МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. А.С. БРАТУСЬ

КРАТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАДАЧАХ О СТАБИЛИЗАЦИИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача о потере устойчивости неконсервативной системы, поведение которой зависит как от параметра потери устойчивости, так и от распределений, задающих ее жесткостные свойства. Изучается случай, когда при заданном распределении жесткостей и некотором критическом значении параметра потери устойчивости возникают нулевые частоты свободных колебаний. Показано, что в этом случае нулевая частота свободных колебаний почти всегда является двукратной. Ставится задача о стабилизации системы за счет выбора подходящих распределений жесткостей при фиксированном (критическом) значении параметра потери устойчивости. Найдены условия, при которых эта задача имеет решение при различных вариантах реализаций двукратных нулевых собственных частот. В качестве примера рассмотрены задачи об устойчивости свободно опертой трубы переменного сечения, внутри которой протекает жидкость, при различных способах задания диссипативных сил.

1. Постановка задачи. Во многих интересных, с точки зрения приложений, случаях свободные колебания упругих распределенных систем можно описать с помощью следующей начально-краевой задачи [1–2]:

$$A(p,h)u(x,t)+B(p,h)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+m(h)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

$$x\in(0,l),\ \ t\in(0,T],\ \ l>0, T>0$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \tag{1.2}$$

$$(C_{1j}u(x,t))_{x=0}=0,\ (C_{2j}u(x,t))_{x=l}=0 \quad (j=1,2,\ldots,m) \tag{1.3}$$

$$A(p,h)=\sum_{i+j=0}^{2m}\frac{\partial^j}{\partial x^j}a_{ij}(p,h)\frac{\partial^i}{\partial x^i}\ (m\geqslant 1)$$

$$B(p,h)=\sum_{i+j=0}^{r}\frac{\partial^j}{\partial x^j}b_{ij}(p,h)\frac{\partial^i}{\partial x^i}\ (r\leqslant 2m)$$

Здесь $u(x,\ t)$ – отклонение системы от положения равновесия; p – вещественный (бифуркационный) параметр, $p\in\ R$; $h(x)$ – функция, описывающая жесткостные свойства упругой системы; $A(p,\ h)$, $B(p,\ h)$ – линейные дифференциальные операторы дивергентного типа с коэффициентами, представляющими аналитические функции по параметру p и по переменной $h(x)$.

Далее полагаем, что распределение масс $m(h)$ также является гладкой функцией от h. Краевые условия (1.3) определяются линейными дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами C_{1j}, C_{2j} (j = 1, 2, … m), порядок которых меньше, чем порядок оператора $A(p, h)$. Функции $h(x)$ выбираются из множества H, состоящего из положительных, ограниченных и непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций, удовлетворяющих изопериметрическому условию постоянства объема

$$\int_0^l h(x)dx = V, \quad V - \text{const} > 0$$

Предполагается, что краевая задача (1.1)–(1.3) является задачей типа Штурма [3], а начальные условия определяются функциями φ, ψ из пространства L_2.

Далее также полагаем, что для любых гладких функций $u(x)$, $v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям (1.3), выполняются следующие равенства:

$$\int_0^l (A(p,h)u)v dx = \sum_{i+j=0}^{2m} (-1)^i \int_0^l a_{ij}(p,h)\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\frac{\partial^i v}{\partial x^i}dx = A_{h,p}(u,v) \tag{1.4}$$

$$\int_0^l (B(p,h)u)v dx = \sum_{i+j=0}^{r} (-1)^i \int_0^l b_{ij}(p,h)\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\frac{\partial^i v}{\partial x^i}dx = B_{h,p}(u,v)$$

Отметим, что формы $A_{h,p}$ и $B_{h,p}$, вообще говоря, не являются симметричными, т.е. $a_{ij} \neq a_{ji}$ и $b_{ij} \neq b_{ji}$.

