагается метод исследования вибраций слоистых оболочек вращения с анизотропией общего вида. На его основе проводится сравнение результатов расчета частот и форм собственных свободных колебаний одно-, двух-, трех- и многослойных оболочек из высокомолекулярного графито-эпоксидного композита по гетерогенной и гомогенной моделям.

Значительный интерес к теоретическому анализу оболочек из волокнистых композиционных материалов связан со все большим их применением в различных отраслях машиностроения. По широкому кругу вопросов динамики оболочек с различного вида симметрией расположения слоев, а также многослойных оболочек из ортотропных материалов в случае, когда оси ортотропии совпадают с главными осями кривизны оболочки, имеется обширная литература, библиографию по которой можно найти, например, в монографиях [1, 2]. Однако лишь в отдельных работах делались шаги к решению задачи о колебаниях слоистых оболочек с анизотропией общего вида [3–5].

Колебания цилиндрических оболочек с произвольной укладкой слоев изучались в [3], однако точные результаты были представлены лишь для ортотропных оболочек; для анизотропных оболочек развит приближенный метод, в соответствии с которым используется комбинация двух собственных форм колебаний "винтового" типа. Решение задачи о вибрации цилиндрической неоднородной оболочки с симметричной относительно к образующей намоткой ортотропного материала приведено в работе [4]. Здесь отличными от нуля были сохранены лишь два из шести коэффициентов, характеризующих взаимовлияние растяжения и кручения, изгиба и кручения. Работа [5] содержит анализ динамических характеристик слоистых цилиндрических оболочек с ортотропией общего вида, где предусмотрена возможность произвольной ориентации армирующих волокон в пределах каждого слоя. Результаты вычислений получены на основе стандартной конечно-разностной процедуры, однако их достоверность вызывает сомнение в силу того, что для ряда граничных условий при частных видах анизотропии они противоречат результатам, получаемым другими способами.

Трудность решения общей задачи о колебаниях оболочек с анизотропией общего вида обусловлена необходимостью учета коэффициентов взаимовлияния "растяжение–кручение–изгиб" в физических соотношениях, что приводит к разрешающим уравнениям вдвое большей, чем во всех практически значимых частных случаях, размерности, а также с решением задачи о нахождении корней знакопостоянного неаналитического детерминантного частотного уравнения.

В данной работе показано, что эти трудности успешно преодолеваются, если для решения однородной краевой задачи, формулируемой при исследовании динамических характеристик оболочек вращения произвольного очертания с анизотропией общего вида, используется метод ортогональной прогонки, а при локализации нулей возникающего частотного уравнения применяется принцип аргумента. Надежность предложенного метода подтверждена расчетами цилиндрических оболочек из высоко-модульного графито-эпоксидного композита с различным числом слоев и различными углами их ориентации по отношению к образующей цилиндра по гетерогенной и гомогенной моделям.

Рассматриваются тонкие оболочки вращения, составленные из произвольного числа близких по механическим характеристикам слоев. Считается, что материал каждого из таких слоев представляет собою совокупность однонаправленных волокон или тканый слой с ортогональной укладкой нитей основы и утка. Закон Гука для отдельного слоя с ориентацией волокон под углом φ_i относительно оси записывается в виде [6]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^i \\ \sigma_{22}^i \\ \sigma_{12}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i \\ A_{12}^i & A_{22}^i & A_{23}^i \\ A_{13}^i & A_{23}^i & A_{33}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(z) \\ \varepsilon_{22}(z) \\ \varepsilon_{12}(z) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A_{11}^i = E_{11}^i \cos^4 \varphi_i + E_{22}^i \sin^4 \varphi_i + 2(E_{11}^i \nu_{21}^i + 2G_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i$$

$$A_{22}^i = E_{22}^i \cos^4 \varphi_i + E_{11}^i \sin^4 \varphi_i + 2(E_{11}^i \nu_{21}^i + 2G_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i$$

$$A_{12}^i = E_{11}^i \nu_{21}^i + [E_{11}^i + E_{22}^i - 2(E_{11}^i \nu_{21}^i + 2G_{12}^i)] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i$$

$$A_{13}^i = [E_{11}^i \cos^2 \varphi_i - E_{22}^i \sin^2 \varphi_i - (E_{11}^i \nu_{21}^i + 2G_{12}^i) \cos 2\varphi_i] \sin_i \varphi \cos_i \varphi$$

$$A_{23}^i = [E_{11}^i \sin^2 \varphi_i - E_{22}^i \cos^2 \varphi_i + (E_{11}^i \nu_{21}^i + 2G_{12}^i) \cos 2\varphi_i] \sin_i \varphi \cos_i \varphi$$

$$A_{33}^i = (E_{11}^i + E_{22}^i - 2E_{11}^i \nu_{21}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^i \cos^2 2\varphi_i$$

$$E_{11}^i = E_1^i / (1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i); \quad E_{22}^i = E_2^i / (1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i)$$

