

УДК 531.3

© 2001 г. Е.А. ИВАНОВА

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Построено точное аналитическое решение задачи о свободном вращении осесимметричного твердого тела с учетом момента вязкого трения, линейно зависящего от угловой скорости тела. Решение представлено в форме экспоненциальных рядов.

1. Введение. Задача о вращательном движении абсолютно твердого тела в линейной вязкой среде давно привлекает внимание исследователей. Впервые эта задача была рассмотрена в [1] в следующей постановке: на абсолютно твердое тело, совершающее сферическое движение, действует момент сопротивления, пропорциональный вектору кинетического момента $\mathbf{M}_{vf} = -k\mathbf{L}$:

$$\dot{\mathbf{L}} = -k\mathbf{L} \quad (1.1)$$

Задача (1.1) допускает точное решение в квадратурах при произвольном тензоре инерции. В случае трансверсально-изотропного тензора инерции решение задачи (1.1) выражается через элементарные функции.

В работе Р. Граммеля [2] рассмотрена задача о вращательном движении осесимметричного тела в случае, когда момент вязкого трения пропорционален вектору угловой скорости $\mathbf{M}_{vf} = -k\boldsymbol{\omega}$:

$$(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega})' = -k\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_3 \mathbf{nn} + \theta_{12} (\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \quad (1.2)$$

В [2] определены проекции вектора угловой скорости на оси, жестко связанные с телом. Таким образом, задача (1.2) сведена к задаче Дарбу, решение которой в [2] не обсуждалось.

Момент линейного вязкого трения, зависящий не только от вектора угловой скорости, но и от величин, задающих положение тела в пространстве, впервые рассмотрен в [3]. В работе [3] задача вращения осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде сформулирована следующим образом:

$$(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega})' = -\mathbf{K}_{vf} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_3 \mathbf{nn} + \theta_{12} (\mathbf{E} - \mathbf{nn}), \quad \mathbf{K}_{vf} = k_3 \mathbf{nn} + k_{12} (\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \quad (1.3)$$

Задача (1.3), так же как и задача (1.2), сводится к решению задачи Дарбу. Следует отметить, что с математической точки зрения задача (1.3) ничем не сложнее задачи (1.2). Подчеркнем, что последнее утверждение справедливо только для трансверсально-изотропного тензора трения \mathbf{K}_{vf} . В случае произвольного тензора трения обсуждаемая задача существенным образом усложняется.

Момент трения вида $\mathbf{M}_{vf} = -\mathbf{K}_{vf} \cdot \boldsymbol{\omega}$, где тензор вязкого трения \mathbf{K}_{vf} соосен с тензо-

ром инерции тела, но не трансверсально изотропен, рассмотрен в [4, 5]. Постановка задачи, предложенная в [4] имеет вид

$$(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{K}_{yf} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_3 \mathbf{nn} + \theta_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}), \quad \mathbf{K}_{yf} = k_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{nn} \quad (1.4)$$

Задача (1.4) также может быть сведена к задаче Дарбу, однако проекции вектора угловой скорости на оси, связанные с телом, выражаются более сложными формулами, включающими функции Бесселя [4, 5].

В [4, 5] рассмотрена задача о вращении в линейно сопротивляющейся среде абсолютно твердого тела произвольной формы. Формулировка задачи имеет вид

$$(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{K}_{yf} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \theta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{K}_{yf} = k_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.5)$$

В работах [4, 5] получены асимптотические формулы для проекций вектора угловой скорости на главные оси инерции тела в предположении, что тензор инерции мало отличается от трансверсально-изотропного.

В работах [2–5] рассмотрены также задачи о движении абсолютно твердого тела в вязкой среде, в которых моменты, моделирующие сопротивление окружающей среды, включают в себя квадратичные по угловой скорости члены.

Различные модели взаимодействия окружающей среды с движущимся твердым телом обсуждаются в работах [6–8]. В этих работах содержится, в частности, обоснование того факта, что моментом трения вида

$$\mathbf{M}_{yf} = -\mathbf{K}_{yf} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_{yf} = k_3 \mathbf{nn} + k_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \quad (1.6)$$

можно описывать воздействие разряженной среды (типа верхних слоев атмосферы) на движущееся в ней тело при следующих условиях: поверхность тела выпуклая, оси динамической и геометрической симметрии совпадают и центр масс лежит на оси симметрии; центр масс тела неподвижен или, что то же самое, равна нулю скорость набегающего потока; угловая скорость тела достаточно мала, т.е. слагаемыми, содержащими квадрат угловой скорости, можно пренебречь в сравнении с членами, линейно зависящими от угловой скорости. Коэффициенты вязкого трения k_{12} , k_3 (постоянные величины) зависят от формы поверхности тела, а также от того, какая модель взаимодействия тела с окружающей средой используется при выводе данных интегральных характеристик [8]. Отметим также работу [9], в которой рассмотрена простая физическая модель, состоящая из тонких стержней и укрепленных на них шариков. Тензор инерции конструкции трансверсально изотропен. Конструкция движется в линейной вязкой среде, так что на каждый шарик действует сила вязкого трения $\mathbf{f}_i = -k\nu_i$. Показано, что суммарный момент сопротивления, вычисленный относительно центра масс, в точности соответствует формуле (1.6).

В настоящей работе исследуется задача (1.3). Кроме упоминавшейся выше работы [3], где данная задача сведена к решению задачи Дарбу, следует отметить также работу [9], в которой построено решение задачи (1.3) в квазикоординатах. Построенное решение сочетает в себе простоту формул с наглядностью представления результатов и позволяет достаточно полно судить о характере движения тела, хотя оно не является точным решением в классическом смысле. В [10] предложен метод построения точного решения задачи в форме равномерно сходящихся рядов. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [10].

2. Постановка задачи. Первые интегралы. Рассматривается свободное вращение твердого тела, закрепленного в центре масс. Тензор инерции тела трансверсально изотропен. Сопротивление окружающей среды моделируется моментом линейного вязкого трения вида (1.6), где тензор вязкого трения \mathbf{K}_{yf} соосен с тензором инерции тела. Уравнение движения тела выглядит так

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}_{yf}, \quad \mathbf{L} = (\theta_3 - \theta_{12})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{n} + \theta_{12}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M}_{yf} = -(k_3 - k_{12})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{n} - k_{12}\boldsymbol{\omega} \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{L} – вектор кинетического момента, \mathbf{n} – единичный вектор, определяющий направление оси симметрии тела в актуальной конфигурации. Для того, чтобы система (2.1) стала замкнутой, необходимо дополнить ее кинематическим соотношением Пуассона

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \quad (2.2)$$

Метод, связанный с использованием в качестве основных переменных вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и единичного вектора \mathbf{n} , определяющего направление оси динамической симметрии тела, впервые был предложен В.Ф. Журавлевым и весьма успешно применяется, например, при исследовании движения волчка Лагранжа [11]. Если известен вектор \mathbf{n} , то положение тела в пространстве определяется тензором поворота

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{P}(\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} = \mathbf{n}(0) \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ – тензор поворота, переводящий ось симметрии тела из начального положения в актуальное. Для него удобно использовать представление [12]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \mathbf{E} - \frac{1}{1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} + \mathbf{k})(\mathbf{n} + \mathbf{k}) + 2\mathbf{n}\mathbf{k} \quad (2.4)$$

Тензор $\mathbf{P}(\phi\mathbf{k})$ определяет поворот тела вокруг оси симметрии. Вектор угловой скорости, соответствующий тензору поворота (2.3), (2.4), имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} + \mathbf{k}) \times \dot{\mathbf{n}} + \dot{\phi}\mathbf{n} \quad (2.5)$$

Домножив (2.5) скалярно на \mathbf{n} , с учетом кинематического соотношения (2.2), получим выражение для $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}}{1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \quad (2.6)$$

Таким образом, если известны вектор угловой скорости и направление оси симметрии тела, определение тензора поворота тела сводится к вычислению одной квадратуры.

