

УДК 539.374

© 2001 г. В.Л. ДИЛЬМАН, А.А. ОСТСЕМИН

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ С ДВУМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Исследуется напряженно-деформируемое состояние (НДС) мягкого поперечного слоя растягиваемой полосы в условиях плоской деформации. Предполагается, что слой имеет две ортогональные оси симметрии (вдоль и поперек полосы) и не является тонкой прослойкой, т.е. относительно деформации декартовой координатной сетки, нанесенной на сечение слоя, можно принять так называемую мультипликативную гипотезу. Вычислены компоненты тензора напряжения и показано, что в момент перед разрушением нормальные напряжения наиболее велики в центре слоя и убывают при перемещении как к свободным, так и контактными поверхностям, т.е. разрушение должно проходить вблизи контактных поверхностей, что согласуется с известными экспериментальными данными. Полученные результаты позволяют определить нагрузку, которую может выдержать соединение с мягкой прослойкой (например, бездефектный сварной шов трубы большого диаметра) и характер разрушения, и могут быть использованы для определения несущей способности стыковых сварных швов различных конструкций, машин, трубопроводов, и без существенных изменений перенесены на решение задач, связанных с осадкой полосы в кузнечно-штамповом производстве.

1. Введение. Как известно [1], разрушение, наступающее под действием постоянно возрастающей нагрузки, может быть хрупким (разрушение сколом) либо вязким, связанным с развитием пластических деформаций. Критерием вязкого разрушения можно принять выполнение условия

$$\sigma_i = \sigma_b \quad (1.1)$$

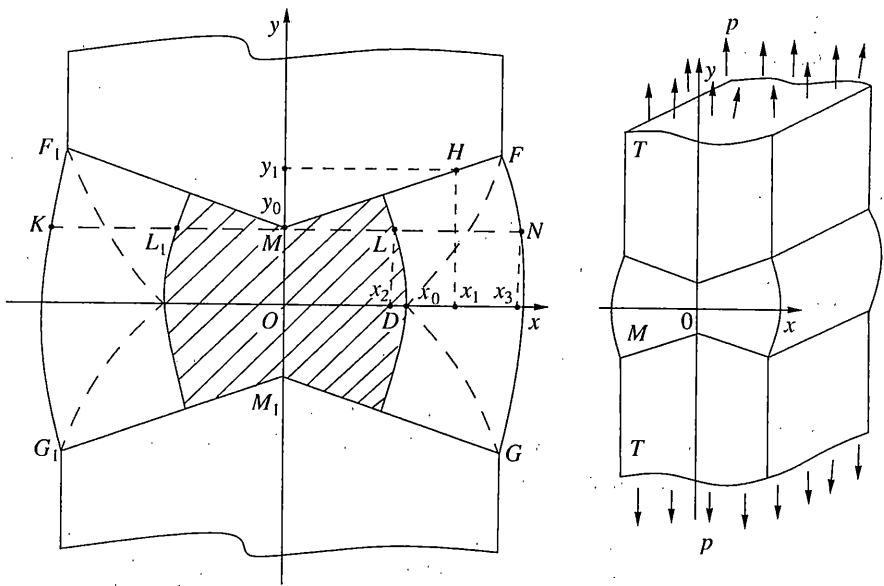
где σ_i , σ_b – интенсивность напряжений и временное сопротивление, на всей длине (т.е. в направлении оси Ox , фигура) мягкого слоя по наиболее слабому его продольному сечению (поперечному по отношению к полосе). При этом требуется, чтобы выполнялось неравенство [1]:

$$\sigma_{y \max} < R_{ms} \quad (1.2)$$

где R_{ms} – напряжение микроскола, $\sigma_{y \max}$ – наибольшее значение нормального напряжения σ_y в направлении растягивающего усилия P на данном сечении слоя. При вязком разрушении

$$P = 2l\bar{\sigma}_y \quad (1.3)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma_y dx \quad (1.4)$$



причем интеграл берется по слабому сечению. Если же условие (1.2) не выполняется, то разрушение происходит в зоне наибольших нормальных напряжений хрупко, сколом. Таким образом, важно знать не только среднелинейное значение σ_y (1.4), но и максимальное значение σ , как функции от x . В работе определяются значения σ_y в пластическом слое в результате приближенного решения полной системы уравнений пластического равновесия для случая плоской деформации, исследуется распределение σ_y по длине и ширине слоя, устанавливается местонахождение сечения слоя, наиболее опасного с точки зрения разрушения.