где E_1^i , E_2^i – модули упругости i -го слоя в направлениях, совпадающих с осями ортогоotropии материала; G_{12}^i – модуль сдвига в плоскости слоя, ν_{12}^i и ν_{21}^i – коэффициенты Пуассона, причем $E_1^i \nu_{21}^i = E_2^i \nu_{12}^i$.

В силу (1) соотношения между приведенными усилиями \mathbf{N} и моментами \mathbf{M} , с одной стороны, и деформациями ε и изменениями кривизн χ поверхности приведения с другой, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2)$$

Здесь элементы симметричных матриц жесткостей \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} размерности 3×3 определяются выражениями

$$(B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}) = \int A_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Считая выполненными гипотезы Кирхгофа – Лява для описания напряженно-деформированного состояния оболочки вращения, возникающего при малых свободных гармонических колебаниях, используем линеаризованные соотношения геометрически нелинейной теории тонких оболочек в форме В.В. Новожилова в том виде, как

они представлены в [7], используя при этом в качестве физических соотношений выражения (2).

Решение задачи будем искать в форме

$$\begin{aligned} F(x, \beta, t) &= [F^{(1)}(x) \cos(n\beta) + F^{(2)}(x) \sin(n\beta)] \sin(\omega t) \\ G(x, \beta, t) &= [G^{(1)}(x) \sin(n\beta) + G^{(2)}(x) \cos(n\beta)] \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

где F и G означают одну из компонент напряженно-деформированного состояния в оболочке

$$\begin{aligned} F &= \{u, w, \theta_1, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \chi_{11}, \chi_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}\}, \\ G &= \{v, \theta_2, \varepsilon_{12}, \tau, S, H, Q_{22}\} \end{aligned} \quad (4)$$

Представление параметров (4) в виде (3) в уравнениях движения, геометрических и физических соотношениях приводит к системе из 38 уравнений для амплитудных функций, среди которых 16 дифференциальных и 22 алгебраических соотношения.

Естественные краевые условия на каждом из торцов оболочки представляются в виде

$$\begin{aligned} S^{(1)} + 2H^{(1)} / R_2 = S^{(2)} + 2H^{(2)} / R_2 = 0 \quad \text{или} \quad v^{(1)} = v^{(2)} = 0 \\ M^{(1)} = M^{(2)} = 0 \quad \text{или} \quad \theta_1^{(1)} = \theta_1^{(2)} = 0 \\ T_{11}^{(1)} = T_{11}^{(2)} = 0 \quad \text{или} \quad u^{(1)} = u^{(2)} = 0 \\ Q_{11}^{(1)} + nH^{(1)} = Q_{11}^{(2)} - nH^{(2)} = 0 \quad \text{или} \quad w^{(1)} = w^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Вводя вектор y с компонентами, входящими в краевые условия (5):

$$\begin{aligned} y = \{S^{(1)} + 2H^{(1)} / R_2, M^{(1)}, T_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(1)} + nH^{(1)}, v^{(1)}, \theta_1^{(1)}, u^{(1)}, w^{(1)} \\ S^{(2)} + 2H^{(2)} / R_2, M^{(2)}, T_{11}^{(2)}, Q_{11}^{(2)} - nH^{(2)}, v^{(2)}, \theta_1^{(2)}, u^{(2)}, \omega^{(2)}\} \end{aligned}$$

и выражая все остальные амплитудные функции с помощью имеющихся алгебраических соотношений через его компоненты, приходим к разрешающей системе линейных однородных дифференциальных уравнений вида

$$dy / dx = f(x, n, \omega_n, y) \quad (6)$$

Значения ω_n , при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи (5), (6), определяют спектр частот слоистой оболочки вращения.