Как обычно, при исследовании устойчивости полагаем, что решение краевой задачи (1.1)–(1.3) может быть представлено в виде ряда Фурье по переменной t с коэффициентами, зависящими от $x \in [0, l]$. Это означает, что решение можно искать в виде $u(x, t) = v(x)\exp(i\omega t)$, где i – мнимая единица, ω – частота, $v(x)$ – амплитудная функция. Подставляя это выражение в (1.1), (1.3), приходим к задаче на собственное значение для функции $v(x)$:

$$A(p,h)v(x) + i\omega B(p,h)v(x) - \omega^2 m(h)v(x) = 0 \tag{1.5}$$

с краевыми условиями (1.3). Решение этой задачи разыскивается в пространстве функций Соболева, имеющих суммируемые с квадратом производные до порядка m включительно.

Будем также считать, что при $p \in R$ и $h(x) \in H$ спектр задачи (1.5) является дискретным, а соответствующие собственные функции образуют базис Рисса [4] в пространстве $L_2(0, l)$.

Далее будем использовать следующее определение.

Определение. Пусть $h_0(x)$ – фиксированная функция из H. Значение параметра $p = p_0$ назовем критическим, если существует хотя бы одно собственное значение задачи (1.5) такое, что $\mathrm{Im}\,\omega_j(p_0, h_0) = 0$ ($j \in (1, 2, \ldots)$), и в достаточно малой окрестности $U_\delta = \{p : p_0 < p < p_0 + \delta\}$, $\delta > 0$, выполняется неравенство $\mathrm{Im}\,\omega_j(p, h_0) < 0$. Причем из всех значений параметра, удовлетворяющих приведенным выше условиям, значение p_0 является наименьшим. Если при этом $\mathrm{Re}\,\omega_j(p_0, h_0) = 0$, то говорят, что система теряет устойчивость статическим образом. Если же $\mathrm{Re}\,\omega_j(p_0, h_0) \neq 0$, то имеет место динамический случай потери устойчивости.

Предположим, что при фиксированном $h_0(x)$ из множества H критическое значение параметра определяется величиной p_0, причем при $p = p_0$ система теряет устойчивость статическим образом. Поставим следующий вопрос: можно ли путем подбора подходящей функции $h(x)$ из H при $p = p_0$ стабилизировать систему, т.е. существует ли такая функция $h^*(x)$, что $\mathrm{Im}\,\omega_j(p_0, h^*) > 0$, в то время как $\mathrm{Im}\,\omega_j(p_0, h_0) = 0$ и $\mathrm{Im}\,\omega_j(p, h_0) < 0$ при $p \in U_\delta$. Важной особенностью задачи (1.5) является свойство симметрии собственных значений относительно мнимой оси [5]. Если задача (1.5) при некотором $p \in R$ имеет собственное значение $\omega = \tau + i\sigma$, то тогда существует собственное значение $\omega' = -\tau + i\sigma$. Непосредственно проверяется, что если собственному значению ω соответствует собственная функция $f = u(x) + iv(x)$, то собственному значению ω' соответствует функция $f' = v(x) + iu(x)$. Из этого свойства, в частности, вытекает, что если при $p = p_0$ выполняется $\operatorname{Im}\omega(p_0, h) = 0$ и $\operatorname{Re}\omega(p_0, h) \neq 0$, когда $\operatorname{Re}\omega(p, h) \neq 0$, $p \in U_\delta$, то нулевое собственное значение по крайней мере является двукратным.

Таким образом, в рассматриваемом случае статический тип потери устойчивости всегда сопровождается появлением кратных нулевых собственных значений. При этом возникают две возможности: число соответствующих собственных функций равно кратности собственного значения или меньше последнего. Второй случай реализуется лишь в неконсервативных системах и соответствует появлению простейшего жорданова блока. Отметим также, что после соответствующих изменений исходная задача допускает обобщение на случай пластин и оболочек.