Система дифференциальных уравнений (2.1), (2.2) имеет два независимых первых интеграла [3]:

$$\omega \cos \gamma = \omega_0 \cos \gamma_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = k_3 / \theta_3, \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}|, \quad \cos \gamma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} / \omega \quad (2.7)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 [\cos^2 \gamma_0 e^{-2\lambda t} + \sin^2 \gamma_0 e^{-2\mu t}], \quad \mu = k_{12} / \theta_{12} \quad (2.8)$$

$$\omega_0 = \omega(0), \quad \gamma_0 = \gamma(0)$$

Следствием первых интегралов (2.7), (2.8) является выражение для модуля кинетического момента, которое будет использовано в ходе дальнейшего решения задачи,

$$L^2 = \omega_0^2 [\theta_3^2 \cos^2 \gamma_0 e^{-2\lambda t} + \theta_{12}^2 \sin^2 \gamma_0 e^{-2\mu t}] \quad (2.9)$$

и выражение для тангенса угла между вектором угловой скорости и осью симметрии тела,

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma_0 e^{(\lambda - \mu)t} \quad (2.10)$$

элементарный анализ которого позволяет судить о характере движения тела при больших временах. А именно, при $t \rightarrow +\infty$ в случае $\lambda < \mu$ $\operatorname{tg} \gamma \rightarrow 0$, что означает совпадение вектора угловой скорости с направлением оси симметрии тела; в случае $\lambda > \mu$ $\operatorname{tg} \gamma \rightarrow +\infty$, в результате чего вектор угловой скорости и ось симметрии тела становятся перпендикулярными.

3. Частные решения. Задача (2.1), (2.2) имеет три частных решения, выражающихся через элементарные функции.

1. $k_3/\theta_3 = k_{12}/\theta_{12}$ ($\lambda = \mu$). В этом случае тензор вязкого трения пропорционален тензору инерции тела $\mathbf{K}_{vf} = \lambda \boldsymbol{\theta}$, а момент трения, соответственно, пропорционален вектору кинетического момента $\mathbf{M}_{vf} = -\lambda \mathbf{L}$. Тогда уравнение движения принимает вид (1.1). Не останавливаясь подробно на решении этой задачи, приведем только окончательный результат:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 e^{-\lambda t}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{P}(\psi \mathbf{l}) \cdot \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega} = e^{-\lambda t} \mathbf{P}(\psi \mathbf{l}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \psi = (L_0 / \theta_{12}) e^{-\lambda t} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{n}(0), \quad L_0 = |\mathbf{L}_0|, \quad \mathbf{l} = \mathbf{L}_0 / |\mathbf{L}_0|$$

Движение тела происходит "почти как в случае Эйлера": ось симметрии тела вращается вокруг постоянного по направлению вектора кинетического момента, причем угол между осью симметрии тела и вектором кинетического момента сохраняется неизменным; кроме того, тело вращается вокруг оси симметрии согласно формуле (2.6). Отличие от случая Эйлера заключается в том, что угловые скорости прецессии и собственного вращения не постоянны, а убывают по экспоненте.

2. В начальный момент времени направление вектора угловой скорости совпадает с направлением оси симметрии тела $\gamma_0 = 0$. В этом случае, согласно формуле (2.10), $\sin \gamma = 0$ и уравнение движения (2.1) принимает вид

$$\theta_3 \dot{\boldsymbol{\omega}} = -k_3 \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{n} \quad (3.2)$$

Решение системы (3.2) выглядит так

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{n} e^{-\lambda t}, \quad \mathbf{n} = \text{const} \quad (3.3)$$

Таким образом, ось симметрии тела остается неподвижной, а тело вращается вокруг оси симметрии, замедляясь по экспоненциальному закону.

3. В начальный момент времени вектор угловой скорости перпендикулярен оси симметрии тела: $\gamma_0 = \pi/2$. Тогда, согласно формуле (2.7), $\cos \gamma = 0$ и задача (2.1), (2.2) принимает вид

$$\theta_{12} \dot{\boldsymbol{\omega}} = -k_{12} \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \quad (3.4)$$

Решение системы (3.4) выглядит так

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 e^{-\mu t}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{P}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{k}, \quad \psi = \omega_0 e^{-\mu t} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{n}(0), \quad \omega_0 = |\boldsymbol{\omega}_0|, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\omega}_0 / |\boldsymbol{\omega}_0|$$

Движение тела представляет собой замедляющееся по экспоненте вращение вокруг фиксированной оси, направление которой определяется направлением вектора угловой скорости в начальный момент времени, при этом ось симметрии тела всегда остается перпендикулярной оси вращения.

4. Выбор основных переменных. Уравнение для кинетического момента. Ниже обсуждается решение системы уравнений (2.1), (2.2) при произвольных начальных условиях и любых параметрах задачи. Частные случаи, рассмотренные в п. 3 ($\lambda = \mu$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_0 = \pi/2$), исключаются. В качестве основной переменной выбирается вектор кинетического момента \mathbf{L} . Такой выбор обусловлен следующими соображениями. Уравнения движения (2.1), после исключения \mathbf{M}_{vf} , с учетом первого интеграла (2.7), принимают вид

$$\dot{\mathbf{L}} = -(k_3 - k_{12}) \omega_0 \cos \gamma_0 e^{-\lambda t} \mathbf{n} - k_{12} \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{L} = (\theta_3 - \theta_{12}) \omega_0 \cos \gamma_0 e^{-\lambda t} \mathbf{n} + \theta_{12} \boldsymbol{\omega} \quad (4.1)$$

Решив систему (4.1) относительно векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{n} , получим формулы, выражающие

вектор угловой скорости ω и единичный вектор \mathbf{n} , характеризующий движение оси симметрии тела, через вектор кинетического момента

$$\omega = \frac{1}{(\lambda - \mu)\theta_3\theta_{12}} [(\theta_3 - \theta_{12})\dot{\mathbf{L}} + (k_3 - k_{12})\mathbf{L}] \quad (4.2)$$

$$\mathbf{n} = -\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - \mu)\theta_3\omega_0 \cos \gamma_0} [\dot{\mathbf{L}} + \mu\mathbf{L}] \quad (4.3)$$

Таким образом, если вектор кинетического момента известен, все величины, характеризующие движение твердого тела, определяются без дополнительного интегрирования, согласно формулам (4.2), (4.3), (2.6).