Система уравнений (6) распадается на две независимые системы по 8 уравнений в каждой во всех тех случаях, когда одновременно все жесткостные коэффициенты $B_{13}, B_{23}, C_{13}, C_{23}, D_{13}, D_{23}$ равны нулю, что физически соответствует возможности деформации оболочки при растяжении или изгибе без кручения. При этом каждая из систем содержит однотипные виды амплитудных функций, то есть либо $\{F^{(1)}, G^{(1)}\}$, либо $\{F^{(2)}, G^{(2)}\}$. Выражения, входящие в правые части этих систем, обладают тем свойством, что любая из них может быть получена из другой путем формальной замены параметра числа волн в окружном направлении n на $-n$.

Сформулированная краевая задача (5), (6) решается на основе сведения двухточечной краевой задачи к задаче Коши и последующего численного интегрирования с использованием ортогонализации по С.К. Годунову [7]. Критерием существования нетривиального решения при этом является равенство нулю определителя восьмого порядка, элементы которого зависят от параметра частоты и вычисляются в ходе решения краевой задачи. Этот определитель является положительно определенной функцией параметра частоты, поэтому традиционно используемые методы поиска корней, основанные на смене знака исследуемой функции, оказываются неприемлемыми.

N	$\varphi = 0$	$\varphi = 15$	$\varphi = 30$	$\varphi = 45$	$\varphi = 60$	$\varphi = 75$	$\varphi = 90$
1	808 (8)	925 (7)	1135 (6)	1245 (5)	1225 (5)	1100 (4)	1015 (4)
2	808 (8)	1020 (9)	1230 (9)	1080 (7)	970 (6)	945 (5)	1015 (4)
3	808 (8)	1250 (10)	1550 (9)	1475 (6)	1310 (5)	1190 (5)	1015 (4)
4	808 (8)	1300 (9)	1610 (8)	1450 (6)	1270 (5)	1140 (5)	1015 (4)
5	808 (8)	1320 (9)	1645 (8)	1505 (6)	1320 (5)	1195 (5)	1015 (4)
6	808 (8)	1335 (9)	1655 (8)	1490 (6)	1300 (5)	1175 (5)	1015 (4)
>6	808 (8)	1350 (9)	1685 (8)	1520 (6)	1320 (5)	1200 (5)	1015 (4)

Приближенное расположение нулей частотного детерминанта $D(\omega)$ может быть определено путем выделения тех интервалов, на которых он имеет минимумы, после чего каждый из этих интервалов исследуется на наличие и число нулей функции $D(\omega)$. С этой целью в предположении, что $D(z)$ в рассматриваемой области является аналитической функцией комплексной переменной z , а все элементы определителя — линейными функциями этой переменной, осуществляется подсчет числа обходов начала координат функцией $D(z)$ в то время, когда z движется по контуру окружности с диаметром, равным длине рассматриваемого частотного интервала и с центром, расположенным в его середине. Число обходов согласно принципу аргумента будет равно числу нулей функции $D(\omega)$ на данном интервале.

Изложенным методом исследована зависимость минимальных собственных частот цилиндрических оболочек, выполненных из высокомолекулярного графито-эпоксидного композита. Механические характеристики для каждого из слоев принимались равными $E_1 = 3.1 \times 10^{11}$ Н/м², $E_2 = 6.2 \times 10^9$ Н/м², $G_{12} = 4.1 \times 10^9$ Н/м², $\nu_{12} = 0.26$, $\gamma = 1.6 \times 10^3$ кг/м³.

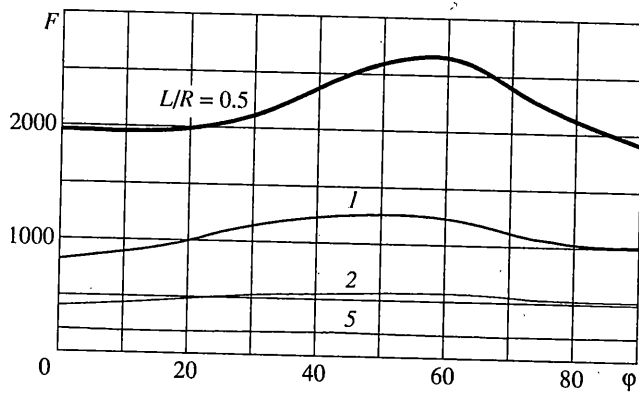
Толщины слоев однонаправленных волокон, уложенных под углами $\varphi_i = (-1)^i \varphi$ ($1 \leq i \leq N$) к образующей, принимались равными $h_i = h/N$, причем суммарная толщина оболочки h считалась неизменной во всех рассмотренных случаях.