2. Возмущение нулевого собственного значения. Предположим, что для фиксированной функции $h \in H$ при $p = p_0$ система теряет устойчивость статическим образом, т.е. $\omega(p_0, h) = 0$. Имеет место равенство

$$A_0(h)v_0(x) = 0 \tag{2.1}$$

для функции $v_0(x)$, удовлетворяющей краевым условиям (1.3). Здесь и далее будем использовать обозначения

$$A_0(h) = A(p_0, h), \quad B_0(h) = B(p_0, h)$$

Дадим приращение функции $h(x)$, положив $h_\alpha = h(x) + \alpha\delta h(x)$, где $\delta h(x)$ – ограниченная функция.

Собственные значения и собственные функции исходной задачи тоже получат некоторые приращения. В [6, 7] показано, что если порядок кратности собственного значения ω равен s и ему соответствуют k линейно независимых собственных функций, то возмущение этого собственного значения будет представляться в виде ряда по степеням $\alpha^{k/s}$. Следовательно, возмущение двукратного нулевого собственного значения может представляться в виде ряда по степеням либо $\alpha^{1/2}$, либо α. Рассмотрим сначала первый случай [8, 9]. Имеем

$$\omega_\alpha = \alpha^{1/2}\mu + \alpha\eta + O(\alpha^{3/2}) \tag{2.2}$$

$$v_\alpha(x) = v_0(x) + \alpha^{1/2}v_1(x) + \alpha v_2(x) + O(\alpha^{3/2}) \tag{2.3}$$

Здесь $v_0(x)$ – решение краевой задачи (2.1)–(3.3); $v_1(x)$, $v_2(x)$, μ, η – функции и величины, которые подлежат определению. Не умаляя общности, можно считать, что собственные функции $v_\alpha(x)$ нормированы следующим образом:

$$(m(h)v_\alpha(x),\ v_0(x)) = 1 \tag{2.4}$$

Здесь и далее $(\ldots, \ldots)$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(0, l)$.

Введем следующие обозначения:

$$A_0^1(h) = \left(\frac{d}{d\alpha}A_0(h + \alpha\delta h)\right)_{\alpha=0}, \quad B_0^1(h) = \left(\frac{d}{d\alpha}B_0(h + \alpha\delta h)\right)_{\alpha=0} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (1.5) и учитывая (2.5), получим

$$A_0(h)v_1(x) = -i\mu B_0(h)v_0(x) \tag{2.6}$$

$$A_0(h)v_2(x) = -A_0^1(h)v_0(x) - i\mu B_0(h)v_1(x) \tag{2.7}$$
$$-i\eta B_0(h)v_0(x) + \mu^2 m(h)v_0(x)$$

Если двукратному нулевому собственному значению отвечают две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то имеют место разложения по целым степеням α:

$$\omega_\alpha = \alpha\mu + \alpha^2\eta + O(\alpha^3) \tag{2.8}$$

$$v_\alpha(x) = v_0(x) + \alpha v_1(x) + \alpha^2 v_2(x) + O(\alpha^3) \tag{2.9}$$

$$v_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),\ c_1, c_2 - \text{const},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \tag{2.10}$$

Отсюда получаем следующее уравнение:

$$A_0(h)v_1(x) = -A_0^1(h)v_0(x) - i\mu B_0(h)v_0(x) \tag{2.11}$$

для функции $v_1(x)$, удовлетворяющей краевым условиям (1.3); при этом из изопериметрического условия постоянства объема следует равенство

$$\int_0^l \delta h(x)dx = 0 \tag{2.12}$$

3. Унимодальный случай. Пусть p_0 – критическое значение параметра, при котором одно из собственных значений задачи (1.5), (1.3) обращается в нуль. Рассмотрим сопряженную краевую задачу

$$A_0^T(h)z_0(x) = 0$$

$$(C_{1j}^T z_0(x))_{x=0} = 0,\ (C_{2j}^T z_0(x))_{x=l} = 0 (j = 1,2,\ldots,m) \tag{3.1}$$

Здесь A_0^T, C_{1j}^T и C_{2j}^T – сопряженные дифференциальные операторы, $z_0(x)$ – соответствующая собственная функция.