Одной из трудностей при изучении данной проблемы является недостаточность обычных краевых условий, вытекающих из существования свободных поверхностей и симметричности сечения слоя, для однозначного определения НДС внутренних точек слоя, так как распределение напряжений на контактной поверхности между мягким слоем и основным металлом неизвестно. Приходится использовать дополнительные гипотезы, предугадывающие внутреннее состояние среды. В [2] предполагалось, что касательные напряжения изменяются линейно по толщине прослойки, и что выполняется гипотеза плоских сечений об инвариантности семейства плоскостей $y = \text{const}$ при растяжении (сжатии). Здесь в качестве такого предположения применяется гипотеза о виде деформированной декартовой координатной сетки.

2. Гипотеза о продольных сечениях. Более прочный основной металл соединения, содержащего пластический слой, считается жестким, а при значительных напряжениях вовлекается, по предположению, в пластическую деформацию, но имеет более высокие предел текучести и временное сопротивление. При выводе основных формул материал пластического слоя предполагается идеально жесткопластическим и удовлетворяющим обычным в таких случаях допущениям [3]. Полученные на этой основе результаты переносятся на упрочняемые материалы (если упрочнение носит изотропный характер) заменой в условии полной пластичности предела текучести на временное сопротивление σ_b . Таким образом, применяется критерий вязкого разрушения (1.1). Ниже, в п. 3 дано более подробное пояснение возможности использовать гипотезу идеальной пластичности в изучаемой ситуации. НДС

пластической среды при плоской деформации определяется, как известно, системой уравнений

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{xy}/\partial x = 0 \quad (2.2)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (2.3)$$

$$\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\partial V_x/\partial x - \partial V_y/\partial y}{\partial V_x/\partial y + \partial V_y/\partial x} \quad (2.5)$$

Здесь σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора напряжений, V_x и V_y – (условная) скорость перемещения точек среды в направлениях Ox и Oy соответственно, k – пластическая постоянная. Носителем этих уравнений является область координатной плоскости (на фигуре область $FGM_1G_1F_1M$), интерпретируемая как сечение мягкого слоя.

Будем называть гипотезой продольных сечений предположение о характере деформирования координатных прямых

$$x = \text{const} \quad (2.6)$$

Весьма общим допущением такого вида является формула

$$V_x(x, y) = a(x)b(y) + c(x) \quad (2.7)$$

где функцию $b(y)$ можно трактовать как функцию "прогиба" вертикальной линии координатной сетки (2.6), $c(x)$ – как функцию "смещения" координатной линии (2.6), $a(x)$ – как "амплитуду прогиба". Здесь рассматривается частный случай гипотезы (2.7):

$$V_x(x, y) = a(x)b(y) \quad (2.8)$$

которая называется мультипликативной гипотезой – МГ. Формула (2.8) применяется, когда функции "смещения" и "прогиба" пропорциональны или когда смещение, определяемое по контактной поверхности, отсутствует. Эксперименты работы [4] свидетельствуют, что при растяжении пластического слоя прямоугольной или X-образной формы искажения координатной сетки удовлетворительно соответствуют формуле (2.8) – за исключением участков, близких к свободным поверхностям, или тонких прослоек, для которых условие (2.8) вдали от линии раздела течения следует заменять на условие

$$V_x(x, y) = a(x) + b(y) \quad (2.9)$$

Например, в решении Л. Прандтля [5] задачи о сжатии бесконечной полосы, которое можно использовать в задаче о сжатии тонкой прослойки между шероховатыми плитами, формула для вычисления V_x имеет форму (2.9).