На фиг. 1 приведены графики значений основных собственных частот F [Гц] однослойных оболочек со свободно опертыми торцами и различными углами ориентации волокон при значениях параметров $R/h = 100$ и $L/R = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$.

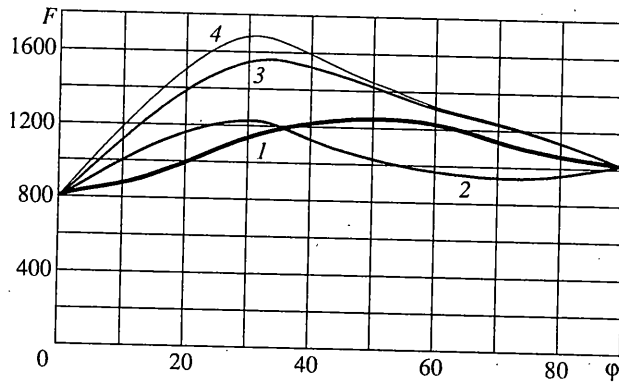
В табл. 1 представлены расчетные значения основной собственной частоты цилиндрических оболочек F [Гц], полученные при $R/h = 100$, $L/R = 1$, различных значениях числа слоев N и углов ориентации армирующих волокон φ в случае свободного опирания обоим ее торцов. В скобках указан номер n , соответствующий параметру волнообразования в окружном направлении. Величины частот при $N > 6$ определены с использованием методики работы [7] и модели эквивалентной гомогенной однослойной ортотропной оболочки, у которой оси ортотропии совпадают с линиями главных кривизн, а эквивалентные механические характеристики определены по соотношениям [6]:

$$E_1^* = A_{11} - \nu_{12}^* A_{12}, \quad E_2^* = A_{22} - \nu_{21}^* A_{12}, \quad G_{12}^* = A_{33} \quad (8)$$

$$\nu_{12}^* = A_{12} / A_{11}, \quad \nu_{21}^* = A_{12} / A_{22}$$



Фиг. 1



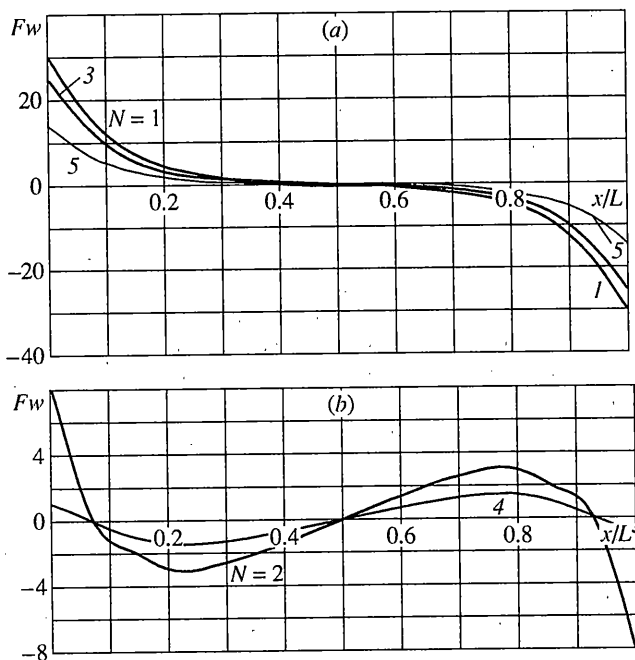
Фиг. 2

Графики значений минимальных собственных частот одно-, двух-, трех- и четырехслойных оболочек (кривые 1–4 соответственно) с послойным чередованием армирования в зависимости от углов ориентации композита приведены на фиг. 2. Отметим, что если для четырехслойной оболочки отличие ее основной частоты от минимальной собственной частоты эквивалентной гомогенной оболочки не превышало 5%, то для двухслойной оболочки это различие достигало 30%.