Вывод дифференциального уравнения для кинетического момента основан на использовании кинематического соотношения (2.2). Подставив выражения (4.2), (4.3) в уравнение (2.2) и проведя элементарные преобразования, получим

$$\ddot{\mathbf{L}} + (\lambda + \mu)\dot{\mathbf{L}} + \lambda\mu\mathbf{L} = \theta_{12}^{-1}\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{L}} \quad (4.4)$$

Начальные условия для уравнения (4.4) имеют вид

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \quad \dot{\mathbf{L}}(0) = \dot{\mathbf{L}}_0 \quad (4.5)$$

Путем несложных преобразований (нужно продифференцировать (4.4), домножить (4.4) на коэффициент $\lambda + \mu$, умножить (4.4) слева векторно на $\theta_{12}^{-1}\mathbf{L}$, а затем сложить полученные уравнения), (4.4) приводится к уравнению третьего порядка

$$\ddot{\mathbf{L}} + 2(\lambda + \mu)\dot{\mathbf{L}} + [(\lambda + \mu)^2 + \lambda\mu + \theta_{12}^{-2}L^2]\dot{\mathbf{L}} + [\lambda\mu(\lambda + \mu) - \frac{1}{2}\theta_{12}^{-2}(L^2)']\mathbf{L} = 0 \quad (4.6)$$

которое, с учетом выражения для модуля кинетического момента (2.9), можно рассматривать как линейное уравнение с переменными коэффициентами. Начальными условиями для уравнения (4.6) являются начальные условия (4.5) и уравнение (4.4) при $t = 0$:

$$\dot{\mathbf{L}}(0) = -(\lambda + \mu)\dot{\mathbf{L}}_0 - \lambda\mu\mathbf{L}_0 + \theta_{12}^{-1}\mathbf{L}_0 \times \dot{\mathbf{L}}_0 \quad (4.7)$$

Докажем тождественность уравнения (4.4) и задачи (4.6), (4.7). Так как уравнение (4.6) и начальные условия (4.7) получены из уравнения (4.4) путем следственного перехода, решение задачи (4.6), (4.7) включает в себя общее решение уравнения (4.4). Докажем, что решением задачи (4.6), (4.7) являются только те функции, которые удовлетворяют уравнению (4.4). Введя обозначение

$$\mathbf{U} \doteq \ddot{\mathbf{L}} + (\lambda + \mu)\dot{\mathbf{L}} + \lambda\mu\mathbf{L} - \theta_{12}^{-1}\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{L}} \quad (4.8)$$

перепишем задачу (4.6), (4.7) в виде

$$\dot{\mathbf{U}} + (\lambda + \mu)\mathbf{U} + \theta_{12}^{-1}\mathbf{L} \times \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U}(0) = 0 \quad (4.9)$$

Следствием задачи (4.9) является задача Коши

$$\frac{1}{2}(U^2)' + (\lambda + \mu)U^2 = 0, \quad U^2(0) = 0 \quad (4.10)$$

единственное решение которой $U^2 \equiv 0$. Следовательно $\mathbf{U} \equiv 0$, что эквивалентно уравнению (4.4). Утверждение доказано.

5. Полнота системы экспоненциальных функций. Решение уравнения для кинетического момента (4.6) предлагается искать в виде ряда по убывающим степеням экспонент

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}_n e^{-n\mu t} \quad (5.1)$$

Докажем полноту системы функций

$$1, e^{-vt}, e^{-2vt}, e^{-3vt}, \dots \quad (5.2)$$

на полубесконечном интервале $[0, +\infty)$ по отношению к классу функций $f_*(t)$, таких, что интегралы

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_*(t)e^{-vt} dt, \int_{\alpha}^{\beta} f_*^2(t)e^{-vt} dt \quad (5.3)$$

$\forall \alpha, \beta \in [0, +\infty)$ существуют. Проведя стандартную процедуру ортогонализации системы (5.2) на интервале $t \in [0, +\infty)$ с весом e^{-vt} , получим систему функций, которая представляется посредством полиномов Лежандра

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots; x = 2e^{-vt} - 1 \quad (x|_{t=0}=1, x|_{t=\infty}=-1) \quad (5.4)$$

Известно, что полиномы Лежандра являются полной системой функций на интервале $x \in [-1, 1]$ по отношению к классу функций $f(x)$, таких, что интегралы $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b f^2(x)dx \quad \forall a, b \in [-1, 1]$ существуют. Переходя от переменной x к переменной t , получаем

$$\int_a^b f(x)dx = 2v \int_{\alpha}^{\beta} f_*(t)e^{-vt} dt, \int_a^b f^2(x)dx = 2v \int_{\alpha}^{\beta} f_*^2(t)e^{-vt} dt \quad (5.5)$$

$$f_*(t) = f(2e^{-vt} - 1), \alpha = -\frac{1}{v} \ln \frac{b+1}{2}, \beta = -\frac{1}{v} \ln \frac{a+1}{2}$$

Система функций (5.4) является полной на интервале $t \in [0, +\infty)$ по отношению к классу функций $f_*(t)$, таких, что интегралы (5.3) $\forall \alpha, \beta \in [0, +\infty)$ существуют. Следовательно, исходная система функций (5.2) также является полной на интервале $[0, +\infty)$ по отношению к указанному выше классу функций $f_*(t)$.

Покажем, что вектор кинетического момента $\mathbf{L}(t)$ принадлежит классу функций $f_*(t)$. Представим вектор $\mathbf{L}(t)$ в виде разложения по осям декартовой системы координат

$$\mathbf{L}(t) = L_1(t)\mathbf{i} + L_2(t)\mathbf{j} + L_3(t)\mathbf{k} \quad (5.6)$$

Легко показать, что из формул (5.6), (2.9) вытекают следующие оценки

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} L_i(t)e^{-vt} dt \right| \leq \frac{\omega_0 \sqrt{\theta_3^2 \cos^2 \gamma_0 + \theta_{12}^2 \sin^2 \gamma_0}}{\min\{\lambda, \mu\} + v} [e^{-(\min\{\lambda, \mu\} + v)\alpha} - e^{-(\min\{\lambda, \mu\} + v)\beta}] \quad (5.7)$$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} L_i^2(t)e^{-vt} dt \right| \leq \frac{\omega_0^2 (\theta_3^2 \cos^2 \gamma_0 + \theta_{12}^2 \sin^2 \gamma_0)}{2 \min\{\lambda, \mu\} + v} [e^{-(2 \min\{\lambda, \mu\} + v)\alpha} - e^{-(2 \min\{\lambda, \mu\} + v)\beta}]$$

Согласно оценкам (5.7), интегралы $\int_{\alpha}^{\beta} L_i(t)e^{-vt} dt, \int_{\alpha}^{\beta} L_i^2(t)e^{-vt} dt$ ограничены $\forall \alpha, \beta \in [0, +\infty)$, что доказывает принадлежность вектора $\mathbf{L}(t)$ классу функций $f_*(t)$. Таким образом, доказано, что решение уравнения (4.6) может быть представлено в виде ряда (5.1), при условии, что этот ряд будет равномерно сходиться вместе с необходимым числом первых производных.