Из соображений симметрии можно считать точку O на фигуре точкой раздела течения, а оси Ox и Oy – линиями раздела течения; имеются очевидные из симметрии краевые условия

$$V_x(0, y) = 0, \quad V_y(x, 0) = 0 \quad (2.10)$$

Из условия локального постоянства объема (2.4) и формулы (2.8), с учетом (2.10), следует

$$V_y(x, y) = -a'(x)B(y) \quad (2.11)$$

где $B(y)$ – первообразная от $b(y)$ такая, что

$$B(0) = 0 \quad (2.12)$$

Обозначив для краткости правую часть условия Леви – Мизеса (2.5) через $F(x, y)$, из (2.8) и (2.11) можно получить

$$F(x, y) = \frac{2a'(x)b(y)}{a(x)b'(y) - a''(x)B(y)} \quad (2.13)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на предположении, что левая часть (2.5) также удовлетворяет МГ, т.е. что функция (2.13) может быть представлена в виде произведения функций, одна из которых зависит только от x , а другая только от y . Это предположение является как бы конкурирующим с гипотезой о мультипликативности функции τ [6–8]. Гипотеза работ [6–8] дает согласующееся с экспериментами распределение функции τ не только для тонких прослоек, хорошо аппроксимируя вдали от точки раздела течения формулы Л. Прандтля; в окрестности точки раздела течения формулы [6–8] приближаются к результатам данной работы. У достаточно толстых слоев нет участка слоя с прандтлевским распределением напряжений; в этом случае предпочтительнее гипотезы данной работы. Иначе говоря, в работе рассматривается пластический слой, не являющийся тонкой прослойкой в том смысле, что его деформированное состояние удовлетворяет МГ. Из того, что левая часть (2.5) удовлетворяет МГ, следует мультипликативность функции $F(x, y)$; последнее выполняется при условии

$$b'(y) \pm \lambda^2 B(y) = 0 \quad (2.14)$$

где λ – некоторая положительная константа. Можно показать, что случай, когда в (2.14) взят знак плюс, соответствует сжатию слоя; этот случай в работе не рассматривается. Если взять знак минус, то (2.14) вместе с (2.12) дает решение (с точностью до постоянного множителя):

$$b(y) = \operatorname{ch} \lambda y \quad (2.15)$$

откуда видно, что вертикальные координатные линии прогибаются внутрь, приобретая форму, близкую к форме цепной линии. Параметр λ характеризует степень прогиба и зависит от относительной толщины слоя. При этом, как видно из (2.13) и (2.15):

$$F(x, y) = -\frac{2\lambda}{\operatorname{th}(\lambda y)} \frac{a'(x)}{a''(x) - \lambda^2 a(x)} \quad (2.16)$$

Введением обозначений

$$T(y) = \lambda^{-1} \operatorname{th}(\lambda y) \quad (2.17)$$

$$S(x) = -\frac{a''(x) - \lambda^2 a(x)}{a'(x)} \quad (2.18)$$

формула (2.16) переписывается в виде

$$F(x, y) = 2S^{-1}(x)T^{-1}(y) \quad (2.19)$$

Эксперименты работы [4] показывают, что прогиб вертикальных координатных линий невелик вплоть до разрушения, если наименьшая относительная толщина слоя не мала $y_0 = 0.3-0.5$. В этом случае параметр λ из (2.15) мал по сравнению с единицей, и можно считать

$$T(y) = y \quad (2.20)$$

(например, при $\lambda = 0,25$ и относительной толщине слоя в средней части слоя $y_0 = 0,7$ относительная ошибка в формуле (2.20) составляет, как легко видеть при разложении (2.17) в степенной ряд, около 1%). Для тонких прослоек прогиб вертикальных координатных линий значителен (см., например, рис. 194 на с. 317 в [5]), и равенство (2.20) является слишком грубым.

3. Вычисление компонент тензора напряжения. В обозначениях (2.17) и (2.18) уравнение (2.5) записывается в форме

$$\sigma_x - \sigma_y = 4\tau_{xy}S(x)T(y) \quad (3.1)$$

а условие пластичности (2.3) – в виде

$$\tau_{xy} = \pm \frac{S(x)T(y)}{\sqrt{4 + S^2(x)T^2(y)}} \quad (3.2)$$

В формуле (3.2) проявляется преимущество МГ для левой части формулы (2.5) по сравнению с МГ для τ работ [6, 7]; рост τ по формуле (3.2) при удалении от линий раздела течения $x = 0$ и $y = 0$ уменьшается, что соответствует любым экспериментам на растяжение или сжатие (для очень тонких прослоек можно считать, что τ в поперечном направлении (по оси Oy) растет практически линейно – убывание роста τ "не успевает" проявиться).

