

539.3:534.1

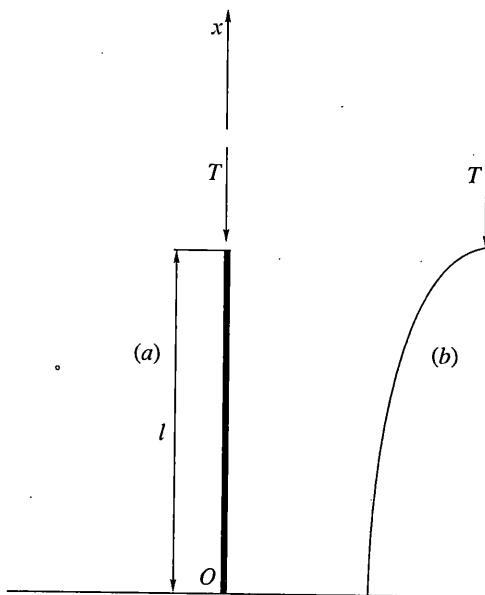
© 2001 г. И.В. АНДРИАНОВ, О.Г. САМОЙЛЕНКО

### О МЕТОДЕ ИШЛИНСКОГО – ЛЕЙБЕНЗОНА В ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

А.Ю. Ишлинским [1] и Л.С. Лейбензоном [2] был предложен метод исследования устойчивости упругих систем для конструкций со свободными краями (или тел со свободными поверхностями). Суть его состоит в том, что в уравнениях устойчивости отбрасываются параметрические члены при сохранении их только в краевых условиях. Метод получил достаточно широкое распространение [3–10] (см. также библиографию работ [11–15]) и неоднократно обсуждался в литературе [13–15], при этом высказывался ряд обоснованных претензий к его точности. Как отмечается, в частности, в [13]: многочисленные публикации, выполненные на основе приближенного подхода [1, 2], требуют дополнительного исследования для выяснения пределов применимости полученных результатов.

В настоящей статье показано, что трактовка данного подхода как нулевого приближения некоторого допускающего уточнение асимптотического процесса, позволяет преодолеть указанный недостаток.

1. Рассмотрим сначала модельную задачу – устойчивость консольного стержня, изображенного на рис. 1. Исходные уравнения устойчивости и краевые условия



Фиг. 1

можно представить в следующем виде:

$$EIw_{xxxx} + Tw_{xx} = 0 \quad (1.1)$$

$$w(0) = w_x(0) = 0 \quad (1.2)$$

$$w_{xx}(L) = 0 \quad (1.3)$$

$$EIw_{xxx}(L) + Tw_x(L) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь  $T$  – сжимающее усилие;  $w$  – прогиб,  $EI$  – изгибная жесткость.

Точное решение задачи на собственные значения (1.1) – (1.4) имеет вид

$$T = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2} \quad (1.5)$$

$$w = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (1.6)$$

Непосредственно сравнить входящие в уравнение устойчивости (1.1) и краевое условие (1.4) параметрические члены затруднительно, попробуем применить вариационно-асимптотический метод [16, 17].

Выпишем выражение для потенциальной энергии консольного стержня [18]:

$$Y = \frac{1}{2} \int_0^l (EIw_{xx}^2 + Tw_x^2) dx = \frac{1}{2} EI \int_0^l w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} T \int_0^l ww_{xx} dx + \frac{1}{2} Tww_x |_{x=l} \quad (1.7)$$

Найдем отношение второго и третьего членов в выражении (1.7), взяв  $w$  в виде (1.6); это отношение оказывается относительно малым  $1 - \pi/4 \approx 0,215$ . Следовательно, пренебрежение параметрическим членом в уравнении устойчивости имеет смысл, и можно попытаться построить итерационную процедуру. Наиболее естественным выглядит введение искусственного малого параметра  $\varepsilon$  в уравнение (1.1) следующим образом:

$$EIw_{xxxx} + \varepsilon Tw_{xx} = 0 \quad (1.8)$$

Далее можно провести обычную асимптотическую процедуру [19], а в окончательном решении положить  $\varepsilon = 1$  (в вычислительной математике подобный подход называется методом продолжения по параметру).