В ходе вычислений было подтверждено, что все собственные частоты являются двукратными нулями частотного детерминантного уравнения, а соответствующие кратным частотам компоненты форм собственных колебаний представимы в виде

$$\begin{aligned}
 u_i(x, \beta) &= Ru(x) \cos(n\beta - Fu(x) - \delta_{i2}\pi/2) \\
 v_{(i)}(x, \beta) &= Rv(x) \sin(n\beta + Fv(x) + \delta_{i2}\pi/2) \\
 w_{(i)}(x, \beta) &= Rw(x) \cos(n\beta - Fw(x) - \delta_{i2}\pi/2) \quad (i=1, 2, \delta_{12}=0, \delta_{22}=1)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Характер изменения вида фазовых функций в (9) от числа слоев композита N проиллюстрирован на фиг. 3 на примере фазовых функций нормального прогиба $Fw(x)$, полученных при углах армирования $\varphi = \pm 45^\circ$. На фиг. 3, *a* результаты представлены при нечетных значениях чисел слоев $N = 1, 3, 5$, а на фиг. 3, *b* – для оболочек с двумя и четырьмя слоями. При числе слоев $N \geq 6$ фазовые функции $Fw(x)$ практически тождественно равны нулю.



Фиг. 3

Представленные расчетные материалы подтверждают тот известный экспериментальный факт [8], что для цилиндрических оболочек с послойным чередованием армирования при числе слоев $N \geq 6$ расчет динамических характеристик можно проводить, заменяя слоистый композит на однородный ортотропный материал с эквивалентными механическими характеристиками.

Однако такой переход к расчету динамических характеристик по гомогенной модели для слоистых нецилиндрических оболочек может быть связан с их существенным завышением. В качестве примера приведем результаты расчета шестислойной оболочки вращения с переменной вдоль образующей суммарной толщиной $h(x)$. Оболочка получена путем укладки ортотропных слоев из материала с механическими характеристиками (7). Считалось, что каждый из слоев имеет в точке x одинаковую толщину $h(x)/6$. Слои укладывались под углами $\pm\varphi$ к меридиану так, что $\sin^2\varphi = (\mu/r)^2$.

Образующая оболочки вида $r(x) = r_0[1 - (x/x_0)^3]^{1/2}$ представляет собою одну из возможных форм образующей днища баллона давления, выполненного из композиционного материала [9]. В расчетах полагалось $r_0 = 1.2$ м, $x_0 = 0.72$ м, $x_1 = 0.7$ м, $h_0 = 5$ мм;

$$0 \leq x \leq x_1, \quad h(x) = r_0 h_0 / r(x), \quad \mu = 0.34161 \text{ м.}$$

Указанное значение величины μ соответствует углу намотки $\varphi = 90^\circ$ на контуре $x = x_1$.

На торцах $x = 0$ и $x = x_1$ требовалось выполнение граничных условий $u = v = w = M_{11} = 0$.

n	0	1	2	3	4
F [Гц]	162	259	325	387	447
$F_{\text{орт}}$ [Гц]	199	331	426	506	602

В табл. 2 представлены расчетные значения пяти низших собственных частот свободных колебаний рассматриваемой конструкции. Там же для сравнения приведены значения частот $F_{\text{орт}}$, полученных с помощью методики [7]. Расчет в последнем случае выполнялся для однослойной ортотропной оболочки с теми же геометрическими параметрами и граничными условиями, но механические характеристики эквивалентного ортотропного материала вычислялись по соотношениям (8).

Анализ представленных данных показывает, что расчет по гомогенной схеме привел в данном случае к завышению основной частоты на 23%, а последующих частот – на 28–35%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемых твердых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
3. Bert C.W., Baker J.L., Egle D.M. Free Vibrations of Multilayer Anisotropic Cylindrical Shells // J. Composite Materials. 1969. V. 3. P. 480–499.
4. Soldatos K.P. On the buckling and vibration of antisymmetric angleply laminated circular cylindrical shells // Intern. J. Eng. Sci. 1983. V. 21. No. 3. P. 217–222.
5. Greenberg J.B., Stavsky Y. Vibration of laminated filament-wound cylindrical shells // AIAA Journal. 1981. V. 19. No. 8. P. 1055–1062.
6. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
7. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
8. Заруцкий В.А., Телалов А.И. Колебания тонкостенных оболочек с конструктивными особенностями. Обзор экспериментальных исследований // Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 4. С. 3–9.
9. Иванов В.К. Безмоментное сопряжение цилиндрической части и днища баллона постоянного давления // Механика композитных материалов. 1986. № 6. С. 1064–1068.

Москва

Поступила в редакцию
28.04.1999