МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

УДК 539.374

© 2001 г. Е.А. ДАВЫДОВА, А.Н. САХАРОВ

ТЕЧЕНИЕ ИЗОТРОПНО-УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ

В рамках теории изотропного упрочняющегося жесткопластического материала [1] рассматривается задача о плоском установившемся течении. В отличии от решения задач течения идеально пластических тел, где существуют интегралы уравнений равновесия – интегралы Генки, уравнения равновесия для упрочняющегося материала не интегрируются [2], что затрудняет использование прямых методов расчета (метода сеток и т.д.) – в процессе решения необходимо определять линии тока частиц для нахождения параметра упрочнения. Заметим, что параметр упрочнения $\varkappa$ определяется для частицы материала, следовательно для нахождения его значения в эйлеровой системе координат необходимо прослеживать всю историю его изменения на пути частицы в данную точку (x, y) пространства, т.е. необходим лагранжев подход для определения параметра упрочнения частиц материала. Оказывается, что эта трудность разрешается в случае установившегося движения [2]. Целью работы ставилось исследование течения в плоском канале и анализ решения задачи в условиях плоской деформации на основе теории изотропного упрочнения.

Предлагается использовать обобщение полуобратного метода [3], основанного на задании линий тока и определения характеристик течения из удовлетворения уравнениям равновесия.

Для этого введем в рассмотрение систему координат, образованную линиями тока $q_1 = q_1(x, y)$ и линиями ортогональными к ним $q_2 = q_2(x, y)$ с параметрами $H_1 = H_1(q_1, q_2)$, $H_2 = H_2(q_1, q_2)$, $dS_1 = H_1 dq_1$, $dS_2 = H_2 dq_2$, удовлетворяющими уравнению Ламе [4]:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)=0 \tag{1}$$

Запишем уравнения равновесия в координатах q_1, q_2:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2\sigma_{11})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\sigma_{12})+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\sigma_{12}-\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\sigma_{22}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_1\sigma_{12})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\sigma_{22})+\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\sigma_{12}-\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\sigma_{11}=0$$

Соотношения Коши для скоростей деформации

$$e_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1},\quad e_{12}=\frac{H_1}{2H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v}{H_1}\right) \tag{3}$$

$$e_{22}=\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}v,\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

Здесь e_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров скоростей деформаций и напряжений, определенные в координатах q_1, q_2. Введем угол γ между направлением линии тока и линией скольжения и воспользуемся подстановкой Леви аналогично случаю идеальной пластичности

$$\sigma_{11} = \sigma + T\sin 2\gamma, \quad \sigma_{22} = \sigma - T\sin 2\gamma, \quad \sigma_{12} = T\cos 2\gamma, \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{4}$$

Тогда будем иметь

$$e_{11} = \dot{\varkappa}\sin 2\gamma, \quad e_{22} = -\dot{\varkappa}\sin 2\gamma, \quad e_{12} = \dot{\varkappa}\cos 2\gamma \tag{5}$$

$$2T = [\sigma_{12} + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2]^{1/2}$$

$$\dot{\varkappa} = (\tfrac{1}{2} e_{ij}^p e_{ij}^p)^{1/2} = (e_{12}^2 + \tfrac{1}{4}(e_{11} - e_{22})^2)^{1/2}$$

Из условия несжимаемости $e_{11} + e_{22} = 0$ и соотношения Коши (3) для деформаций следует выражение для модуля вектора скорости $v = F(q_2)/H_2$.

Для угла γ из (3) и (5), следует

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = \frac{H_1}{2\partial H_2 / \partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \ln \frac{H_1 H_2}{F(q_2)} \tag{6}$$

Параметр Одквиста $\varkappa$ находится из условия стационарности $\partial\varkappa/\partial t = 0$ и (3), (5), откуда

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial q_1} = -\frac{1}{\sin 2\gamma} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1}, \quad \gamma \neq 0 \tag{7}$$

Итак имеем систему 5 уравнений: (1), (2), (6), (7) относительно 5 неизвестных σ, $\varkappa$, γ, H_1, H_2, которая включает в себя неизвестную функцию $F(q_2)$ в уравнении (6). Краевые условия на стенке канала зададим в виде [5]:

$$v_n \big|_\Gamma = 0$$

$$\tau_{rn} = T(\varkappa)\cos 2\delta \quad (0 < \delta \leqslant \pi/4)$$

где δ – параметр, характеризующий шероховатость стенок канала.