Представим далее функцию  $w$  и параметр  $T$  так:

$$w = w_0 + w_1\varepsilon + w_2\varepsilon^2 + \dots \quad (1.9)$$

$$T = T_0 + T_1\varepsilon + T_2\varepsilon^2 + \dots \quad (1.10)$$

Подставляя выражения (1.9) в краевую задачу (1.8), (1.2) – (1.4) и производя расщепление по  $\varepsilon$ , имеем

$$EIw_{0,xxxx} = 0$$

$$w_0(0) = w_{0,x}(0) = 0, \quad w_{0,xx}(L) = 0, \quad EIw_{0,xxx}(L) + T_0w_{0,x}(L) = 0$$

$$EIw_{k,xxxx} = - \sum_{i=0}^{k-1} T_i w_{k-1,xx} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$w_k(0) = w_{k,x}(0) = 0, \quad w_{k,xx}(L) = 0, \quad EIw_{k,xxx}(L) + \sum_{i=1}^k T_i w_{k-ix}(L) = 0$$

В нулевом приближении получаем

$$T_0 = 2EI/L^2, \quad w_0 = Ax^2(x-3L)$$

Для первого приближения имеем

$$T_1 = \frac{EI}{3L^2}, \quad w_1 = -3(BL + 2AL)x^2 + Bx^2 + \frac{A}{2L}x^4 - \frac{A}{10L^2}x^5$$

Из уравнения и краевых условий второго приближения следует, что  $T_2 = 4EI/(45L^2)$ . Полученное решение может быть улучшено за счет применения аппроксимации Паде [19, 20], позволяющей перейти от исходного степенного ряда к дробно-рациональной функции. Пусть

$$F(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k \quad (1.11)$$

формальный степенной ряд

$$F_{mn}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{km} \varepsilon^k \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn} \varepsilon^k \right)^{-1} \quad (1.12)$$

бесконечный массив рациональных функций.

Если представление в виде степенного ряда для функции  $F_{mn}$  (1.11) совпадает с таким представлением  $F$  (1.12), то  $F_{mn}$  называется аппроксимацией Паде функции  $F$ . Коэффициенты  $a_{km}$ ,  $b_{kn}$  находятся из условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k - \sum_{k=0}^m a_{km} \varepsilon^k \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn} \varepsilon^k \right)^{-1} = 0 (\varepsilon^{m+n+1})$$

В результате применения перестройки Паде и отрезку ряда (1.10) для  $T$  получим

$$O = \frac{(15 + 6\varepsilon)EI}{(15 - 4\varepsilon)L^2}$$

При  $\varepsilon = 1$  имеем  $T = 2,4020 \text{Å} // L^2$ , что отличается от точного значения  $T = 0,25\pi^2 EI // L^2$  на 1,83%.

2. Рассмотрим теперь другой пример: стержень со свободными краями на упругом основании (фиг. 2).

Исходная краевая задача после введения формального малого параметра  $\varepsilon$  принимает вид

$$EIw_{xxxx} + \varepsilon Tw_{xx} + cw = 0 \quad (2.1)$$

где  $c$  – коэффициент постели основания.

Без ограничения общности будем рассматривать прямосимметричную форму потери устойчивости (для кососимметричной формы результаты аналогичны).