6. Решение уравнения для кинетического момента в случае, когда отношение λ/μ — рациональное число. Представленное ниже решение уравнения (4.6) в строгом смысле является частным решением, так как оно существует только при определенном соотношении параметров задачи, а именно, когда отношение λ/μ — рациональное число.

Вместе с тем, для практических целей представленное ниже решение может использоваться всегда, поскольку при любых λ и μ найдутся такие целые числа p и q и действительное число ν , что величины λ и μ будут выражаться через них со сколь угодно малой погрешностью

$$\lambda = p\nu, \quad \mu = q\nu \quad (6.1)$$

Итак, решение уравнения (4.6) будем искать в виде ряда по степеням экспонент (5.1). Подставив (5.1) в уравнение (4.6) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях экспонент, получим следующие результаты:

$$L(t) = A \sum_{n=p}^{\infty} C_n^{(1)} e^{-n\nu t} + B \sum_{n=q}^{\infty} C_n^{(2)} e^{-n\nu t} + D \sum_{n=p+q}^{\infty} C_n^{(3)} e^{-n\nu t} \quad (6.2)$$

Коэффициенты $C_n^{(i)}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$C_p^{(1)} = 1, \quad C_q^{(2)} = 1, \quad C_{p+q}^{(3)} = 1, \quad C_n^{(i)} = -\frac{\kappa_1^2(n-3p)C_{n-2p}^{(i)} + \kappa_2^2(n-3q)C_{n-2q}^{(i)}}{\nu^2(n-p)(n-q)(n-p-q)} \quad (6.3)$$

$$\kappa_1 = \omega_0 \theta_3 \cos \gamma_0 / \theta_{12}, \quad \kappa_2 = \omega_0 \sin \gamma_0$$

Коэффициенты A, B, D определяются из начальных условий (4.5), (4.7).

Доказательство равномерной сходимости рядов (6.2) и их первых трех производных сводится к следующему. Рассмотрим ряды, составленные из модулей коэффициентов $C_n^{(i)}$:

$$R_i = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n^{(i)}| \quad (6.4)$$

и ряд сравнения

$$R_* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^*, \quad C_n^* = C_* \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2l} \rfloor} \frac{1}{n-2(k-1)l}, \quad l = \max\{p, q\} \quad (6.5)$$

Очевидно, что всегда найдется достаточно большое число n_* , что при $n \geq n_*$:

$$\max \left\{ \left| \frac{\kappa_1^2(n-3p)}{\nu^2(n-p)(n-q)(n-p-q)} \right|, \left| \frac{\kappa_2^2(n-3q)}{\nu^2(n-p)(n-q)(n-p-q)} \right| \right\} \leq \frac{1}{2(n+2l)}$$

и для любого n_* найдется такое достаточно большое положительное число C_* , что при $n \leq n_*$: $|C_n^{(i)}| \leq C_n^*$. Тогда при $n \geq n_*$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} |C_n^{(i)}| &\leq \frac{1}{2(n+2l)} (|C_{n-2p}^{(i)}| + |C_{n-2q}^{(i)}|) \leq \\ &\leq \frac{C_*}{2(n+2l)} \left(\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2p}{2l} \rfloor} \frac{1}{n-2p-2(k-1)l} + \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2q}{2l} \rfloor} \frac{1}{n-2q-2(k-1)l} \right) \leq \\ &\leq \frac{C_*}{2(n+2l)} \left(\prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2p}{2l} \rfloor} \frac{1}{n-2kl} + \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2q}{2l} \rfloor} \frac{1}{n-2kl} \right) \leq \\ &\leq \frac{C_*}{n+2l} \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2l} \rfloor - 1} \frac{1}{n-2kl} = C_* \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2l} \rfloor} \frac{1}{n-2(k-1)l} = C_n^* \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно большом C_* ряд (6.5) является мажорантой рядов (6.4). Так как ряд (6.5) сходится, ряды (6.4) также являются сходящимися. Следовательно, числовые ряды $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^{(1)}$, $\sum_{n=q}^{\infty} C_n^{(2)}$, $\sum_{n=p+q}^{\infty} C_n^{(3)}$ сходятся абсолютно, а соответствующие им функциональные ряды (6.2) сходятся равномерно на интервале $t \in [0, +\infty)$. Для доказательства равномерной сходимости первых трех производных рядов (6.2), достаточно доказать сходимость числовых рядов

$$R_i^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} (vn)^j |C_n^{(i)}| \quad (j=1,2,3) \quad (6.6)$$

Очевидно, что ряды $R_*^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} (vn)^j C_n^*$, являющиеся мажорантами рядов (6.7), сходятся. Итак, доказательство равномерной сходимости рядов (6.2) и их первых производных завершено.

Нестрогий асимптотический анализ решения (6.2), (4.2), (4.3) при больших t позволил сделать следующие выводы относительно движения единичных векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{l} , определяющих, соответственно, направление оси симметрии тела, вектора угловой скорости и вектора кинетического момента ($\mathbf{m} = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$, $\mathbf{l} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$):

$$\lambda < \mu: \quad \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{A}/|\mathbf{A}|, \quad \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{A}/|\mathbf{A}|, \quad \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{A}/|\mathbf{A}| \quad (6.7)$$

$$\lambda > \mu: \quad \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{A}/|\mathbf{A}|, \quad \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{B}/|\mathbf{B}|, \quad \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{B}/|\mathbf{B}| \quad (6.8)$$

Результаты численного решения задачи, приведенные ниже, подтверждают результаты асимптотического анализа.

7. Решение уравнения для кинетического момента при произвольных λ и μ . При произвольных значениях параметров λ и μ решение уравнения (4.6) будем искать в виде двойного ряда

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} e^{-(n\lambda+m\mu)t} \quad (7.1)$$

Подставив двойной ряд (7.1) в уравнение (4.6) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях экспонент, получим следующие результаты