В дальнейшем будет ясно, что в (3.2) следует взять знак плюс. Из уравнений равновесия (2.1) и (2.2) следует

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \sigma_y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3)$$

После подстановки формул (3.1) и (3.2) для $\sigma_x - \sigma_y$ и τ_{xy} в (3.3) можно получить, выполнив необходимые действия и отбрасывая малые слагаемые, уравнение

$$S'' + 2S'S + \frac{3}{4}S^3 = 0 \quad (3.4)$$

Действительно, используя разложение $(4 + t^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{128}t^4 - \dots)$, $|t| < 2$, представим формулы (3.1) и (3.2) в виде $\sigma_x - \sigma_y = \pm 2(1 - S^2(x)T^2(y)/8 + \dots)$, $\tau_{xy} = \pm(S(x)T(y)/2 - S^3(x)T^3(y)/16 + \dots)$, а функцию $T(y)$, в силу (2.17), в виде суммы ряда $T(y) = y + \lambda^2 y^3/3 + 2\lambda^4 y^5/15 + \dots$. После подстановки этих выражений в (3.3) получим равенство

$$Ay + By^3 + Cy^5 + \dots = 0 \quad (3.5)$$

$$A = S''(x)/2 + S'(x)S(x) + 3S^3(x)/8 - \lambda^2 S(x)$$

$$B = 4\lambda^2 S'(x)S(x)/3 - \lambda^4 S(x)/3 - 5\lambda^2 S^3(x)/4 - 3(S'S^2)/16$$

Отбрасывая слагаемые, имеющие относительно y порядок три и выше, и учитывая, что $\lambda \ll 1$, получаем в первом приближении из (3.5) уравнение (3.4).

Так как на линиях раздела течения $\tau_{xy}(x, 0) = 0$, $\tau_{xy}(0, y) = 0$, функция S удовлетворяет условиям

$$\text{если } x > 0, \text{ то } S(x) > 0; \quad S(0) = 0 \quad (3.6)$$

в случае растяжения. Поэтому в (3.2) следует брать знак плюс. Решение задачи (3.4), (3.6) можно записать в форме

$$S(x) = A \left(\text{th}(Ax) - (Ax)^5 (3/80 - 1/35(Ax)^2 + \dots) \right) \quad (3.7)$$

где A – произвольная положительная постоянная. Будет показано, что при некоторых соотношениях между физическими и геометрическими параметрами, имеющими практический интерес, для всех x из области, где выполняется гипотеза (2.8), $Ax < 1$. Тогда с ошибкой менее 1% можно считать

$$S(x) = A \text{th}(Ax) \quad (3.8)$$

и поэтому из формулы (3.2) получается

$$\tau_{xy} = \frac{A \operatorname{th}(Ax)y}{\sqrt{4 + A^2 \operatorname{th}^2(Ax)y^2}} \quad (3.9)$$

Вычислим нормальные напряжения в пластическом слое для случая (3.8). Более общий случай (3.7) рассматривается аналогично, но приводит к еще более громоздким формулам. Записав (2.1) и (2.2) в виде

$$\sigma_x = -\int_0^x \frac{\partial \tau}{\partial y} dx + \varphi(y) \quad (3.10)$$

$$\sigma_y = -\int_0^y \frac{\partial \tau}{\partial x} dy + \psi(x) \quad (3.11)$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ – неизвестные функции одной переменной, из формулы (3.9) для τ_{xy} можно найти значения σ_x и σ_y с точностью до функций φ и ψ . С другой стороны

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{A}{\sqrt{4 + A^2 \operatorname{th}^2(Ax)y^2}} \quad (3.12)$$

как следует из (3.1) и (3.9). Сравнивая найденные по (3.10) и (3.11) выражения для нормальных напряжений с (3.12) при $x = 0$ и при $y = 0$, можно найти функции φ и ψ из (3.10), (3.11). Тогда

$$\sigma_x = -2 \int_0^x \frac{A \operatorname{th}(Ax) dx}{\sqrt{4 + A^2 y^2 \operatorname{th}^2(Ax)^3}} - 0,25 A^2 y^2 + c \quad (3.13)$$

$$\sigma_y = -\frac{2A^2 y^2}{\sqrt{4 + A^2 y^2 \operatorname{th}^2(Ax)}(2 + \sqrt{4 + A^2 y^2 \operatorname{th}^2(Ax)})} - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch} Ax) + 2 + c \quad (3.14)$$

