МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. А.Ю. ВИНОГРАДОВ

ПЕРЕНОС КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТОЛЬКО С ЧЕТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Идея метода [1] излагается в виде, доступном для реализации алгоритма; приводится решение краевой задачи, которое подтверждает его вычислительную эффективность.

Краевые задачи механики деформирования оболочек часто моделируются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими только четные производные. Такие дифференциальные уравнения могут быть записаны в виде системы, каждое уравнение которой содержит только вторую производную [2]:

$$d^2y_1/dx^2 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = b_1$$
$$d^2y_2/dx^2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^2y_n/dx^2 + a_{n1}y_1 + a_{n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = b_n$$

Запишем эту систему дифференциальных уравнений в матричной форме

$$\mathbf{Y}'' + A\mathbf{Y} = \mathbf{Q}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1}$$

где $\mathbf{Y} = \{y,\ y'',\ y^{\mathrm{IV}},\ \ldots,\ y^{(n-2)}\}^T$ – столбец размерности $n = m/2$, элементами которого являются искомая функция и ее четные производные; m – порядок системы дифференциальных уравнений, $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ – коэффициенты системы дифференциальных уравнений; $\mathbf{Q}$ – столбец, выражающий внешнее воздействие.

Краевые условия, накладываемые на физические параметры задачи и формируемые при помощи искомой вектор-функции $\mathbf{Y}(x)$ и ее производной $\mathbf{Y}'(x)$, также записываем в матричной форме

$$B\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(0)\\ \mathbf{Y}'(0)\end{Vmatrix} = \mathbf{b}, \quad D\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(1)\\ \mathbf{Y}'(1)\end{Vmatrix} = \mathbf{d} \tag{2}$$

где прямоугольные матрицы B и D имеют размерности $n \times m$.

Интеграл матричного дифференциального уравнения (1) известен [2]:

$$\mathbf{Y}(x) = \cos(A^{1/2}(x-x_0))\mathbf{Y}(x_0) + A^{-1/2}\sin(A^{1/2}(x-x_0))\mathbf{Y}'(x_0) + \tag{3}$$
$$+A^{-1/2}\int\limits_{x_0}^{x}\sin(A^{1/2}(x-x_0))\mathbf{Q}(t)dt$$

Этот интеграл всегда можно вычислить так как его матричные синусы и косинусы представляются матричными рядами

$$\cos(A^{1/2}(x-x_0)) = E-(1/2!)A(x-x_0)^2+(1/4!)A^2(x-x_0)^4-\ldots \tag{4}$$

$$A^{-1/2}\sin(A^{1/2}(x-x_0)) = Ex-(1/3!)A(x-x_0)^3+(1/5!)A^2(x-x_0)^5-\ldots$$

где E – единичная матрица, A – матрица коэффициентов дифференциального уравнения (1).

Необходимое для формирования краевых условий выражение для $\mathbf{Y}'(x)$ получаем дифференцированием выражения (3):

$$\mathbf{Y}'(x) = -AA^{-1/2}\sin(A^{1/2}(x-x_0))\mathbf{Y}(x_0)+\cos(A^{1/2}(x-x_0))\mathbf{Y}'(x_0)+ \tag{5}$$

$$+A^{-1/2}\int\limits_{x_0}^{x}\cos(A^{1/2}(x-t))Q(t)dt$$

Объединяя выражения для $\mathbf{Y}(x)$ (3) и $\mathbf{Y}'(x)$ (5), получаем следующую матричную зависимость:

$$\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x)\\ \mathbf{Y}'(x)\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}C(x_0,\ x) & S(x_0,\ x)\\ -AS(x_0,x) & C(x_0,\ x)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x_0)\\ \mathbf{Y}'(x_0)\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}_{0S}(x_0,\ x)\\ \mathbf{Y}_{0C}(x_0,\ x)\end{Vmatrix} \tag{6}$$

$$C(x_0,\ x)=\cos(A^{1/2}(x-x_0)),\quad S(x_0,\ x)=A^{-1/2}\sin(A^{1/2}(x-x_0))$$

$$\mathbf{Y}_{0S}(x_0,\ x)=A^{-1/2}\int\limits_{x_0}^{x}\sin(A^{1/2}(x-x_0))Q(t)dt$$

$$\mathbf{Y}_{0C}(x_0,\ x)=A^{-1/2}\int\limits_{x_0}^{x}\cos(A^{1/2}(x-t))Q(t)dt$$