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{A}R_{10}(t) + \mathbf{B}R_{01}(t) + \mathbf{D}R_{11}(t), \quad R_{pq}(t) = \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{m=q}^{\infty} C_{nm} e^{-(n\lambda+m\mu)t}$$

$$p = 1, \quad q = 0 \rightarrow n - \text{нечетные}, m - \text{четные}$$

$$p = 0, \quad q = 1 \rightarrow n - \text{четные}, m - \text{нечетные} \quad (7.2)$$

$$p = 1, \quad q = 1 \rightarrow n, m - \text{нечетные}$$

Коэффициенты C_{nm} вычисляются по рекуррентным формулам

$$C_{10} = 1, \quad C_{01} = 1, \quad C_{11} = 1; \quad C_{n0} = 0, \quad n \geq 1; \quad C_{0m} = 0, \quad m \geq 1$$

$$C_{n1} = -\frac{\kappa_1^2 C_{n-2,1} [(n-3)\lambda + \mu]}{n(n-1)\lambda^2 [(n-1)\lambda + \mu]}, \quad C_{1m} = -\frac{\kappa_2^2 C_{1,m-2} [\lambda + (m-3)\mu]}{m(m-1)\mu^2 [\lambda + (m-1)\mu]} \quad (7.3)$$

$$C_{nm} = -\frac{\kappa_1^2 C_{n-2,m} [(n-3)\lambda + m\mu] + \kappa_2^2 C_{n,m-2} [n\lambda + (m-3)\mu]}{[(n-1)\lambda + (m-1)\mu][(n\lambda + m\mu][(n-1)\lambda + (m-1)\mu] + \lambda\mu]}, \quad n \geq 2, \quad m \geq 2$$

Произвольные постоянные \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{D} определяются из начальных условий (4.5), (4.7). Доказательство равномерной сходимости рядов $R_{10}(t)$, $R_{01}(t)$, $R_{11}(t)$ и их первых

производных можно найти в [10]. Асимптотическое поведение решения (7.2), (4.2), (4.3) при больших t определяется формулами (6.7), (6.8), где векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют смысл коэффициентов в формуле (7.2).

Таким образом, общее решение уравнения (4.6) выражается формулами (7.2), (7.3). Очевидным недостатком этого решения является то, что оно включает в себя кратные ряды, наличие которых ухудшает сходимостъ и усложняет вычислительную процедуру. В связи с этим, общее решение (7.2), (7.3) имеет чисто теоретическое значение. На практике удобнее пользоваться частным решением (6.2), (6.3), приближенно считая отношение λ/μ рациональным числом.

8. Численный анализ решения при различных параметрах задачи. Объектом исследования являются годографы единичных векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} , характеризующих соответственно направления оси симметрии тела, вектора угловой скорости и вектора кинетического момента. Основными параметрами задачи, изменение которых качественным образом меняет вид траекторий концов векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{l} на единичной сфере, являются следующие величины:

$$\delta = \lambda/\mu, \quad \varepsilon = \omega_0 / \min\{\lambda, \mu\}, \quad \gamma_0$$

1. Общий характер движения. Зависимость от параметра δ . При любых параметрах задачи годографы векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{l} представляют собой спирали на единичной сфере, которые при увеличении t скручиваются или раскручиваются, стремясь при $t \rightarrow +\infty$ к некоторым точкам, положение которых определяется начальными условиями (фиг. 1, 2). Параметр δ делит множество решений задачи (4.2), (4.3), (7.2) на два класса.

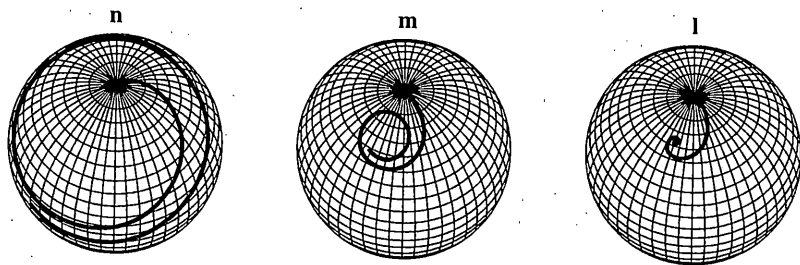
I. При $\delta < 1$ годографами векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{l} являются скручивающиеся спирали, стремящиеся при $t \rightarrow +\infty$ к одной и той же точке, положение которой на единичной сфере определяется направлением вектора \mathbf{A} (фиг. 1).

II. При $\delta > 1$ годограф вектора \mathbf{n} представляет собой раскручивающуюся спираль, стремящуюся при $t \rightarrow +\infty$ к точке, положение которой определяется вектором \mathbf{A} ; годографами векторов \mathbf{m} и \mathbf{l} также являются раскручивающиеся спирали, стремящиеся при $t \rightarrow +\infty$ к другой точке, положение которой на единичной сфере определяется направлением вектора \mathbf{B} (фиг. 2).

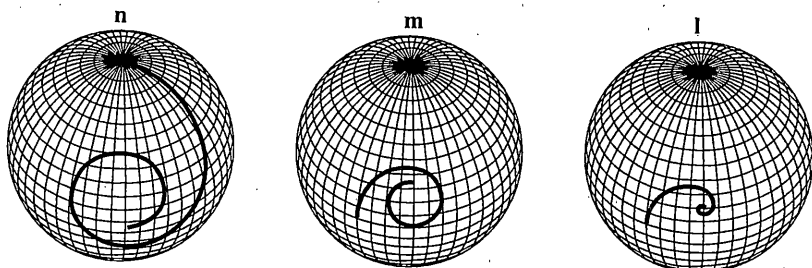
При $\delta = 1$ решение в форме (4.2), (4.3), (7.2) не существует. Изменение параметра δ в пределах $\delta \in (0, 1)$ и $\delta \in (1, +\infty)$ не оказывает существенного влияния на характер движения тела.

2. Зависимость от параметра $\varepsilon = \omega_0/\min\{\lambda, \mu\}$. На фиг. 3 (случай $\delta < 1$) и фиг. 4 (случай $\delta > 1$) изображены годографы вектора \mathbf{n} при различных значениях параметра ε . Из рисунков видно, что рост ε приводит к увеличению числа витков спирали; при этом площадь той части сферы, на которой располагается траектория, практически не изменяется. Если при постоянном значении ε уменьшается наименьший из параметров λ , μ и соответственно уменьшается начальная угловая скорость ω_0 , то время движения тела до того момента, когда направление вектора \mathbf{n} "почти" совпадет с направлением вектора \mathbf{A} , будет увеличиваться. Все сказанное можно дословно повторить в отношении векторов \mathbf{m} и \mathbf{l} .

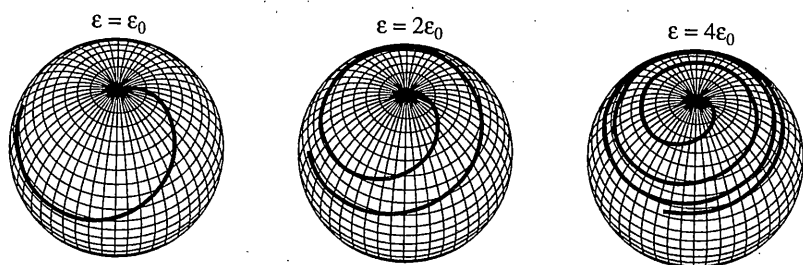
3. Зависимость от параметра γ_0 . На фиг. 5 (случай $\delta < 1$) и фиг. 6 (случай $\delta > 1$) изображены годографы вектора \mathbf{n} при различных значениях γ_0 . Как видно из рисунков, параметр γ_0 определяет площадь той части сферы, на которой располагается траектория: эта площадь увеличивается с ростом γ_0 в случае $\delta < 1$ и уменьшается с ростом γ_0 в случае $\delta > 1$. Для векторов \mathbf{m} и \mathbf{l} справедливо все сказанное выше в отношении вектора \mathbf{n} , с той лишь поправкой, что область, занимаемая годографами векторов \mathbf{m} и \mathbf{l} мала во всех случаях, за исключением γ_0 близких к $\pi/2$ при $\delta < 1$ и γ_0 близких к 0 при $\delta > 1$.