Рассмотрим частный случай $\gamma = \gamma(q_2)$, отвечающий условию пропорционального изменения тензора скоростей деформации во все время движения частицы.

При этом условии существуют следующие частные решения уравнений (6) и (1):

$$H_1 = \partial H_2(q_1)/\partial q_1, \quad H_2 = H_2(q_1) \tag{8}$$

$$H_1 = \frac{\partial f(q_1)}{\partial q_1}\varphi(q_2), \quad H_2 = \frac{1}{A} f(q_1)\frac{\partial\varphi(q_2)}{\partial q_2}, \quad A = \text{const} \tag{9}$$

Для такого течения в [6] найдены все пары координатных линий (q_1, q_2), соответствующие ортогональным системам координат, параметры Ламе которых удовлетворяют условиям (8), (9).

Первый случай соответствует классическому плоскому конфузору с прямолинейными стенками. Во втором – конфузор образован логарифмическими спиралями.

Таким образом рассматриваются две задачи:

(A). *Течение материала в сходящемся канале с прямолинейными шероховатыми стенками, где линии тока $q_1 = r$ – лучи, направленные к центру.*

В полярной системе координат (r, θ), $H_1 = 1$, $H_2 = r$ и уравнения равновесия (2) с учетом (4) принимают вид

$$\sigma_{,r} + (T\sin 2\gamma)_{,r} + \frac{2T}{r}\sin 2\gamma + \frac{1}{r}(T\cos 2\gamma)_{,\theta} = 0 \tag{10}$$

$$\sigma_{,\theta} + 2T\cos 2\gamma - (T\sin 2\gamma)_{,\theta} + r(T\cos 2\gamma)_{,r} = 0$$

Интегрируя (7), имеем

$$\varkappa(r,\theta) = -\frac{1}{\sin 2\gamma}\ln\left(\frac{\psi(\theta)}{r}\right) \tag{11}$$

$$\upsilon = -F(\theta)/r \tag{12}$$

$$\operatorname{ctg}(2\gamma) = -\tfrac{1}{2}F_{,\theta}(\theta)/F(\theta) \tag{13}$$

Из уравнений равновесия (10) дифференцированием исключаем σ:

$$2r(T\sin 2\gamma)_{,r\theta} + (T\cos 2\gamma)_{,\theta\theta} + 2(T\sin 2\gamma)_{,\theta} - r^2(T\cos 2\gamma)_{,rr} - 3r(T\cos 2\gamma)_{,r} = 0$$

Учитывая, что слагаемые с τ_s не вносят качественных изменений в решение, условие упрочнения принимаем в виде $T = C\varkappa^{\alpha}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Из (11) следует

$$T = -C\sin^{-\alpha}(2\gamma)\ln^{\alpha}\frac{\psi(\theta)}{r}$$

Подставляем в уравнение равновесия и используем метод разделения переменных. Учитывая, что r входит лишь в множители вида $\ln^{\nu}(\psi(\theta)/r)$ ($\nu = \alpha, \alpha - 1, \alpha - 2$), приравниваем коэффициенты при различных степенях $\ln(\psi(\theta)/r)$:

$$\nu = \alpha\colon\ C[(\sin^{-\alpha}2\gamma\cos 2\gamma)_{,\theta\theta} + 2(\sin^{1-\alpha}2\gamma)_{,\theta}] = 0$$

$$\nu = \alpha - 1\colon\ 2C\alpha[(\sin^{1-\alpha}2\gamma)_{,\theta} - \Phi[(\sin^{-\alpha}2\gamma\cos 2\gamma)_{,\theta} + \sin^{1-\alpha}2\gamma] - \frac{\Phi_{,\theta}}{2}\cos 2\gamma\sin^{-\alpha}2\gamma -$$

$$-\cos 2\gamma\sin^{-\alpha}2\gamma] = 0 \tag{14}$$

$$\nu = \alpha - 2\colon\ C\alpha(\alpha - 1)[\Phi^2 - 2\Phi\operatorname{tg}2\gamma - 1] = 0$$

$$\Phi(\theta) = \psi_{,\theta}(\theta)/\psi(\theta)$$

Краевые условия: $\cos 2\gamma|_{\pm\beta} = \cos 2\delta$. Рассмотрим три случая:

(*1*) $\alpha = 0$ – идеальная пластичность.