Матричная зависимость (6) справедлива для произвольных значений аргумента x и, следовательно, для его крайних значений $x = 0$ и $x = 1$.

Исключая в краевых условиях (2) столбцы с помощью выражения (6) при $x = 0$ и $x = 1$ соответственно, таким образом переносим краевые условия в произвольную точку x_0 интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$B_1\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x_0)\\ \mathbf{Y}'(x_0)\end{Vmatrix}=b_1 \tag{7}$$

$$B_1 = B\begin{Vmatrix}C(x_0,\ 0) & S(x_0,\ 0)\\ -AS(x_0,\ 0) & C(x_0,\ 0)\end{Vmatrix},\quad b_1=b-B\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}_{0S}(x_0,\ 0)\\ \mathbf{Y}_{0C}(x_0,\ 0)\end{Vmatrix}$$

$$D_1\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x_0)\\ \mathbf{Y}'(x_0)\end{Vmatrix}=d_1 \tag{8}$$

$$D_1 = D\begin{Vmatrix}C(x_0,\ 1) & S(x_0,\ 1)\\ -AS(x_0,\ 1) & C(x_0,\ 1)\end{Vmatrix},\quad d_1=d-D\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}_{0S}(x_0,\ 1)\\ \mathbf{Y}_{0C}(x_0,\ 1)\end{Vmatrix}$$

Объединяя краевые условия (7) и (8), перенесенные в произвольную точку x_0 интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$, получаем систему алгебраических уравнений относительно искомых векторов–столбцов $\mathbf{Y}(x_0)$ и $\mathbf{Y}'(x_0)$ для рассматриваемой точки x_0:

$$\begin{Vmatrix}B_1\\ D_1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x_0)\\ \mathbf{Y}'(x_0)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}b_1\\ d_1\end{Vmatrix} \tag{9}$$

Откуда следует решение краевой задачи

$$\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x_0)\\ \mathbf{Y}'(x_0)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}B_1\\ D_1\end{Vmatrix}^{-1}\begin{Vmatrix}b_1\\ d_1\end{Vmatrix}$$

Повышая вычислительную эффективность метода усовершенствуем алгоритм путем последовательного переноса краевых условий в точки $x_1, x_2, \ldots, x_0$ слева на право и в точки $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_0$ справа налево. Для этого матричные синус и косинус с помощью рядов (4) вычисляем с заменой x_0 на x_1. Получаем выражения (7) и (8) для x_1 интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$B\begin{Vmatrix}C(x_1,\ 0) & S(x_1,\ 0)\\ -AS(x_1,\ 0) & C(x_1,\ 0)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x_1)\\ \mathbf{Y}'(x_1)\end{Vmatrix}=b-B\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}_{0S}(x_1,\ 0)\\ \mathbf{Y}_{0C}(x_1,\ 0)\end{Vmatrix}$$