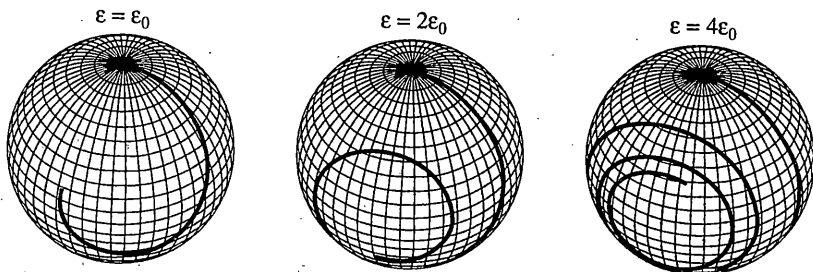
Фиг. 1



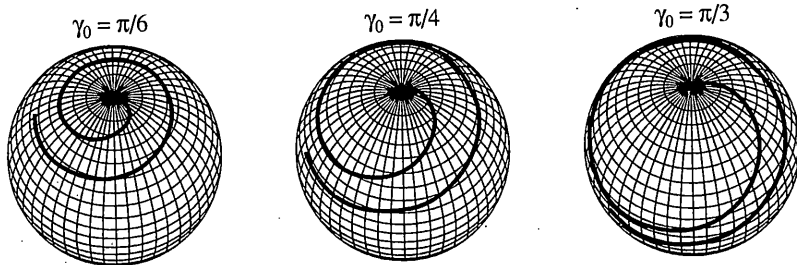
Фиг. 2



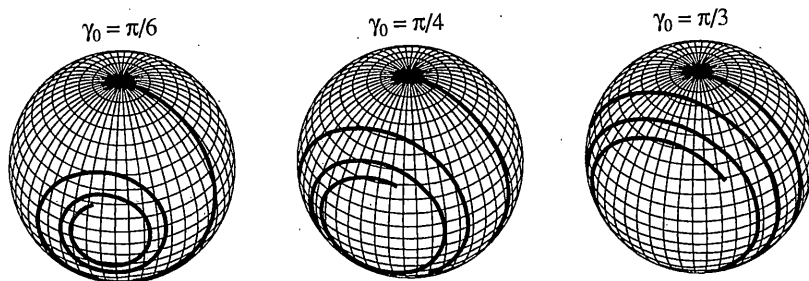
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

В заключение этого пункта следует отметить, что непосредственной зависимости характера движения тела от соотношения моментов инерции θ_3 и θ_{12} не наблюдается.

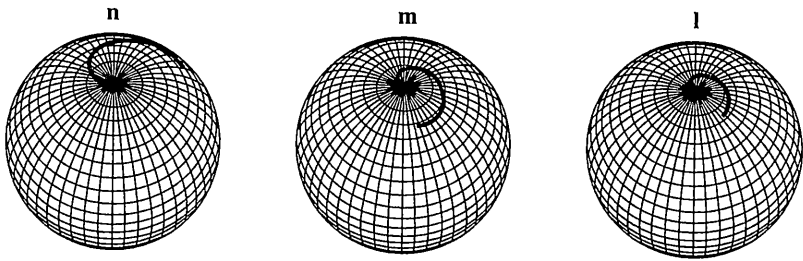
9. Решение задачи в случае $k_3 = 0$. Наиболее интересным с практической точки зрения является случай, когда составляющая момента трения вдоль оси симметрии тела равна нулю. В этом случае естественно ожидать, что движение тела будет стремиться к перманентному вращению вокруг оси симметрии. Покажем, что это действительно так. В случае $k_3 = 0$ в первых интегралах (2.7), (2.8) и в выражении для кинетического момента (2.9) следует положить $\lambda = 0$. Тогда, при $t \rightarrow +\infty$ модули угловой скорости и кинетического момента будут стремиться к постоянным величинам $\omega^2 \rightarrow \omega_0^2 \cos^2 \gamma_0$, $L^2 \rightarrow \theta_3^2 \omega_0^2 \cos^2 \gamma_0$, а угол между вектором угловой скорости и осью симметрии тела — к нулю, в результате чего движение тела будет асимптотически приближаться к перманентному вращению вокруг оси симметрии.

Уравнение для кинетического момента (4.6) при условии $\lambda = 0$ принимает вид

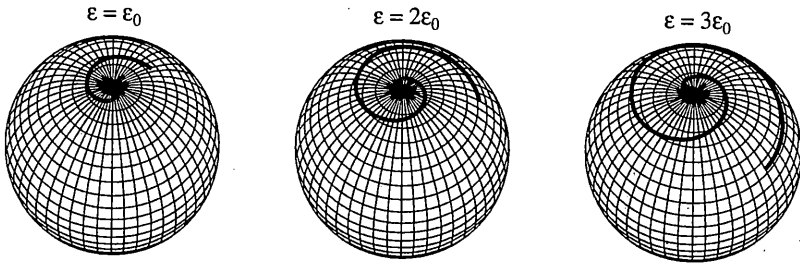
$$\ddot{\mathbf{L}} + 2\mu\dot{\mathbf{L}} + [\mu^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 e^{-2\mu t}] \mathbf{L} + \mu\kappa_2^2 e^{-2\mu t} \mathbf{L} = 0 \quad (9.1)$$

Поскольку тело при $t \rightarrow +\infty$ не будет стремиться к состоянию покоя, то совершенно очевидно, что решение должно включать в себя кроме экспоненциально убывающих, еще и тригонометрические функции; при этом ясно, что тригонометрические функции не должны зависеть от параметра μ , характеризующего сопротивление среды. Решение уравнения (9.1) предлагается искать в форме

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{A} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(1)} e^{-(n\mu + i\kappa_1)t} + \mathbf{B} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)} e^{-(n\mu - i\kappa_1)t} + \mathbf{D} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} e^{-n\mu t} \quad (9.2)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

Подставив выражение (9.2) в уравнение (9.1) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях экспонент, получим следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 L(t) = & (D_1 \cos \kappa_1 t - D_2 \sin \kappa_1 t) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} C_n e^{-n\mu t} + \\
 & + (D_1 \sin \kappa_1 t + D_2 \cos \kappa_1 t) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} C_n e^{-n\mu t} + D \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} e^{-n\mu t}
 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Здесь $C_1 = 1$, $C_0^{(3)} = 1$; коэффициенты C_n , $C_n^{(3)}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$C_n = -\frac{\kappa_2^2 [(n-3)\mu + i\kappa_1] C_{n-2}}{(n\mu + i\kappa_1)(n-1)\mu [(n-1)\mu + 2i\kappa_1]}, \quad C_n^{(3)} = -\frac{\kappa_2^2 (n-3) C_{n-2}^{(3)}}{n[(n-1)\mu^2 + \kappa_1^2]} \quad (9.4)$$