Из [6] следует, что выполняется равенство

$$(m(h)\ v_0(x), z_0(x)) = 0 \tag{3.2}$$

где $v_0(x)$ – собственная функция задачи (2.1), (1.3).

Возмущение нулевого собственного значения определяется равенствами (2.6), (2.7). Уравнение (2.6) разрешимо, если его правая часть ортогональна решению сопряженной задачи (3.1) $z_0(x)$. Тогда имеем

$$\mu(B_0(h)\ v_0, z_0) = 0 \tag{3.3}$$

Изучим сначала случай "необщего положения", когда $(B_0(h)\ v_0, z_0) = 0$. Тогда задача (2.6) разрешима и существует обратный оператор (функция Грина) такой, что

$$v_1(x) = -i\mu G_0 B_0(h) v_0(x) \tag{3.4}$$

Подставляя это представление в уравнение (2.7) и умножая обе его части скалярно на функцию $z_0(x)$, являющуюся решением сопряженной задачи (3.1), и используя (3.2), получим

$$\mu^2 = -(A_0^1(h)v_0, z_0)/(B_0 G_0 B_0 v_0, z_0) \tag{3.5}$$

Формула (3.5) показывает, что при возмущении двукратного нулевого собственного значения происходит его расщепление на два вещественных либо чисто мнимых. В последнем случае происходит дестабилизация системы, что нежелательно.

В силу (1.4) выражение $(A_0^1\ v_0, z_0)$ можно представить в виде

$$(f_1, \delta h),\quad f_1(x) = \sum_{i+j=0}^{2m} (-1)^i a'_{ij}(h) \frac{\partial^j v_0}{\partial x^j} \frac{\partial^i z_0}{\partial x^i} \tag{3.6}$$

Так как числитель в (3.5) представляет собой линейный функционал по δh, знак величины μ^2 в (3.5) может быть сделан положительным, если функция $f_1(x)$ отлична от постоянной. При этом первая поправка к возмущенному нулевому собственному значению будет действительным числом, поэтому вопрос о стабилизации или дестабилизации возмущенной системы может быть решен только с помощью вычисления следующего приближения.

Запишем уравнение для членов, содержащих $\alpha^{3/2}$, и умножим обе его части скалярно на функцию $z_0(x)$, являющуюся решением сопряженной задачи (3.1). Так же как и в предыдущем случае, получим формулу для величины второй поправки

$$\eta = -i[(A_0^1 G_0 B_0 v_0, z_0) + (B_0^1 v_0, z_0)] / (B_0 G_0 v_0, z_0) \tag{3.7}$$

Определим функцию $f_2(x)$ следующим равенством:

$$f_2(x) = -\sum_{i+j=0}^{2m} a'_{ij}(-1)^i \frac{\partial w_0}{\partial x^j} \frac{\partial^i z_0}{\partial x^i} -$$

$$-\sum_{i+j=0}^{r} b'_{ij}(-1)^i \frac{\partial^j v_0}{\partial x^j} \frac{\partial^i z_0}{\partial x^i}, \quad w_0 = G_0 B_0 v_0(x) \tag{3.8}$$

Окончательно получим, что возможность стабилизации системы свелась к следующей задаче об отыскании решения $\delta h(x)$ системы линейных неравенств и равенства на множестве ограниченных и измеримых функций [10, 11]:

$$\varkappa_1(f_1, \delta h) > 0, \quad \varkappa_2(f_2, \delta h) > 0, \quad (1, \delta h) = 0 \tag{3.9}$$

Здесь $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – знаки выражений, стоящих в знаменателях (3.5) и (3.7) соответственно; $f_1(x), f_2(x)$ – функции, определенные в (3.6) и (3.8). Возможен также и оптимизационный подход. Именно среди всех функций $\delta h(x)$ таких, что $(\delta h, 1) = 0$, найти функцию, доставляющую максимум значению функционала $\eta(\delta h)$ при условии, что выполняется неравенство – ограничение $\varkappa_1(f_1, \delta h) > 0$.