Для того, чтобы эти краевые условия, перенесенные в точку x_1, перенести в следующую точку x_2, вычисляем по формулам (3) и (5) интегралы с заменой x на x_1 и x_0 на x_2 и, аналогично предыдущему, получаем выражения краевых условий, перенесенных в точку x_2 интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$B\begin{Vmatrix}C(x_1,\ 0) & S(x_1,\ 0)\\ -AS(x_1,\ 0) & C(x_1,\ 0)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}C(x_2,\ x_1) & S(x_2,\ x_1)\\ -AS(x_2,\ x_1) & C(x_2,\ x_1)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}(x_2)\\ \mathbf{Y}'(x_2)\end{Vmatrix}=$$

$$=b-B\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}_{0S}(x_1,\ 0)\\ \mathbf{Y}_{0C}(x_1,\ 0)\end{Vmatrix}-B\begin{Vmatrix}C(x_1,\ 0) & S(x_1,\ 0)\\ -AS(x_1,\ 0) & C(x_1,\ 0)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\mathbf{Y}_{0S}(x_2,\ x_1)\\ \mathbf{Y}_{0C}(x_2,\ x_1)\end{Vmatrix}$$

и так далее. В итоге левые краевые условия переносятся в произвольно выбранную точку x_0. Аналогичный алгоритм используется для переноса правых краевых условий в точку x_0. Составляется система алгебраических уравнений вида (9) для решения краевой задачи. Величина интервала $[x_{i-1}, x_i]$ для очередного переноса краевых условий выбирается из условия вычислительной эффективности и устойчивого счета. Если счет становится неустойчивым, то вводится хорошо известная операция ортонормирования, предложенная С.К. Годуновым. Ортонормирование выполняется построчно краевых условий, переносимых с левого и с правого краев, при разделении участков интегрирования на участки устойчивого счета.

В качестве примера рассматривается задача деформирования изотропной консольно закрепленной цилиндрической оболочки постоянной толщины, свободный край которой нагружен сосредоточенной радиальной силой. В качестве разрешающего дифференциального уравнения используется уравнение моментной теории в форме, полученной В.З. Власовым [3] $\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi)+((1-\upsilon^2)/c^2)\partial^4\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\alpha^4 = R^4 q_z / D$, $\nabla^2=\partial^2/\partial\alpha^2+\partial^2/\partial\varphi^2$, где R – радиус оболочки, D – ее цилиндрическая жесткость, q_z – поверхностная нагрузка.

Формулы для осевого u_z, окружного v_z и радиального w_z перемещений срединной поверхности оболочки, а также формулы для погонных продольного N_{1z}, окружного N_{2z} нормальных и сдвигового S_z усилий, продольного M_{1z}, окружного M_{2z} и закручивающего M_{12z} моментов, продольной Q_{1z} и окружной Q_{2z} поперечных сил, а также формулы для приведенных по Кирхгофу сдвигающей S_z^* и поперечных сил Q_{1z}^*, Q_{2z}^* имеют вид

$$u_z=\partial^3\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\alpha\partial\varphi^2-\nu\partial^3\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\alpha^3$$

$$v_z=-[\partial^3\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\varphi^3+(2+\nu)\partial^3\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\alpha^2\partial\varphi]$$

$$w_z=-\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi)$$

$$N_{1z} = (Eh/R)\partial^4\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\alpha^2\partial\varphi^2,\quad N_{2z} = (Eh/R)\partial^4\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\alpha^4$$

$$S_z = -(Eh/R)\partial^4\Phi_z(\alpha,\ \varphi)/\partial\alpha^4\partial\varphi,\quad S_z^* = S_z - (1/R)M_{12z}$$

$$M_{1z} = (D/R^2)[\partial^2/\partial\alpha^2 + \nu\partial^2/\partial\varphi^2]\nabla^2\nabla^2\Phi(\alpha,\ \varphi)_z$$

$$M_{2z} = (D/R^2)[\partial^2/\partial\varphi^2 + \nu\partial^2/\partial\alpha^2]\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi)$$

$$M_{12z} = -(D/R^2)(1-\nu)\partial^2/\partial\alpha\partial\varphi\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi)$$

$$Q_{1z} = -(D/R^3)\partial/\partial\varphi\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi),\quad Q_{2z} = -(D/R^3)\partial/\partial\alpha\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi)$$