Из (14) имеем

$$(\cos 2\gamma)_{,\theta\theta} - (2\sin 2\gamma)_{,\theta} = 0 \tag{15}$$

Интегрируя (15) и (13), получаем

$$F(\theta) = \frac{C_1}{\sin 2\gamma + C_0}$$

Откуда сразу следует выражение для скорости

$$\upsilon = -\frac{C_1}{2(\sin 2\gamma + C_0)}$$

Из краевых условий следует уравнение для определения C_0:

$$\beta - \delta + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{(1 - 1/C_0^2)^{1/2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1 + 1/C_0}{(1 - 1/C_0^2)^{1/2}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\delta + 1/C_0}{(1 - 1/C_0^2)^{1/2}}\right)$$

Решение этого уравнения существует всегда.

(*2*) $\alpha = 1$ – линейное упрочнение.

Имеем систему уравнений:

$$(\operatorname{ctg}2\gamma)_{,\theta\theta} = 0$$

$$2\Phi(\operatorname{ctg}2\gamma)_{,\theta} + \Phi_{,\theta}\operatorname{ctg}2\gamma + 2\operatorname{ctg}2\gamma = 0$$

Решение будет таким

$$\operatorname{ctg}2\gamma = C^*\theta$$

$$\ln\Psi = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{1+A_0} + \dfrac{M\theta^1 - A_0}{1-A} + M_1, & A_0 \neq 1 \\ M\ln|\theta|, & A_0 = 1 \end{cases}$$

$$A_0 = 2(1 + 1/C^*)$$

где C^*, M, M_1 – константы. Подставляя решение в уравнение равновесия, можем найти выражение для гидростатического давления. Из (13) и (12) следует выражение для скорости $v = -(v_0/r)\exp(-C^*\theta^2)$. Учитывая краевые условия, находим $C^* = \operatorname{ctg}2\delta/\beta$.

(*З*) при $\alpha \in (0, 1)$. Решая первое уравнение системы (14), находим два корня:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}, \quad \Phi_2 = \frac{\sin 2\gamma - 1}{\cos 2\gamma}$$

Подставляя выражение для $\Phi = \Phi_1$ в третье уравнение (14), получим

$$\gamma_{,\theta}\left(2\alpha\frac{\cos^2 2\gamma}{\sin 2\gamma} + \sin 2\gamma + 1\right) = 1 + \sin 2\gamma \tag{16}$$

При $\Phi = \Phi_2$ из (14) находим

$$\gamma_{,\theta}\left(1 - \sin 2\gamma - 2\alpha\cos^2 2\gamma - 2\alpha\frac{\cos^2 2\gamma}{\sin 2\gamma}\right) = 1 - \sin 2\gamma \tag{17}$$

Из второго уравнения системы (14):

$$\sin^{-(1+\alpha)} 2\gamma[2\gamma_{,\theta}(\sin^2 2\gamma + \alpha\cos^2 2\gamma) - 2\sin^2 2\gamma] = C_2 \tag{18}$$

Подставляя в (18) $\gamma_{,\theta}$, выраженную из (16), получим

$$C_0 = \sin^{-(1+\alpha)} 2\gamma\left[\frac{(\sin^2 2\gamma + \alpha\cos^2 2\gamma)(\cos^2 2\gamma + \sin 2\gamma + 1)}{\cos^2 2\gamma(\alpha + \sin 2\gamma)} - 2\sin^2 2\gamma\right]$$

т.е. уравнение типа $f(\gamma, \alpha) = \text{const}$, следовательно его решение: $\gamma(\alpha) = \text{const}$. Аналогичным образом может быть рассмотрен случай $\Phi = \Phi_2$. В силу симметрии течения $\gamma|_{\theta=0} = \pi/4$ такое решение существует только в случае гладких стенок канала ($\delta = \pi/4$). Линии скольжения – логарифмические спирали.

Заметим, что решение $\gamma = \text{const} \neq \pi/4$ соответствует задаче о сдвиговом течении между наклонными шероховатыми плитами.