В случае общего положения $(B_0 v_0, z_0) \neq 0$ и, следовательно, $\mu = 0$. Тогда уравнение (2.7) принимает вид

$$A_0(h) v_2(x) = -i\eta B_0(h) v_0(x) - A_0^1(h) v_0(x)$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на функцию $z_0(x)$, получим выражение для величины второй поправки к возмущенному нулевому собственному значению

$$\eta = -i(f_1, \delta h)/(B_0 v_0, z_0) \tag{3.10}$$

где функция $f_1(x)$ определена равенством (3.6). Отсюда следует, что если $f_1 \neq \text{const}$, то система всегда допускает стабилизацию.

Замечание 1. В некоторых случаях при $p = p_0$, $h = h_0(x)$ и $\omega = \omega(p_0, h_0) = 0$ краевая задача (2.1), (1.3) оказывается самосопряженной, несмотря на то, что исходная задача (1.5), (1.3) несамосопряженная. В этом случае равенство (3.2) не выполняется. Соотношения (3.5), (3.7) и (3.10) запишутся в следующем виде:

$$\mu^2 = (f_1, \delta h) / [(B_0 G_0 B_0 v_0, v_0) - 1]$$

$$\eta = i(f_2, \delta h) / [(B_0 G_0 v_0, v_0) - 2]$$

$$\eta = i(f_1, \delta h) / (B_0 v_0, v_0) \tag{3.11}$$

Все сказанное можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть при $p - p_0$ краевая задача (1.5) имеет двукратное нулевое собственное значение, которому соответствует одна собственная функция (простейший жорданов блок). Тогда система допускает стабилизацию за счет выбора подходящего распределения $h \in H$, если существует решение системы (3.9) относительно функции δh при $(B_0 v_0, z_0) = 0$ или если функция $f_1(x)$, определенная в (3.6), отлична от постоянной при $(B_0 v_0, z_0) \neq 0$.

Пример 1. Исследование устойчивости свободно опертой трубы переменного сечения, внутри которой протекает жидкость, приводит к следующей краевой задаче [12]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(h^2(x)\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right) + p^2 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + 2i\beta p\omega \frac{dv(x)}{dx} - \omega^2 h(x) v(x) = 0$$

$$(0 < x < 1)$$

$$v(0) = h^2(0) v''(0) = 0, \quad v(1) = h^2(1) v''(1) = 0 \qquad (3.12)$$

Здесь p – скорость, $\beta > 0$ – постоянная, ω – частота, $h(x)$ – толщина сечения трубы. В соответствии с обозначениями *п.* 1 имеем

$$A_0(h) = \frac{d^2}{dx^2} h^2 \frac{d^2}{dx^2} + p_0^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$$B_0(h) = 2\beta p_0 \frac{d}{dx}, \quad m(h) = h$$

При $p_0 = \pi$ и $h_0 = 1$ получим $v_0(x) = \sqrt{2}\sin \pi x$, $\omega(p_0, h_0) = 0$, причем задача (2.1), (1.3) является самосопряженной. Можно проверить, что $(B_0 v_0, v_0) = 0$. Следовательно, величина μ^2 определяется из первого равенства (3.11). Решение краевой задачи (2.6), (1.3)

$$\frac{d^4 v_1(x)}{dx^4} + \pi^2 \frac{d^2 v_1}{dx^2} = -2\sqrt{2}i\beta\pi^4 \cos \pi x$$

$$v_1(0) = v_1''(0) = 0, \quad v_1(1) = v_1''(1) = 0$$

имеет вид

$$v_1(x) = \sqrt{2}i\mu\beta\pi(x \sin \pi x + \cos \pi x(2/\pi) + 4x/\pi - 2/\pi)$$