$$Q_{1z}^* = Q_{1z} + (1/R)\partial/\partial\varphi M_{12z},\quad Q_{2z}^* = Q_{2z} + (1/R)\partial/\partial\varphi M_{12z}$$

$$Q_{1z}^* = -(D/R^3)][\partial^3/\partial\alpha^3 + (2-\nu)\partial^3/\partial\alpha\partial\varphi^2]\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi)$$

$$Q_{2z}^* = -(D/R^3)][\partial^3/\partial\varphi^3 + (2-\nu)\partial^3/\partial\alpha^2\partial\varphi]\nabla^2\nabla^2\Phi_z(\alpha,\ \varphi)$$

где h – толщина оболочки, E – модуль упругости ее материала.

Для замкнутой в окружном направлении оболочки и радиальной силы P, приложенной к ее нулевой образующей, функция $\Phi_z(\alpha,\ \varphi)$ представляется тригонометрическим рядом $\Phi_z(\alpha,\ \varphi) = \tfrac{1}{2}\Phi_0(\alpha,\ \varphi) + \Sigma\Phi_{zn}(\alpha)\cos(n\varphi)$.

Тогда получим разрешающее обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка с четными производными, соответствующее n-й гармонике разложения

$$\Phi_n^{\mathrm{VIII}} - 4n^2\Phi_n^{\mathrm{VI}} + (6n^4 + (1-\nu^2)/c^2)\Phi_n^{\mathrm{IV}} - 4n^6\Phi_n^{\mathrm{II}} + n^8\Phi_n = 0$$

$$Y_n = \{\Phi_n,\ \Phi_n^{\mathrm{II}},\ \Phi_n^{\mathrm{IV}},\ \Phi_n^{\mathrm{VI}}\}^T,\quad Y_n'' = \{\Phi_n^{\mathrm{II}},\ \Phi_n^{\mathrm{IV}},\ \Phi_n^{\mathrm{VI}},\ \Phi_n^{\mathrm{VIII}}\}^T$$

где ненулевые элементы матрицы A системы (1) имеют вид

$$a_{n12} = -1,\quad a_{n23} = -1,\quad a_{n34} = -1,\quad a_{n41} = n^8,\quad a_{n42} = -4n^6$$

$$a_{n43} = (6n^4 + (1-\nu^2)/c^2),\quad a_{n44} = -4n \tag{10}$$

Формулы для вычисления перемещений и сил соответственно принимают вид

$$u = u_0/2 + \Sigma u_n\cos(n\varphi),\quad u_n = -n^2\Phi_n^{\mathrm{I}} - \nu\Phi_n^{\mathrm{III}}$$

$$v = v_0/2 + \Sigma v_n\sin(n\varphi),\quad v_n = -n^3\Phi_n - (2+\nu)n\Phi_n^{\mathrm{II}}$$

$$w = w_0/2 + \Sigma w_n\cos(n\varphi),\quad w_n = \Phi_n^{\mathrm{IV}} - 2n^2\Phi_n^{\mathrm{II}} + n^4\Phi_n$$

$$T_1 = T_{10}/2 + \Sigma T_{1n}\cos(n\varphi),\quad T_{1n} = -(Eh/R)n^2\Phi_n^{\mathrm{II}}$$

$$T_2 = T_{20}/2 + \Sigma T_{2n}\cos(n\varphi),\quad T_{2n} = (Eh/R)\Phi_n^{\mathrm{IV}}$$

$$S = S_{10}/2 + \Sigma S_{1n}\sin(n\varphi),\quad S_n = (Eh/R)n\Phi_n^{\mathrm{III}}$$

$$M_1 = M_{10}/2 + \Sigma M_{1n}\cos(n\varphi)$$

$$M_{1n} = (D/R^2)[\Phi_n^{\mathrm{VI}} - 2n^2\Phi_n^{\mathrm{IV}} + n^4\Phi_n^{\mathrm{II}} + \nu(-n^2\Phi_n^{\mathrm{IV}} + 2n^4\Phi_n^{\mathrm{II}} - 2n^6\Phi_n)]$$