где c – постоянная, требующая определения. Для ее нахождения обозначим через x_0 абсциссу точки D – вершины треугольника (в общем случае криволинейного) DFG (фигура), в котором реализуется поле напряжений, полностью определяемое контуром свободной границы. Рассмотрим для простоты случай прямолинейной свободной границы FG (фигура). Тогда во всех точках треугольника DFG (фигура) $\sigma_x = 0$, в частности, при $x = x_0$ $\sigma_x(x_0, 0) = 0$. С учетом этого из формулы (3.13) получается $c = \ln \operatorname{ch} Ax_0$. Тогда из (3.14) следует, что

$$\sigma_y = -\frac{A^2}{4} y^2 \left(1 - \frac{3A^2}{16} y^2 \operatorname{th}^2 Ax + \dots \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(Ax)}{\operatorname{ch}(Ax_0)} + 2. \quad (3.15)$$

Анализируя полученные формулы, можно заметить, что на поперечной оси симметрии слоя (продольной оси полосы) Oy (фигура), т.е. при $x = 0$:

$$\sigma_y = -A^2 y^2 / 4 + 2 + \frac{1}{2} \ln \operatorname{ch}(Ax_0) \quad (3.16)$$

а на продольной оси симметрии слоя (оси Ox), т.е. при $y = 0$:

$$\sigma_y = 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(Ax)}{\operatorname{ch}(Ax_0)} \quad (3.17)$$

Из формул (3.16) и (3.17) видно, что нормальное напряжение σ_y , при котором создаются условия для вязкого разрушения, максимально на продольной оси симметрии

слоя Ox , и уменьшается при приближении к контактным поверхностям. Этот вывод подтверждается экспериментами работы [4], в которых разрушение растягиваемых образцов происходит вблизи контактной поверхности. Опыты проводились со сварными образцами со стыковыми прямоугольными или X-образными мягкими швами, минимальная относительная толщина которых составляла величину порядка 0,3–0,5 и больше. Для таких мягких слоев применима излагаемая теория. Таким образом, слабое продольное сечение слоя располагается вблизи контактной поверхности. Например, в случае, изображенном на фигуре, в качестве слабого сечения можно принять прямую KN , и для вычисления предельного усилия по формулам (1.3), (1.4) нужно положить $y = y_0$, где $2y_0$ – относительная толщина слоя в средней части. Из полученных формул можно заключить, что разрушение в средней части слоя (по оси Ox) возможно лишь, если слой ослаблен вырезами, дефектами и т.п. или настолько широк, что контактное упрочнение не проявляется и в средней части слоя возникает шейка.

В начале п. 2 было замечено, что построение теории основано на предположении об идеальной пластичности слоя в целом (с заменой предела текучести σ_T на другую пластическую постоянную материала слоя). Эта гипотеза требует более подробного пояснения, так как ясно, что НДС какого-либо участка слоя существенно зависит от момента времени после начала действия нагрузки и расположения этого участка, и может быть упругим, может быть моментом начала пластического течения, или развитой пластической деформацией устойчиво упрочняемого материала, или характеризоваться потерей пластической устойчивости при либо равномерном неустойчивом деформировании либо развитии шейки. Общую картину характера деформации слоя под возрастающей растягивающей нагрузкой можно представить следующим образом. Сначала вовлекаются в пластическую деформацию участки, составляющие треугольники напряженного состояния, определяемого свободными границами (DFG на фигуре), а остальная часть слоя деформируется упруго. Затем пластическое течение захватывает участки выше/ниже этих треугольников, и, обтекая центр слоя, продвигается вдоль контактной поверхности к оси Oy (фигура). В последнюю очередь пластической деформации подвергается центральная часть слоя (заштрихована на фигуре). В это время остальная часть слоя деформируется устойчиво – за счет упрочнения. При продолжающемся возрастании растягивающей нагрузки в той же последовательности происходит потеря пластической устойчивости участков слоя, и начинается равномерное неустойчивое деформирование (т.е. деформирование с неконтролируемой скоростью при постоянных или уменьшающихся напряжениях [9]). Разрушение некоторое время не происходит за счет средней части слоя, продолжающей благодаря упрочнению устойчиво деформироваться. В последний момент перед разрушением поведение материала слоя в целом близко к идеально пластическому, потому что, как было отмечено, упрочнение прекращается при равномерно неустойчивом деформировании, и в уравнении (2.3) в качестве постоянной k можно взять σ_b , если принять критерием разрушения условие (1.1).