Тогда

$$R_1 = 1 - (B_0 G_0 B_0 v_0, v_0) = 1 - 2\pi\beta^2(3/4 - 8/\pi^2)$$

Величина R_1 будет положительна, если $\beta < \beta_1 = \sqrt{2\pi}(32 - 3\pi^2)^{-1/2}$. Из (3.5) следует, что

$$\mu^2 = 4\pi^4 R_1^{-1}(f_1(x), \delta h), \quad f_1(x) = \sin^2 \pi x$$

Используя второе равенство (3.11), получим выражение для второй поправки

$$\eta = 2i\beta\pi^3 R_2^{-1}(f_2(x), \delta h), \quad f_2(x) = \pi x \sin^2 \pi x + \sin 2\pi x$$

$$R_2 = 2\pi\beta^2(3/4 - 8/\pi^2) + 2$$

Причем величина R_2 положительна, если $\eta < \beta_2 = 2\sqrt{\pi}(32 - 3\pi^2)^{-1/2}$. При $\beta < \beta_1 (\beta > \beta_2)$ соответственно для стабилизирующей поправки $\delta h(x)$ должны выполняться неравенства

$$(\cos 2\pi x, \delta h) < 0 \quad (>0), \quad (\pi x(1 - \cos 2\pi x)/2 + \sin 2\pi x, \delta h) > 0, \quad (<0); \ (1, \delta h) = 0 \qquad (3.13)$$

В качестве одного из решений можно, например, выбрать функции $\delta h = \mp \cos 2\pi x$ при $\beta < \beta_1 (\beta > \beta_2)$.

Если же $\beta_1 < \beta < \beta_2$, то знак во втором неравенстве (3.13) изменится на противоположный. Можно показать, что в этом случае решение системы неравенств (3.13) будет нечетной функцией относительно точки $x = 1/2$, что приводит к несимметричным решениям. В качестве одного из этих решений можно, например, выбрать функцию $\delta h(x) = -\cos \pi x$. Ситуация меняется, если в исходной задаче рассмотреть другой закон учета диссипативных сил, положив в (3.11) $B_0(h) = 2p\beta d^2/dx^2$. В этом случае $(B_0 v_0, v_0) \neq 0$ и поэтому справедливо третье равенство (3.11) $\eta = 2i\pi\beta^{-1}(\sin^2\pi x, \delta h)$.

Если положить $\delta h = -\cos 2\pi x$, то, так же как в случае $\beta < \beta_1$, такая вариация распределений толщин приведет к стабилизации системы.

4. Бимодальный случай. Предположим, что двукратному нулевому собственному значению задачи (1.5) соответствуют две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Через $z_1(x)$ и $z_2(x)$ обозначим соответственно собственные функции сопряженной задачи (2.1). Не умаляя общности, можем полагать, что выполняются следующие условия нормировки: $(m(h)y_i, z_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – функция Кронекера.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_{ij} = (A_0^1(h)y_i, z_j), \quad \beta_{ij} = (B_0(h)y_i, z_j)$$
$$a_1 = \beta_{21}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{22}, \quad a_2 = \beta_{22}\alpha_{11} + \beta_{11}\alpha_{22} - \beta_{12}\alpha_{21} - \beta_{21}\alpha_{12}$$
$$a_3 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \tag{4.1}$$

Справедлив следующий результат.

Утверждение 2. Пусть при $p = p_0$ краевая задача (1.5) имеет двукратное собственное значение, которому отвечают две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда система допускает асимптотическую стабилизацию за счет подходящего выбора функции $h(x)$, если система неравенств

$$a_1 a_2 < 0, \quad a_3 a_1 < 0, \quad (1, \delta h) = 0 \tag{4.2}$$

допускает хотя бы одно нетривиальное решение $\delta h(x)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (2.11). Умножим обе его части скалярно на собственные функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ сопряженной краевой задачи (3.1), полагая, что функция $v_0(x)$ представлена в виде (2.10). В итоге получим систему линейных уравнений относительно постоянных c_1 и c_2:

$$c_1(\alpha_{11} + i\mu\beta_{11}) + c_2(\alpha_{21} + i\mu\beta_{21}) = 0$$
$$c_1(\alpha_{12} + i\mu\beta_{12}) + c_2(\alpha_{22} + i\mu\beta_{22}) = 0$$

Для существования нетривиальных решений необходимо и достаточно, чтобы детерминант системы был равен нулю, что приводит к уравнению

$$\mu^2 a_1 + i\mu a_2 + a_3 = 0 \tag{4.3}$$

где формы a_2, a_3 и постоянная a_1 определены равенствами (4.1).