(*В*). *Течение материала в конфузоре с шероховатыми стенками, образованными логарифмическими спиралями.* Подставляя (9) в уравнения равновесия (2) и исключая дифференцированием σ, получим

$$\left[2T' - 2T(\cos 2\gamma + \sin 2\gamma) - \frac{\varphi}{\varphi_{,2}}(T\cos 2\gamma)_{,2}\right]_{,2} + \frac{\varphi_{,2}}{\varphi}\left[2T'(1 - \operatorname{ctg}2\gamma) + T''\frac{\cos 2\gamma}{\sin^2 2\gamma}\right] = 0 \tag{19}$$

Здесь и далее $\partial/\partial q_i = a_{,i}$, $dT/d\varkappa = T'$.

Принимаем условие упрочнения в виде $T = C\varkappa^\alpha$ ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$). Интегрируя (7) с учетом (9), получаем выражение

$$\varkappa = -\frac{1}{\sin 2\gamma}\ln[f(q_1)\xi(q_2)]$$

Таким образом, $T = -\sin^{-\alpha}2\gamma\ln^\alpha[f(q_1)\xi(q_2)]$.

Подставляем выражение для T в (19) и используем метод разделения переменных. Учитывая, что функция $f(q_1)$ входит лишь в множители вида $\ln^{\nu}[f(q_1)\xi(q_2)]$ ($\nu = \alpha, \alpha-1, \alpha-2$), приравниваем коэффициенты при различных степенях к нулю.

Получим три уравнения:

$$\nu = \alpha - 2:\quad \alpha(\alpha-1)\left[\Phi^2 - 2\Phi\,\mathrm{tg}\,2\gamma\frac{\varphi_{,2}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_{,2}}{\varphi}\right)^2\right] = 0 \tag{20}$$

$$\nu = \alpha - 1:\quad \alpha\Phi_{,2}\left[\frac{\varphi}{\varphi_{,2}}\sin^{-\alpha}2\gamma\cos 2\gamma\right] + \Phi\left[\frac{\varphi}{\varphi_{,2}}\sin^{-\alpha}2\gamma\cos 2\gamma\right]_{,2} + \tag{21}$$

$$+2\alpha\Phi(\cos 2\gamma + \sin 2\gamma)\sin^{-\alpha}2\gamma - 2\alpha(\sin^{1-\alpha}2\gamma)_{,2} - 2\alpha\frac{\varphi_{,2}}{\varphi}\sin^{1-\alpha}2\gamma(1-\mathrm{ctg}\,2\gamma) = 0$$

$$\nu = \alpha:\quad \left[\frac{\varphi}{\varphi_{,2}}(\cos 2\gamma\sin^{-\alpha}2\gamma)_{,2}\right]_{,2} + 2[\sin^{1-\alpha}2\gamma + \sin^{-\alpha}2\gamma\cos 2\gamma]_{,2} = 0$$

$$\Phi(q_2) = \xi_{,2}(q_2)/\xi(q_2) \tag{22}$$

Краевые условия

$$\cos 2\gamma\,|_{q_2=\beta_0,\beta_1} = \cos 2\delta \tag{23}$$

Рассмотрим три случая:

а) при $\alpha \in (0, 1)$ из (20) уравнения следует

$$\Phi_1 = \frac{\varphi_{,2}}{A\varphi}\frac{\sin 2\gamma + 1}{\cos 2\gamma},\quad \Phi_2 = \frac{\varphi_{,2}}{A\varphi}\frac{\sin 2\gamma - 1}{\cos 2\gamma}$$

Рассматривая совместное решение уравнений (21), (22) для Φ_1 и Φ_2 получаем $\gamma(\alpha, A) = \mathrm{const}$.

В силу краевых условий $\gamma\,|_{q_2} = \delta$, $\gamma\,|_{q_2} = \pi/2 - \delta$ решение возможно лишь при $\delta = \pi/4$, т.е. для гладких стенок. Линии скольжения будут прямыми.

в) при $\alpha = 1$ имеем систему

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_{,2}}(\mathrm{ctg}\,2\gamma)_{,2}\right)_{,2} + 2(1 + A\,\mathrm{ctg}\,2\gamma)_{,2} = 0$$

$$A\left(\Phi\frac{\varphi}{\varphi_{,2}}\mathrm{ctg}\,2\gamma\right)_{,2} + \Phi\left[2(1 + A\,\mathrm{ctg}\,2\gamma) + A\frac{\varphi}{\varphi_{,2}}\frac{(\cos 2\gamma)_{,2}}{\sin 2\gamma} + \frac{\varphi}{\varphi_{,2}}\cos 2\gamma(\sin^{-1}2\gamma)_{,2}\right] + \tag{24}$$

$$+2\frac{\varphi}{A\varphi_{,2}}\mathrm{ctg}\,2\gamma - 2\frac{\varphi}{\varphi_{,2}} = 0$$

с краевыми условиями (23).