При вычислении коэффициента A предполагается, что наибольшее значение касательного напряжения на контактной поверхности известно

$$\max \tau_{xy}(x, y) = \alpha k, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.18)$$

когда точка (x, y) принадлежит контактной поверхности. В силу вовлечения более твердой части соединения в пластическую деформацию касательные напряжения не достигают предела текучести k , поэтому в (3.18) $\alpha < 1$. Пусть наибольшее значение τ достигается (фиг.) в точке $H(x_1, y_1)$: $\tau_{xy}(x_1, y_1) = \alpha k$. Тогда из формулы (3.8):

$$A(\text{th}(Ax_1))y_1 = 2\alpha / \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (3.19)$$

Таким образом, A находится решением трансцендентного уравнения (3.19). Большой интерес с практической точки зрения представляет случай малой механической неоднородности соединения, когда $\alpha = 0.1-0.2$. Рассмотрим этот случай. Для $x \in [0, 1.5]$ воспользуемся приближенным равенством $\text{th } x \approx 3x(x^2 + 3)^{-1}$. Применяя его к (3.19), получим

$$A^2 = 3\beta x_1^{-1}(3y_1 - x_1\beta)^{-1} \approx \beta x_1^{-1} y_1^{-1}, \quad \beta = 2\alpha(1 - \alpha^2)^{-0.5} \quad (3.20)$$

Из (3.20) видно, что при малых α число β также невелико; тогда можно считать $Ax_1 < 1$, так как числа x_1 и y_1 приблизительно одного порядка. Неравенство $Ax_1 < 1$ позволяет заменить формулу (3.7) на более простую формулу (3.8). Заметим, что ошибка в выборе значения x_1 даже на несколько десятков процентов не очень существенна. С одной стороны, касательные напряжения на удалении от центра, имеющем порядок ширины слоя, замедляют рост и практически стабилизируются, с другой стороны, заметные изменения аргумента функции $\text{th}(Ax)$ в силу свойств тангенса, для значений x порядка A^{-1} и больше мало влияют на величину этой функции. Так как, очевидно, x_0 и x_1 — числа одного порядка, можно, в силу сказанного, считать $x_0 \approx x_1$. Тогда величина y_1 однозначно определяется контуром слоя, по величине x_0 .

4. Вычисление предельного усилия. Рассмотрим полосу, ослабленную мягким слоем, имеющим в сечении фигуру с двумя осями симметрии и будем считать, что наименьшую ширину слой имеет в центре (по оси Oy , фигура). Как было отмечено, вслед за зонами, примыкающими к свободному краю, в пластическую деформацию вступают участки, близкие к контактной линии, причем граница пластической зоны движется от свободных поверхностей к центру и с некоторого места начинает проявляться упрочнение. На фигуре KN — наиболее слабое сечение, его часть L_1L входит в область упрочнения (заштриховано на фигуре). Граница этой области (штрихи на фиг. 1) находится из уравнения

$$\sigma_y(x, y) = 2 \quad (4.1)$$

где σ_y вычислено в (3.15) и проходит на оси Ox через точку D (фигура). Приближенное представление о форме и размерах этой области можно получить, отбросив в разложении в степенной ряд функций из правой части формулы (3.15), слагаемые четвертой степени и выше по x и по y . Тогда из (4.1) получается уравнение

$$x^2/x_0^2 + y^2/x_0^2 = 1 \quad (4.2)$$

С ошибкой, не превышающей несколько процентов, из (4.2) можно найти абсциссу x_2 точки L (фигура):

$$x_2 = \sqrt{x_0^2 - y_0^2} \quad (4.3)$$

начиная с которой на расчетном сечении KN проявляется (в сторону оси Oy) контактное упрочнение. Предельное усилие зависит от характера разрушения. Из (3.15):

$$\sigma_{y\max} = 2 + \frac{1}{2} \ln \text{ch } Ax_0 \quad (4.4)$$

Для нетонких слоев со средней относительной толщиной 0.3 и больше можно показать, используя формулы (4.4) и (3.20), что

$$\sigma_{y\max} = 2 + \frac{x_0\beta}{4y_1} = 2 + \frac{x_0\alpha}{2y_1\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (4.5)$$