Положим $\lambda = i\mu$ и применим критерий Рауса – Гурвица. Если условия (4.2) выполняются, то возмущенная система будет асимптотически устойчива.

Замечание 2. Форма a_3 является квадратичной по δh, в то время как форма a_2 – линейная, поэтому, если выполняется первое из условий (4.2), второе неравенство в (4.2) всегда можно удовлетворить, поменяв знак перед δh на противоположный.

Замечание 3. В [13, 14] доказано, что если $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, то форма a_3 знакоопределена при любых $\delta h(x)$, удовлетворяющих условию $(1, \delta h(x)) = 0$, если система функций

$$f_{ij}(x) = \sum_{s+r=0}^{2m} a'_{sr}(x)(-1)^r \frac{d^s y_i}{dx^s}\frac{d^r z_j}{dx^r}, \quad f_0 = 1,$$
$$f_{12} = f_{21} \ (i, j = 1, 2) \tag{4.4}$$

линейно зависима, $\delta_1 f_{11} + \delta_2 f_{22} + \delta_3 f_{12} = 1$; причем выполняется условие $\delta_1\delta_2 \geqslant \delta_3^2/4$.

В случае, когда $\alpha_{12} \neq \alpha_{21}$, условие линейной зависимости функций (4.4) не обеспечивает знакоопределенность формы a_3. Однако если система (4.4) содержит линейно зависимые подсистемы, то форма a_3 может быть знакоопределена. Например, если выполняются равенства $f_{12} = -\varkappa_0 f_{21}, f_{11} = \varkappa_1 + \varkappa_2 f_{22}$, где $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – постоянные такие, что $\varkappa_0 > 0$, $\varkappa_2 > 0$, то форма a_3 принимает вид

$$\varkappa_2(f_{22}, \delta h)^2 + \varkappa_0(f_{12}, \delta h)^2 > 0, \quad \delta h \neq 0$$

Пример 2. Рассмотрим задачу об устойчивости свободно опертой трубы, лежащей на упругом основании, через которую протекает жидкость. Соответствующая задача на собственное значение имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(h^2 \frac{d^2 v}{dx^2}\right) + p^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v\,(x) + i\omega B_0(p)\, v - \omega^2 v = 0$$

$$v\,(0) = h^2(0)\, v\,''(0) = 0, \quad v\,(1) = h^2(1)\, v\,''(1) = 0$$

$$B_0(p)\, v = 2\beta dv / dx \tag{4.5}$$

Здесь k и β – положительные постоянные. Пусть $p_0 = 5\pi^2$, $h_0 = 1$, тогда при $k^2 = 4\pi^2$ имеем $\omega(5\pi^2, 1) = 0$, и этому значению соответствуют две собственные функции $y_1(x) = \sqrt{2}\sin \pi x$ и $y_2(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi x$.

Как и в рассмотренном ранее примере, краевая задача (2.1) сопряженная. В соответствии с (4.1) получим

$$\alpha_{11} = 2\pi^4(\sin^2 \pi x, \delta h), \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 8\pi^4(\sin \pi x \sin 2\pi x, \delta h)$$

$$\alpha_{22} = 32\pi^4(\sin^2 2\pi x, \delta h), \quad \beta_{11} = \beta_{22} = 0$$

$$\beta_{12} = -\beta_{21} = 8\pi\beta\sqrt{5}/3$$

Тогда

$$a_3 = 64\pi^8[(\sin^2 \pi x, \delta h)(\sin^2 2\pi x, \delta h) - (\sin \pi x \sin 2\pi x, \delta h)^2]$$

Система неравенств (4.2) не выполняется, поскольку $a_2 = 0$. Из (4.3) следует, что $\mu^2 = -a_3/a_1$. Таким образом, при любом выборе функции δh стабилизация системы невозможна.