Граничные условия

$$\begin{aligned} w_x(0) = w_{xxx}(0) = 0 \\ w_{xx}(l) = 0, \quad EIw_{xx}(l) + Tw_x(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

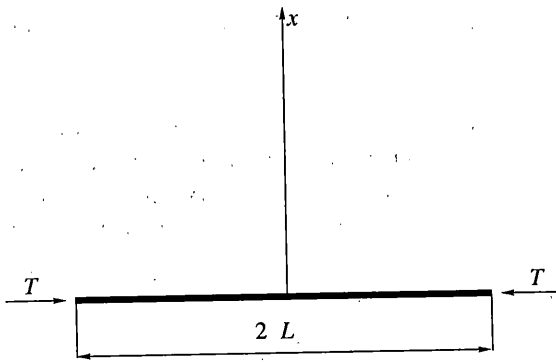
Используя разложения (1.9), (1.10), после расщепления по  $\varepsilon$  имеем следующие краевые задачи:

$$EIw_{0xxxx} + cw_0 = 0 \quad (2.3)$$

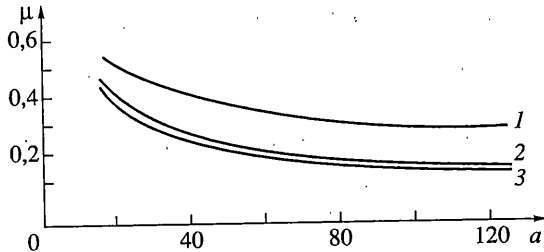
$$\begin{aligned} w_{0xx}(0) = w_{0xxx}(0) = 0 \\ w_{0xx}(l) = 0, \quad EIw_{0xxx}(l) + T_0 w_{0x}(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$EIw_{kxxxx} + cw_k = - \sum_{i=0}^{k-1} T_i w_{k-(i+1)xx} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} w_k(0) = w_{k1xx}(0) = 0 \\ w_{kxx}(l) = 0, \quad EIw_{kxxx}(l) + \sum_{i=0}^k T_i w_{k-ix}(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

В нулевом приближении получаем

$$w_0 = C_1 (a_1 \operatorname{sh} kx \sin kx + \operatorname{ch} kx \cos kx)$$

$$T_0 = (EI/l^2) \bar{T}_0 \quad (2.7)$$

$$\bar{T}_0 = \frac{2\omega^2(a_2 - a_1 a_3)}{(a_3 + a_1 a_2)}, \quad \omega = lk, \quad a_1 = \operatorname{th} \omega \operatorname{tg} \omega, \quad a_2 = \operatorname{cth} \omega + \operatorname{tg} \omega, \quad a_3 = \operatorname{ctg} \omega - \operatorname{tg} \omega$$

В первом приближении

$$T_1 = (EI/l^2) \bar{T}_1 \quad (2.8)$$

$$\bar{T}_1 = \omega^2 (t_1 + t_2 - t_3 t_4) w_{0x}^{-1}(l), \quad t_1 = \frac{\bar{T}_0}{2\omega^2} (b_1 (\operatorname{cth} \omega + k^2 \omega a_4) + b_2 (\operatorname{th} \omega + k^2 \omega a_1))$$

$$t_2 = b_2 (3 \operatorname{ctg} \omega - \omega a_4) - b_1 (3 \operatorname{tg} \omega + \omega a_5), \quad t_3 = \frac{1}{2a_1} \left( ka_2 + \frac{\bar{T}_0}{\omega l} a_3 \right)$$

$$t_4 = -(b_1 (a_4 - \omega \operatorname{tg} \omega) + b_2 (a_5 + \omega \operatorname{cth} \omega)) k^{-1}, \quad b_1 = \frac{\bar{T}_0 a_4}{4\omega l}, \quad b_2 = \frac{\bar{T}_0 a_5}{4\omega l}$$

$$a_4 = 1 - a_1, \quad a_5 = 1 + a_1$$

После проведения описанной выше процедуры Паде-аппроксимации имеем при  $\varepsilon = 1$ :

$$T \approx T_0^2 / (T_0 - T_1) \quad (2.9)$$

Результаты расчета по формуле (2.9) в сравнении с точным решением [21] показаны на фиг. 3, где  $a = l^4 c / 16EI$ ,  $\mu = \pi / \bar{T}^{-1/2}$ , кривая 1 получена по (2.7), 2 – (2.9), 3 – [21].