$$M_2 = M_{20}/2 + \Sigma M_{2n}\cos(n\varphi) \tag{11}$$

$$M_{2n} = (D/R^2)[-n^2\Phi_n^{\mathrm{IV}} + 2n^4\Phi_n^{\mathrm{II}} - n^6\Phi_n + \nu(\Phi_n^{\mathrm{VI}} - 2n^2\Phi_n^{\mathrm{IV}} + n^4\Phi_n)]$$

$$M_{12} = M_{120}/2 + \Sigma M_{12n}\sin(n\varphi)$$

$$M_{12n} = -(1-\nu)(D/R^2)[-n\Phi_n^{\mathrm{V}} + 2n^3\Phi_n^{\mathrm{III}} - n^5\Phi_n^{\mathrm{I}}]$$

$$\theta_\alpha = [\theta_{\alpha 0}/2 + \Sigma\theta_{\alpha n}\cos(n\varphi)]$$

$$\theta_{\alpha n} = (1/R)[\Phi_n^{\mathrm{V}} - 2n^2\Phi_n^{\mathrm{III}} + n^4\Phi_n^{\mathrm{I}}]$$

$$\theta_\beta = [\theta_{\beta 0}/2 + \Sigma\theta_{\beta n}\sin(n\varphi)]$$

$$\theta_{\beta n} = (1/R)[-n\Phi_n^{\mathrm{IV}} - 2n^3\Phi_n^{\mathrm{II}} - n^5\Phi_n]$$

$$S^* = -(Eh/R)[S_0^*/2 + \Sigma S_n^*\sin(n\varphi)]$$

$$S_n^* = -(Eh/R)[-(1-\nu)n\Phi_n^{\mathrm{V}} + ((1-\nu^2)/c^2 + 2(1-\nu)n^2)n\Phi_n^{\mathrm{III}} - (1-\nu)n^5\Phi_n^{\mathrm{I}}]$$

$$Q_1^* = -(D/R^3)[Q_{10}^*/2 + \Sigma Q_{1n}^*\cos(n\varphi)]$$

$$Q_{1n}^* = -(D/R^3)[\Phi_n^{\mathrm{VII}} - 3n^2\Phi_n^{\mathrm{V}} - 3n^4\Phi_n^{\mathrm{III}} - n^6\Phi_n^{\mathrm{I}} + (1-\nu)(-n^2\Phi_n^{\mathrm{V}} + 2n^4\Phi_n^{\mathrm{III}} - n^6\Phi_n^{\mathrm{I}})]$$

$$Q_2^* = -(D/R^3)[Q_{20}^*/2 + \Sigma Q_{2n}^*\sin(n\varphi)]$$

$$Q_{2n}^* = -(D/R^3)[-n\Phi_n^{\mathrm{VI}} + 3n^3\Phi_n^{\mathrm{IV}} - 3n^5\Phi_n^{\mathrm{II}} + n^7\Phi_n + (1-\nu)(-n\Phi_n^{\mathrm{VI}} + 2n^3\Phi_n^{\mathrm{IV}} - n^5\Phi_n^{\mathrm{II}})]$$

Для сосредоточенной силы разложение имеет вид $Q = (P/(\pi R))[1/2 + \Sigma\cos(n\varphi)]$, где P – величина силы, приложенной к свободному краю.