Если принять во внимание возможные значения R_{ms} [10], можно заметить, что в таком случае выполняется условие (1.2) вязкого разрушения, и предельное усилие можно найти по формулам (1.3) и (1.4). Учитывая, что на участке L_1L σ_y вычисляется по формуле (3.14), а вне его постоянно, из (1.3), (1.4) следует $P = 2 \int_0^{x_2} (\sigma_y(x, y_0) - 2) dx + 4x_3$,

где x_3 — координата точки N (фигура). Подставляя сюда выражение для σ_y (3.14)

и считая приближенно $x_0 \approx x_1$, из формул (3.20) и (4.3), после отбрасывания малых слагаемых, можно получить

$$\bar{\sigma}_y = \frac{P}{2x_3} = \frac{2\alpha(x_0^2 - y_0^2)^{3/2}}{3\sqrt{1-\alpha^2}x_0x_3y_1} + 2 \quad (4.6)$$

Для X-образной прослойки без усиления с внутренней относительной толщиной κ и внешней $q\kappa$, $x_0 = 1 - q\kappa$, $y_1 = q\kappa(1 - \kappa + q\kappa)$, $x_3 = 1$, и формула (4.6) приобретает вид

$$\bar{\sigma}_y = \frac{2\alpha}{3\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{((1-q\kappa)^2 - 0.5q^2\kappa^2(1-\kappa+q\kappa)^2)^{3/2}}{(1-q\kappa)q\kappa(1-\kappa+q\kappa)} + 2 \quad (4.7)$$

У прямоугольной прослойки $q = 1$, и формула (4.7) упрощается.

Исследуем границы применимости полученных формул (4.6) и (4.7). Как видно из уравнения (4.2), в продольном сечении слоя на расстоянии x_0 от оси Ox , если такое сечение есть в слое, контактное упрочнение отсутствует. Таким образом, если (приближенная оценка с ошибкой в несколько процентов):

$$y_0 > x_0 \quad (4.8)$$

или, более точно, по формуле (3.16) $y_0 \geq \sqrt{2}A^{-1}\sqrt{\ln \operatorname{ch}(Ax_0)}$, прочность соединения определяется прочностью материала мягкого слоя и длиной слоя (шириной полосы по мягкому слою), т.е. упрочнение за счет близости более твердых частей соединения не проявляется. Например, для X-образной прослойки с внутренней относительной толщиной κ и наружной относительной толщиной $q\kappa$, $y_0 = \kappa$, $x_0 = 1 - q\kappa$, и условие (4.8) можно записать в виде

$$\kappa \geq \kappa_* = (1 + q)^{-1} \quad (4.9)$$

В частности, для прямоугольной прослойки условие отсутствия контактного упрочнения $\kappa \geq 0.5$. Из (4.9) видно, что чем больше коэффициент q раскрытия X-образной прослойки, тем меньше значение κ_* , при котором не действует контактное упрочнение. Например, если $q = 2$, то $\kappa_* = 0.33$; если $q = 3$, то $\kappa_* = 0.25$. Когда условие (4.9) не выполнено, то реализуется контактное упрочнение, и $\bar{\sigma}_y$ может быть приближенно вычислено по формуле (4.6), для X-образных слоев – по формуле (4.7).

5. Исследование деформированного состояния слоя. Рассмотрим лишь случай малых λ . Из (2.18) и (3.8) получается уравнение для нахождения функции $a(x)$, введенной в (2.8): $a''(x) + A \operatorname{th}(Ax)a'(x) = 0$, причем в силу (2.10) $a(0) = 0$. Эта задача имеет решение

$$a(x) = C \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(Ax)) \quad (5.1)$$

где C – произвольная постоянная. Тогда, в силу (2.8) и (2.11) для (условных) скоростей перемещений выполняются соотношения

$$V_y \sim y \operatorname{ch}(Ax)^{-1}, \quad V_x \sim -\operatorname{sh}(Ax)/A \quad (5.2)$$