3. Исследуем устойчивость тонкой изотропной пластинки прямоугольной формы ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ), свободно опертой по трем кромкам и свободной на четвертой и сжатой нагрузкой  $P$ , направленной параллельно двум свободно опертым кромкам.

Уравнение устойчивости пластины в этом случае после введения малого параметра  $\epsilon$  таково:

$$D\nabla^4 w + \epsilon P w_{yy} = 0, \quad D = Eh^2 / (12 - (1 - \nu^2)) \quad (3.1)$$

Здесь  $E$ ,  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона,  $h$  – толщина пластины.

Граничные условия

$$w = 0, \quad w_{xx} = 0 \quad \text{при } x = 0, a \quad (3.2)$$

$$w = 0, \quad w_{yy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (3.3)$$

$$w_{yy} + \nu w_{xx} = 0, \quad D[w_{yyy} + (2 - \nu)w_{ixy}] + Pw_y = 0 \quad \text{при } y = b \quad (3.4)$$

Представим функцию  $w$  в виде ряда по степеням  $\epsilon$  (1.9), а параметр  $P$  в виде  $P = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \dots$ .

После расщепления по  $\epsilon$  имеем следующие краевые задачи:

$$D\nabla^4 w_i + \sum_{k=0}^{i-1} P_{i-1} w_{k-ix} = 0 \quad (3.5)$$

$$w_i = 0, \quad w_{ixx} = 0 \quad \text{при } x = 0, a \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

$$w_i = 0, \quad w_{iyy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (3.7)$$

$$w_{iyy} + \nu w_{ixx} = 0, \quad D[w_{iyyy} + (2 - \nu)w_{ixy}] + \sum_{k=0}^i P_i w_{k-iy} \quad \text{при } y = b \quad (3.8)$$

Уравнения (3.5) – (3.8) при  $i = 0$  являются уравнениями метода Лейбензона – Ишлинского. В нулевом приближении получаем:

$$w_0 = C(\text{sh } \lambda y - \lambda y C_1 \text{ ch } \lambda y) \sin \lambda y, \quad \sigma_0 = H_0 \varphi \quad (3.9)$$

$$H_0 = [(1 - \nu) + C_1(1 + \nu) - (1 - \nu)A \text{ th } A] \vartheta, \quad \vartheta = 1 / [1 - C_1(1 + A \text{ th } A)]$$

$$\varphi = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2, \quad \sigma_0 = \frac{P_0}{h}$$

$$A = \frac{b\pi}{a}, \quad \tilde{N}_1 = (1 - \nu)\psi, \quad \psi = 1 / (2 + A(1 - \nu)\text{cth } A)$$

Решим теперь задачу в первом приближении:

$$w_1 = C \{ \text{sh } \lambda y - \lambda (C_1 + C_2) y \text{ ch } \lambda y + \frac{H_0 \lambda^2}{8} [(C_2 - 1) y^2 \text{ sh } \lambda y + \frac{\lambda C_1}{3} y^3 \text{ ch } \lambda y] \} \sin \lambda x$$

$$\sigma_1 = H_1 \varphi$$

$$C_2 = \frac{H_0}{8} \{ [2 + 4A \text{cth } A + (1 - \nu)A^2] + \frac{C_1 A}{3} [6 \text{cth } A + 6A + (1 - \nu)A^2 \text{cth } A] \} \psi$$

$$H_1 = \{ -1 + (C_1 + C_2)(3 + A \text{ th } A) - \frac{H_0}{8} [(C_2 - 1)(6 + 6A \text{ th } A + A^2) + \frac{C_1}{3}(6 + 18A \text{ th } A + 9A^2 +$$

$$+ A^3 \text{ th } A)] - (H_0 - 2 + \nu)[1 - (C_1 + C_2)(1 + A \text{ th } A) + \frac{H_0}{8} [(C_1 - 1)(2A \text{ th } A + A^2) +$$