Чтобы решить эту систему относительно двух неизвестных $\Phi(q_2)$ и $\gamma(q_2)$ необходимо задать параметризацию для определения $\varphi(q_2)$.

Примем

$$H_1 = C_1\exp(aq_1 + bq_2),\quad H_2 = C_2\exp(aq_1 + bq_2) \tag{25}$$

которым соответствует семейство логарифмических спиралей, где C_1, C_2, a, b – константы.

Из (9) следует

$$C_1 = a, \quad C_2 = b, \quad A = 1/b \tag{26}$$

$$f = \exp(aq_1), \quad \varphi = \exp(bq_2)$$

Из второго уравнения (24) имеем

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = -\tfrac{1}{2}\exp(-2q_2) + C_1^* q_2 + C_2^*$$

где C_1^* и C_2^* находим из краевых условий

$$\gamma\,|_{q_2=\beta_0} = \delta, \quad \gamma\,|_{q_2=\beta_1} = \pi/2 - \delta$$

Зная ctg2γ, из первого уравнения (24) находим Ф. Из (6) следует

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varphi}{\varphi_{,2}} - \frac{F_{,2}\varphi}{F\varphi_{,2}}\right) \tag{27}$$

Из последнего равенства, учитывая (26), находим

$$F(q_2) = C_3 \exp\left(C_1^* q_2^2 + \tfrac{1}{2}\exp(-2q_2) + 2(C_2^* - 1)q_2\right)$$

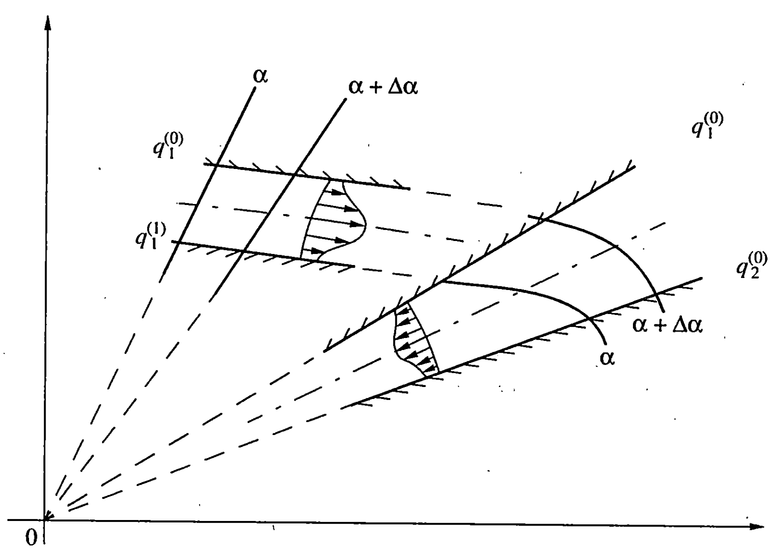
и выражение для скорости будет

$$v = \frac{C_3}{b}\exp\left(C_1^* q_2^2 + \frac{\exp(-2q_2)}{b} + g_2(2C_2^* - 2 - b) - aq_1\right)$$

c) при $\alpha = 0$ с учетом параметризации (25) из системы (20)–(22) и (27) получаем выражение для F и скорости v.

Отметим интересное свойство полученных решений задач (A) и (B).

Наблюдается дуализм: в случае течения по линиям тока, представляющими собой лучи (задача о классическом прямолинейном конфузоре), линии скольжения будут логарифмическими спиралями и наоборот, в задаче о течении в канале с логарифмическим профилем линии скольжения будут прямыми (фигура).



Подобный дуализм наблюдается и в случае сдвиговых течений при $\gamma(q_2) = \text{const}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
2. *Клюшников В.Д.* Плоское установившееся течение упрочняющегося жесткопластического материала // ДАН. 1988. Т. 303. № 4. С. 815–817.
3. *Киквидзе Д.А., Корякин Л.А., Сахаров А.Н.* Полуобратный метод решения задач установившегося течения жесткопластического материала с упрочнением // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 79–85.
4. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
5. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
6. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 175 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.02.1999