Безразмерные искомые величины ищем в виде $\tilde{w} = w(\pi D)/(PR^2)$, $\tilde{T}_i = T_i(\pi R)/P$, $\tilde{M}_i = M_i\pi/P$. Физические условия на левом краю $\tilde{T}_1 = 0$, $\tilde{S}^* = 0$, $\tilde{M}_1 = 0$, $\tilde{Q}_1^* = P$. При этом ненулевые элементы матрицы B и вектора b условий (2) имеют вид

$$b_{12} = -12(1-\nu^2)n^2/c^2,\quad b_{25} = 2(1-\nu)n^5,\quad b_{26} = ((1-\nu^2)/c^2 - 4(1-\nu)n^2)n,$$
$$b_{27} = 2(1-\nu)n$$
$$b_{31} = -0{,}3n^6,\quad b_{32} = (1+2\nu)n^4,\quad b_{33} = -(2+\nu)n^2,\quad b_{34} = 1 \qquad (12)$$
$$b_{45} = (2-\nu)n^6,\quad b_{46} = -(5-2\nu)n^4,\quad b_{47} = (4-\nu)n^2,\quad b_{48} = -1,\quad b_4 = 1$$

Кинематические условия на правом краю $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\theta = 0$. При этом ненулевые элементы матрицы D и вектора d условий (2) имеют вид

$$d_{15} = -n^2,\quad d_{16} = -\nu,\quad d_{21} = -n^3,\quad d_{22} = (2+\nu)n$$
$$d_{31} = n^4,\quad d_{32} = -2n^2,\quad d_{33} = 1,\quad d_{45} = n^4,\quad d_{46} = -2n^2;\quad d_{47} = 1 \qquad (13)$$

Таким образом, для решения краевой задачи на ЭВМ с помощью построенного алгоритма получены необходимые элементы (10) матрицы A исходного дифференциального уравнения (1) и элементы (12) и (13) соответственно краевых условий (2). Искомые величины задачи определяются по формулам (11).

Основным свойством метода является возможность контролировать погрешность интеграла (3) дифференциального уравнения (1) путем сравнения частичных сумм матричных рядов (4). В табл. 1 для оболочки с параметром толщины $R/h = 200$ для различной длины параметра участков x/R интегрирования для различных номеров n гармоник разложения искомых величин в тригонометрические ряды показано число слагаемых матричных рядов (4), которое необходимо удерживать, чтобы значение перемещений w совпадало до 3-х значащих цифр.

В табл. 2, 3 аналогичные результаты приводятся для оболочки с $R/h = 100$ и $R/h = 10$ соответственно. Результаты, приведенные в таблицах, контролировались параллельным счетом методом Годунова [4].

Таблица 1

x/R n	0,01	0,05	0,1	0,5	1	2
0	2	4	5	14	25	48
10	3	4	5	18	35	73
20	3	4	5	19	38	80
30	3	5	6	22	44	93
50	3	5	8	30	58	118
80	3	7	9	40	78	159
100	3	7	10	46	113	190

Таблица 2

x/R n	0,01	0,05	0,1	0,5	1	2
0	2	3	5	12	21	34
100	3	7	11	43	83	170

Таблица 3

x/R n	0,01	0,05	0,1	0,5	1	2
0	2	3	3	6	7	14
100	3	7	11	38	67	152

Таблица 4

n	I	II
1	2,5	0,84
50	2	0,15
100	1,8	0,03

В табл. 4 приведены значения параметра длины x/R участка устойчивого счета для оболочки с параметром толщины $R/h = 200$ для построенного метода (I) и метода Годунова (II) для различных номеров n гармоник. Для построенного метода длина участка устойчивого счета оказалась от 3 раз при $n = 1$ до 60 раз при $n = 100$ больше, чем для метода Годунова. Вычисления для нулевой гармоники, когда нагрузка кольцевая, показали, что в диапазоне значений параметра толщины R/h от 10 до 300 и удлинения x/R до 100 счет всегда устойчивый.

Простота реализации метода, вычислительная эффективность и возможность контролировать погрешность счета делают метод весьма перспективным для приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И.* Метод решения краевых задач механики деформирования пластин и оболочек для дифференциальных уравнений только с четными производными // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 1. С. 41–42.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
3. *Власов В.З.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
4. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.

Москва

Поступила в редакцию
17.05.2000