Равномерная сходимость рядов (9.3), (9.4) и их первых трех производных очевидна. Произвольные постоянные D_1 , D_2 , D определяются из начальных условий (4.5), (4.7). Вектор угловой скорости ω и единичный вектор \mathbf{n} , определяющий направление оси симметрии тела вычисляются по формулам (4.2), (4.3), где параметры k_3 и λ полагаются равными нулю. Асимптотическое поведение решения при больших t определяется следующими формулами:

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{D}, \quad \omega \rightarrow \frac{1}{\theta_3} \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \rightarrow \frac{\mathbf{D}}{\theta_3 \omega_0 \cos \gamma_0} \quad (9.5)$$

На фиг. 7 изображены годографы \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} . Сравнение фиг. 7 с фиг. 1 показывает, что качественного различия траекторий при $\lambda = 0$ и в случае $0 < \delta < 1$ не наблюдается. Зависимость от параметров γ_0 и ε (в данном случае $\varepsilon = \omega_0/\mu$) при $\lambda = 0$ такая же, как

в случае $0 < \delta < 1$: при увеличении γ_0 увеличивается площадь, занимаемая траекторией, а при увеличении ε увеличивается число витков траектории. Следует отметить, однако, что в случае $\lambda = 0$ увеличение параметра ε (см. фиг. 8) может привести к увеличению занимаемой траекториями площади. (Этого эффекта не наблюдалось при $0 < \delta < 1$.) Единственным принципиальным отличием случая $\lambda = 0$ от случая $0 < \delta < 1$ является то, что при $\lambda = 0$ полярный момент инерции θ_3 играет роль третьего основного параметра задачи, изменение которого качественно влияет на вид годографов векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} . Как видно из фиг. 9, где изображены годографы вектора \mathbf{n} при различных значениях θ_3 , увеличение этого параметра приводит к увеличению числа витков спирали с одновременным уменьшением занимаемой траекториями площади.

10. Решение задачи в случае $k_{12} = 0$. С математической точки зрения случай $k_{12} = 0$ ничем не отличается от случая $k_3 = 0$. Уравнение для кинетического момента (4.6) при условии $\mu = 0$ совпадает с уравнением (9.1), полученным в предположении $\lambda = 0$, с точностью до обозначения входящих в него констант

$$\ddot{\mathbf{L}} + 2\lambda\dot{\mathbf{L}} + [\lambda^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1^2 e^{-2\lambda t}] \dot{\mathbf{L}} + \lambda\kappa_1^2 e^{-2\lambda t} \mathbf{L} = 0 \quad (10.1)$$

Решение уравнения (10.1) получается из формул (9.3), (9.4) путем замены в них κ_1 на κ_2 , κ_2 на κ_1 и μ на λ :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) = & (\mathbf{D}_1 \cos \kappa_2 t - \mathbf{D}_2 \sin \kappa_2 t) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} C_n e^{-n\lambda t} + \\ & + (\mathbf{D}_1 \sin \kappa_2 t + \mathbf{D}_2 \cos \kappa_2 t) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} C_n e^{-n\lambda t} + \mathbf{D} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} e^{-n\lambda t} \end{aligned} \quad (10.2)$$

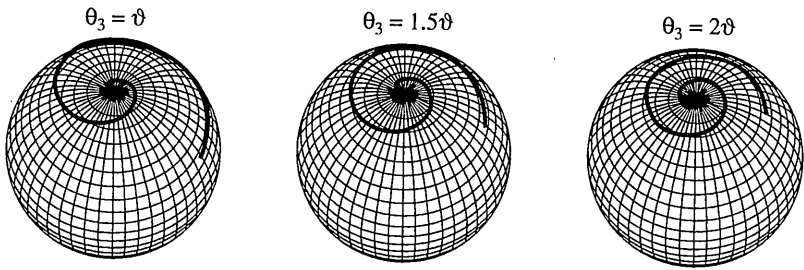
Здесь $C_1 = 1$, $C_0^{(3)} = 1$; коэффициенты C_n , $C_n^{(3)}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$C_n = -\frac{\kappa_1^2 [(n-3)\lambda + i\kappa_2] C_{n-2}}{(n\lambda + i\kappa_2)(n-1)\lambda [(n-1)\lambda + 2i\kappa_2]}, \quad C_n^{(3)} = -\frac{\kappa_1^2 (n-3) C_{n-2}^{(3)}}{n[(n-1)\lambda^2 + \kappa_2^2]} \quad (10.3)$$

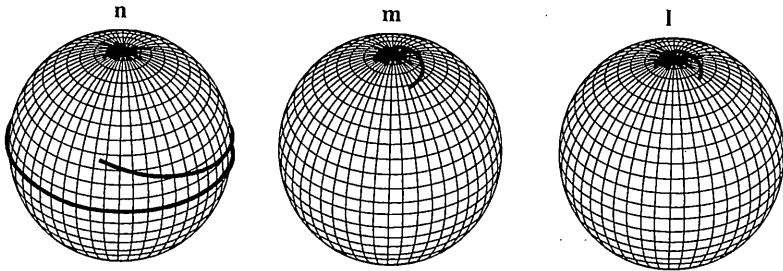
Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и единичный вектор \mathbf{n} , определяющий направление оси симметрии тела, вычисляются по формулам (4.2), (4.3), где параметры k_{12} и μ полагаются равными нулю. Асимптотическое поведение решения при больших t выглядит следующим образом. При $t \rightarrow +\infty$ модули угловой скорости и кинетического момента стремятся к постоянным величинам $\omega^2 \rightarrow \omega_0^2 \sin^2 \gamma_0$, $L^2 \rightarrow \theta_{12}^2 \omega_0^2 \sin^2 \gamma_0$; угол между вектором угловой скорости и осью симметрии тела — к $\pi/2$; направления векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{L} — к постоянному вектору \mathbf{D} , определяемому из начальных условий; движение оси симметрии тела асимптотически приближается к вращению с постоянной угловой скоростью $\kappa_2 = \omega_0 \sin \gamma_0$ в плоскости, натянутой на постоянные векторы \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 , направление которых определяется начальными условиями:

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{D}, \quad \boldsymbol{\omega} \rightarrow \frac{\mathbf{D}}{\theta_{12}}, \quad \mathbf{n} \rightarrow \frac{(\lambda \mathbf{D}_1 + \kappa_2 \mathbf{D}_2) \cos \kappa_2 t + (\kappa_2 \mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{D}_2) \sin \kappa_2 t}{\theta_3 \omega_0 \cos \gamma_0} \quad (10.4)$$

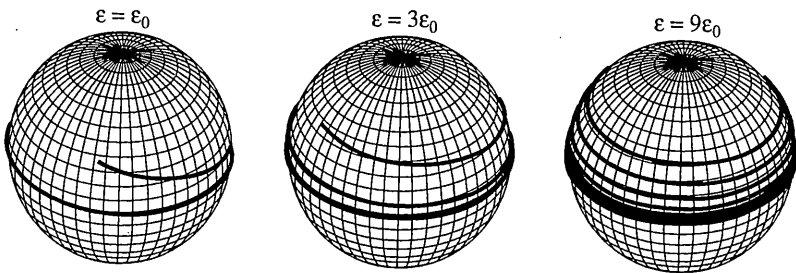
Таким образом, при больших t движение тела асимптотически приближается к перманентному вращению вокруг оси, направление которой определяется вектором \mathbf{D} ; при этом движение оси симметрии тела становится близким к равномерному вращению в плоскости, ортогональной оси вращения тела \mathbf{D} .