$$+ \frac{C_1}{3}(3A^2 + A^3 \text{ th } A)] \} \vartheta$$

Аналогично решается задача во втором приближении. В результате имеем

$$\sigma_2 = H_2 \varphi$$

$$H_2 = \{ [24\beta - 6(a - 2\beta A^2 + 3\gamma - 10\theta A^2) - A^2(\gamma + \theta A^2) + C_1 + C_3] \operatorname{th} A + \\ + [\beta A^4 - 1 - aA^2 - 6(a - 6\beta A^2 + \gamma - 10\theta A^2) + 3(C_1 + C_3 - A^2(3\gamma - 5\theta A^2))] - \\ - (H_0 - 2 + \nu) \{ [2A(a - 2\beta A^2) - A(C_1 + C_3) + A^3(\gamma - \theta A^2)] \operatorname{th} A + \\ + [1 - aA^2 - \beta A^4 - C_1 - C_3 + A^2(3\gamma - 5\theta A^2)] - H_1 \{ 1 - (C_1 + C_3)(1 + A \operatorname{th} A) + \\ + \frac{H_0}{8} [(C_1 - 1)(2A \operatorname{th} A + A^2) + \frac{C_1}{3} (3A^2 + A^3 \operatorname{th} A)] \} \}$$

$$C_3 = \{ \{ 2a + A^2[(1 - \nu)a - 12\beta + 6\gamma] - A^4[(1 - \nu)\beta + 10\theta] \} + \\ + \{ 2A(1a + 3\gamma) + A^3[(1 - \nu)\gamma - 8\beta - 20\theta] - A^5(1 - \nu)\theta \} \operatorname{cth} A \varphi$$

$$\alpha = \frac{1}{8} \left[ H_0(C_1 + C_3) + \frac{H_0^2}{16} (C_1 - 1) + H_1 C_1 - H_0 - H_1 \right]$$

$$\beta = \frac{H_0^2}{384} (2C_1 - 1), \quad \theta = \frac{H_0^2 C_1}{1920}, \quad \gamma = \frac{1}{24} \left[ H_0(C_1 + C_3) + \frac{H_0^2}{16} (4 - 3C_1) + H_1 C_1 \right]$$

Окончательно получим

$$\alpha = \varphi H \approx \varphi (H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2) \quad (3.10)$$

Метод Паде аппроксимации при  $\varepsilon = 1$  по двум первым членам выражения (3.10) дает

$$I \approx I_0 / (1 - \beta_1) \quad (3.11)$$

По трем членам выражения (3.10) при  $\varepsilon = 1$  имеем

$$H \approx H_0 \frac{1 + (\beta_1 + \beta_2)}{1 + \beta_2} \quad (3.12)$$

$$\beta_1 = I_1 / H_0, \quad \beta_2 = -H_2 / H_1$$

В таблице приведены результаты вычисления параметра  $H$  и, приведенные в [22, с. 804], данные для пластин с различным отношением сторон  $a/b$  при  $\nu = 0,3$ . Здесь также приведены значения относительных ошибок  $\delta$  в процентах.

$a/b$	1	1,5	2	3
Решение [22]	2,36	2,30	2,19	1,72
$I_0$	1,76 $\delta = 25,3\%$	1,7 $\delta = 25,7\%$	1,64 $\delta = 25,1\%$	1,54 $\delta = 10,5\%$
$I_0 + I_1$	2,30 $\delta = 2,5\%$	2,11 $\delta = 8,7\%$	1,96 $\delta = 10,5\%$	1,71 $\delta = 0,6\%$
Формула (3.10)	2,18 $\delta = 2,41\%$	2,17 $\delta = 10,1\%$	1,91 $\delta = 12,9\%$	1,68 $\delta = 2,26\%$
Формула (3.11)	2,30 $\delta = 2,41\%$	2,19 $\delta = 4,87\%$	1,98 $\delta = 9,37\%$	1,07 $\delta = 0,43\%$
Формула (3.12)	2,36 $\delta = 0,16\%$	2,25 $\delta = 2,17\%$	2,02 $\delta = 7,94\%$	1,71 $\delta = 0,43\%$

Таким образом, два приближения в сочетании с аппроксимацией Паде дают отличные результаты. Однако важно, что даже нулевое и первое приближения вполне пригодны для достаточно точного решения.