Рассмотрим другой закон учета действия диссипативных сил, полагая в (4.5) $B_0(h) = 2\beta p_0 d^2/dx^2$. В этом случае форма a_3 сохраняет свой прежний вид, а формы a_1 и a_2 вычисляются в соответствии с равенствами (4.1):

$$a_1 = -20\pi^3\beta^2, \quad a_2 = 8\pi^7\beta/\sqrt{5}(\sin^2 \pi x + 4\sin^2 2\pi x, \delta h).$$

Учитывая равенство $(\delta h, 1) = 0$, получим систему неравенств (4.2) в следующей форме:

$$(\cos 2\pi x + 4\cos 4\pi x, \delta h) > 0$$

$$(\cos 2\pi x, \delta h)(\cos 4\pi x, \delta h) - (\cos 3\pi x - \cos \pi x, \delta h)^2 > 0$$

Решением этой системы может быть любая ограниченная функция, представимая в виде ряда Фурье с положительными коэффициентами c_1 и c_2:

$$\delta h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos 2k\pi x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

5. Заключение. Предложенный подход к проблеме стабилизации неконсервативных систем можно считать оправданным, если "улучшенная" система не будет терять устойчивость при значениях параметра p, меньших, чем величина критического значения p_0, вычисленного для невозмущенного ("неулучшенного") проекта.

Справедлив следующий результат.

Утверждение 3. Пусть $h_\varepsilon = h_0 + \varepsilon\delta h$ – "улучшенное" распределение жесткостей, которое стабилизирует систему в том смысле, что при $p = p_0$ и $h = h_0(x)$ выполняется $\omega(p_0, h_0) = 0$, в то время как $\mathrm{Im}\omega(p_0, h_\varepsilon) > 0$ (ε – достаточно малое положительное число). Тогда "улучшенная" система будет устойчива при всех $p < p_0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует такое значение параметра p_1, что $p_1 < p_0$ и $\mathrm{Im}\omega\ (p_1, h_\varepsilon) < 0$. Введем обозначение $\mathrm{Im}\omega(p, h_\varepsilon) = \Phi(p, \varepsilon)$. Функция $\Phi(p, \varepsilon)$ непрерывна по ε при фиксированном p. В силу определения критического значения параметра, выполняется неравенство $\Phi(p_1, 0) > 0$, поэтому для достаточно малых ε выполняются неравенства $\Phi(p_1, \varepsilon) < 0$, $\Phi(p_1, 0) > 0$, что противоречит непрерывности функции Φ по ε.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 96-01-00653).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. *Leipholz H.* Stability of Elastic Systems. Amsterdam: Sithhof and Noordhoff, 1980. 475 p.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
4. *Михайлов В.М.* О базисах Рисса в L_2 (0,1) // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–964.
5. *Bratus A.S.* On various cases of instability for elastic nonconservative systems with damping // Intern. J. Solid and Structures. 1993. V. 30. № 24. P. 3431–3441.
6. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
8. *Баничук Н.В., Братусь А.С., Мышкис А.Д.* Об эффектах стабилизации и дестабилизации в неконсервативных системах // ПММ. 1989. Т. 53. № 2. С. 206–214.
9. *Баничук Н.В., Братусь А.С.* Об устойчивости упругих неконсервативных систем, допускающих дивергентные решения // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 134–143.
10. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 143 с.
11. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
12. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
13. *Братусь А.С., Сейранян А.П.* Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 546–554.
14. *Bratus A.S.* Condition of extremum for eigenvalues of elliptic boundary – value problems // J. Optimiz. Theory and Appl. 1991. V. 68. № 3. P. 423–436.

Москва

Поступила в редакцию
17.04.1998