с точностью до положительного коэффициента пропорциональности, так как при малых λ $b(y) \approx 1$ (формула (2.15)), $a'(x) = AC/\operatorname{ch}(Ax)$ (следует из формулы (5.1)). Линии тока пластического течения находятся из уравнения $dy/dx = V_y/V_x$. В данном случае из (5.2) следует $dy/dx = -Ay \operatorname{ch}^{-1}(Ax)\operatorname{sh}^{-1}(Ax)$. Общее решение этого уравнения $y = C/\operatorname{th}(Ax)$, где C – произвольная постоянная, A можно найти по формуле (3.20).

Выводы. 1. Для исследования напряженно-деформированного состояния относительно не тонкого пластического слоя ($\kappa \geq 0.2 - 0.3$, κ – относительная толщина слоя) принята мультипликативная гипотеза о скорости деформации плоских поперечных (продольных по отношению к полосе, содержащей слой) сечений слоя, не противоречащая наблюдаемым при растяжении деформациям координатной сетки [4].

2. Получены новые формулы для вычисления компонент тензора напряжений в зависимости от координат точки слоя, находящегося под растягивающей нагрузкой, в момент начала пластического течения. Формулы для вычисления касательных напряжений хорошо согласуются с общеизвестными экспериментальными данными о распределении касательных напряжений по длине слоя.

3. На основании полученных формул для нормальных напряжений установлено, что нормальные напряжения не постоянны по ширине слоя, а возрастают от контактных поверхностей к середине слоя. Отсюда следует, что наиболее слабые и подверженные риску разрушения сечения слоя располагаются вблизи контактных поверхностей, т.е. более твердых частей соединения (полосы). Этот вывод подтверждается экспериментами на разрушение пластического слоя средней относительной толщины [4] под действием растягивающей нагрузки.

4. Формулы для вычисления нормальных напряжений позволили на качественном уровне описать картину последовательного вовлечения различных участков сечения слоя (фигура) в пластическое деформирование. Отмечено, что в последнюю очередь пластической деформации подвергается участок в центре слоя (заштрихован на фигуре).

5. Найдены приближенные уравнения границы зоны, материал которой подвергается упрочнению вследствие наличия в соединении более твердой части (контактному упрочнению). Получена приближенная формула относительной толщины слоя в его средней части, в которой вообще не возникает контактное упрочнение.

6. Из выведенных в работе формул для нормальных напряжений следует, что, в отличие от инженерных решений, нормальные напряжения по длине слоя изменяются нелинейно, что существенно для вычисления наибольшего значения $\sigma_{y \max}$. Сравнением $\sigma_{y \max}$ с предельной величиной сопротивления материала слоя микросколу [10] установлено, что для рассматриваемого в работе не тонкого слоя характерен вязкий тип разрушения.

7. Получены новые формулы для вычисления условных скоростей перемещений точек слоя v_x и v_y и уравнения линий тока.

8. Метод работы без существенных изменений может быть перенесен на случай, когда слой подвержен сжимающей нагрузке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винокуров В.А., Куркин С.А., Николаев Г.А. Сварные конструкции. Механика разрушения и критерии работоспособности. М.: Машиностроение, 1996. 576 с.
2. Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластичной прослойки // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 63–67.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. Ерофеев В.П. Исследование влияния геометрии мягких прослоек сварных соединений на их напряженно-деформированное состояние и прочность: Дис... канд. техн. наук: 05.04.05. Челябинск, 1972, 218 с.
5. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
6. Остсемин А.А., Дильман В.Л. О сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами // Пробл. прочности. 1990. № 7. С. 107–113.
7. Дильман В.Л., Остсемин А.А. Напряженное состояние и прочность сварных швов труб большого диаметра // Химическое и нефтегазовое машиностроение. 1998. № 4. С. 16–20.
8. Дильман В.Л., Остсемин А.А. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 141–148.
9. Ковальчук Б.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек // Пробл. прочности. 1983. № 5. С. 11–16.
10. Остсемин А.А., Шахматов М.В., Ерофеев В.В., Саидов Г.И. Определение сопротивления микросколу материалов с использованием диаграмм пластичности. // Пробл. прочности. 1984. № 3. С. 105–107.