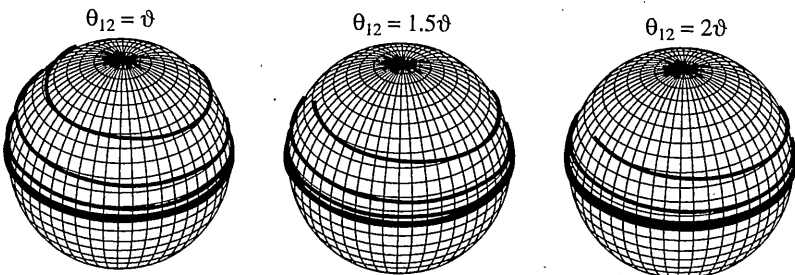
Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

На фиг. 10 изображены годографы векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} . Сравнение фиг. 10 и фиг. 2 показывает, что движение тела при $\mu = 0$ очень похоже на движение тела в случае $1 < \delta < +\infty$. Единственным существенным отличием является тот факт, что все спирали, изображенные на фиг. 2 имеют конечную длину, так как раскручиваясь стремятся к некоторым предельным точкам, а годограф вектора \mathbf{n} , изображенный на фиг. 10, представляет собой спираль бесконечной длины, которая раскручиваясь делает бесконечное число витков вблизи большой окружности единичной сферы. В случае $\mu = 0$ (так же как и при $\lambda = 0$) существует три основных параметра, изменение которых качественно меняет вид годографов векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} . Этими параметрами являются величины γ_0 , $\varepsilon = \omega_0/\lambda$ и θ_{12} . Зависимость от параметра γ_0 при $\mu = 0$ такая же, как и в случае $1 < \delta < +\infty$: увеличение γ_0 приводит к уменьшению занимаемой траекториями площади. Зависимость от параметра ε (см. фиг. 11) выражается в том, что при увеличении этого параметра увеличивается число витков той части спирали, которую можно визуально отличить от ее предельной окружности (аналогично тому, как с ростом ε увеличивалось число витков спирали при $1 < \delta < +\infty$); и, кроме того, увеличение ε приводит к увеличению занимаемой траекториями площади (чего не наблюдалось в случае $1 < \delta < +\infty$). Увеличение параметра θ_{12} , как видно из фиг. 12, приводит к уменьшению числа витков спирали, визуально отличимых от предельной окружности, с одновременным уменьшением занимаемой траекториями площади. Зависимость от экваториального момента инерции как от самостоятельного параметра характерна исключительно для случая $\mu = 0$.

11. Заключение. В динамике абсолютно твердого тела существует весьма небольшой класс задач, допускающих построение точного аналитического решения. Одной из таких задач является задача о вращении осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде. В настоящей работе построено точное решение этой задачи в форме экспоненциальных рядов. В общем случае решение представляется в виде двойного ряда (7.2), (7.3), недостатки которого очевидны и компенсируются тем, что при решении конкретных задач можно приближенно считать отношение λ/μ рациональным числом и пользоваться частным решением задачи (6.2), (6.3), выражающимся через обычные ряды. Особо следует отметить два частных случая: $k_3 = 0$ и $k_{12} = 0$, которые представляют определенный практический интерес в связи с тем, что в этих случаях движение тела при $t \rightarrow +\infty$ не стремится к состоянию покоя, а асимптотически приближается к перманентному вращению: в случае $k_3 = 0$ – вокруг оси симметрии тела, в случае $k_{12} = 0$ – вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии.

Обсуждаемая задача интересна не только возможностью построения ее точного решения, но и возможностью наглядного представления движения, что в динамике абсолютно твердого тела является такой же редкостью, как и точное решение задачи. По степени наглядности данная задача сравнима со случаем интегрируемости Лагранжа. Годографы единичного вектора \mathbf{n} , определяющего направление оси симметрии тела, делятся на три класса: к первому классу относятся спирали с уменьшающимся радиусом витков, скручивающиеся к точке (случай $\lambda < \mu$); ко второму классу относятся спирали с увеличивающимся радиусом витков, раскручивающиеся и стремящиеся к большой окружности единичной сферы (случай $\lambda > \mu$); к третьему классу относятся спирали, вырожденные в окружности (случай $\lambda = \mu$). Во всех случаях, кроме случая $k_{12} = 0$, спирали имеют конечную длину [2, 9]. Качественно новым результатом, относящимся к анализу годографов единичных векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} , характеризующих соответственно направления оси симметрии тела, вектора угловой скорости и вектора кинетического момента, является определение по начальным условиям предельных точек, к которым асимптотически приближаются годографы этих векторов при $t \rightarrow +\infty$. Заметим, что вид годографов векторов \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} позволяет косвенно судить о скорости сходимости рядов, представляющих решение задачи. Если годограф представляет собой спираль, состоящую из нескольких витков (что бывает в случае малых коэффициентов трения или больших начальных угловых скоростей), ряды сходятся

медленно и для получения удовлетворительных результатов приходится учитывать несколько десятков членов ряда; если же годографом является спираль, содержащая менее одного полного витка, несколько первых членов ряда достаточно хорошо аппроксимируют решение. Возможно, оптимальным вариантом приближенного решения обсуждаемой задачи будет соединение асимптотического решения, мало отличающегося от регулярной прецессии, при $t \in [0, t_*]$ (где t_* – время выхода траектории на последний виток) и решения в виде нескольких первых членов ряда, представляющего точное решение задачи, при $t \geq t_*$. Подробное обсуждение приближенного решения задачи выходит за рамки данной работы, цель которой заключалась в построении и анализе точного решения.

Автор благодарит П.А. Жилина за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983. Т. 1. 463 с.; Т. 2. 544 с.
2. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1952, Т. 1. 352 с.; Т. 2. 318 с.
3. Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. М.: Мир, 1974. 526 с.
4. Кошляков В.Н. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 137–148.
5. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 288 с.
6. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение, 1964. 572 с.
7. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разряженного газа с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 344 с.
8. Белецкий В.В., Янишин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984. 188 с.
9. Кривцов А.М. Описание движения осесимметричного твердого тела в линейно-вязкой среде при помощи квазиординат // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 23–29.
10. Иванова Е.А. Свободное вращение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде. Механика и процессы управления // Тр. СПбГТУ. 1997. № 467. С. 61–69.
11. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.
12. Кривцов А.М. Стационарные движения несимметричного волчка // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 28–38.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
14.01.1999