4. Основные выводы проведенных исследований заключаются в следующем.

1. Упрощение Ишлинского–Лейбензона может рассматриваться как нулевое приближение некоторого асимптотического процесса.

2. Если погрешность нулевого приближения велика, то можно уточнять решение, достраивая следующие приближения и применяя к полученному отрезку ряда теории возмущений аппроксимацию Паде. Модифицированный таким образом метод Ишлинского – Лейбензона является во многих случаях полезным инструментом исследования устойчивости упругих систем.

3. Предлагаемый подход позволяет находить критические усилия по простым формулам, минуя этап решения трансцендентных уравнений.

В целом можно считать оправданным утверждение работы [15]: "Применительно к исследованию устойчивости тонкостенных элементов конструкций применение приближенного подхода [1, 2] является обоснованным, если ограничиться точностью вычислений критических нагрузок, соответствующих точности гипотез Киргхофа – Лява". С другой стороны [14]: "Применение к явлению внутренней и поверхностной неустойчивости приближенного подхода [1, 2] приводит к результатам, которые не согласуются с соответствующими результатами трехмерной линейризованной теории устойчивости деформируемых систем". Поэтому дальнейшее приложение развитого в настоящей статье подхода к этим задачам представляется актуальным.

Авторы глубоко признательны профессору Н.А. Алфутову за ряд ценных замечаний.

Работа частично поддержана Международной Соросовской Программой поддержки образования в области точных наук ISSEP (грант № SPU 061002).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопроса об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
2. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферических и цилиндрических оболочек. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1951. С. 50–86.
3. *Алиджанов М.Г.* Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. Алма-Ата: Наука, 1982. 270 с.
4. *Ершов Л.В.* О постановке задач устойчивости горных выработок // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 2. С. 305–307.
5. *Войцеховская Н.Ф.* Устойчивость цилиндрических оболочек с точки зрения математической теории упругости // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 59–63.
6. *Ершов Л.В., Ивлев Д.Д.* О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 8. С. 149–152.
7. *Легеня И.Д.* Об устойчивости толстой прямоугольной свободно-опертой плиты под действием сжимающих нагрузок // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 4. С. 776–779.
8. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К.* Теория процесса складкообразования в толще горных пород (математическое описание). Алма-Ата: Наука, 1968. 121 с.
9. Теория складкообразования в земной коре // Под ред. *Ж.С. Ержанов, А.К. Егоров, И.А. Гарагаш* и др. М.: Наука, 1975. 240 с.
10. *Gendelman O.V., Manevitch L.I.* Local buckling of reinforced cylindrical shells // VII Sympozjum Staceczności Konstrukcji. Bielsko-Biala, 7–9 gmdnia 1994r. С. 27–31.
11. *Гузь А.Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка. 1971. 276 с.
12. *Гузь А.Н., Скорыхин А.Н.* Трехмерная теория неупругой устойчивости // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 7. С. 3–22; № 8. С. 3–27.
13. *Гузь А.Н.* О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Внутренняя неустойчивость // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 11. С. 3–17.

14. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Поверхностная устойчивость // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 1. С. 24–35.
15. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Устойчивость элементов конструкций // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 2. С. 3–17.
16. Бердичевский В.Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек // ПММ. 1979. Т. 43. № 4. С. 664–687.
17. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
18. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
19. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
20. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1982. 502 с.
21. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3 / Под ред. И.Л. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
22. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Пластины, диски, балки–стенки (прочность, устойчивость и колебания). Киев: Госстройиздат УССР, 1959. 849 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
2.06.1997