МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

УДК 539.374

© 2001 г. А.В. ГНОЕВОЙ, Д.М. КЛИМОВ, В.М. ЧЕСНОКОВ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕЧЕНИЯ БИНГАМОВСКИХ СРЕД

Получена система уравнений для исследования течения бингамовских сред. Эта система уравнений отличается от ранее известных тем, что содержит неоднозначность только в одном – реологическом уравнении (основной реологический закон деформирования среды). Неоднозначность в реологическом уравнении устраняется из физических соображений или механической постановки задачи. Полученные уравнения позволяют исследовать течение бингамовской среды во всей области течения, то есть как в области сдвигового течения, так и в области пластического течения. Из полученных уравнений, как частные случаи, следуют уравнения течений вязких сред (ньютоновских жидкостей) и идеально пластических сред. Эти частные случаи получаются из общих уравнений путем приравнивания к нулю соответствующих реологических констант. Приведен пример использования полученных уравнений для исследования течения бингамовской среды между параллельными пластинами при заданном перепаде давления.

1. Обычно в механике сплошных сред уравнения течения делятся на общие динамические уравнения, описывающие течения всех сплошных сред, и уравнения, связывающие компоненты тензора напряжения в точках данной среды с компонентами тензора скоростей деформации в этих же точках. Эти последние (реологические уравнения) характеризуют течение данной конкретной среды и, как правило, дают неоднозначные соотношения, обусловленные присутствием в этих уравнениях второго инварианта тензора скоростей деформации. Поэтому в дальнейшем под неоднозначностью уравнений понимается неоднозначность именно такого вида, связанная с неопределенностью знака компонент напряжения или скоростей деформации. Достаточно подробно эта проблема неоднозначности применительно к исследованиям течений пластических сред рассмотрена в работе Л.М. Качанова [1]. Применительно к задачам исследования пластических течений она решена в работах Сен-Венана (B. Saint-Venant, 1871) и М. Леви (M. Levi, 1871) [2, 3] таким образом, что такого рода неоднозначность сохраняется только в одном уравнении (обобщенное уравнение деформирования или условие пластичности). Неоднозначность в этом уравнении может быть устранена "из механической постановки самой задачи" [1].

Подобная проблема стоит и при исследовании течений бингамовских сред с применением уравнений Г. Генки (H. Henky, 1925). Это связано с тем, что модель данной среды содержит в себе модели вязкой и пластической сред [4]. В настоящей работе излагается один из возможных способов получения уравнений для исследования течений бингамовских сред, в которых вышеназванная проблема решается.

Бингамовская среда относится к средам с, так называемой, сложной реологией. Ее механические свойства определяются двумя реологическими константами: предельным напряжением сдвига τ_0 и коэффициентом пластической вязкости μ и проявляются по разному в зависимости от интенсивности напряжений (фиг. 1). Эта зависимость приведена в работе [5]. Обобщенная реологическая модель бингамовской среды имеет следующий вид [1, 6]:

$$T=\tau_0+2\mu H \tag{1}$$

$$T=\sqrt{1/6[(\tau_{xx}-\tau_{yy})^2+(\tau_{yy}-\tau_{zz})^2+(\tau_{zz}-\tau_{xx})^2]+\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2}$$

$$H=\sqrt{1/6[(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz})^2+(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx})^2]+\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z},\quad \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}\right) \tag{2}$$

Здесь T, H – интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации сдвига; τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz} τ_{yz} – компоненты тензора напряжений T; ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, ε_{xy}, ε_{xz} ε_{yz} – компоненты тензора скоростей деформаций H.

Из выражения (1) при $\tau_0 = 0$ получается обобщенный реологический закон деформирования вязких сред:

$$T=2\mu H \tag{3}$$

При $\mu = 0$ – обобщенный реологический закон деформирования идеально пластических (сен-венановых) сред:

$$T=\tau_0 \tag{4}$$

Таким образом, модель бингамовской среды является реологической моделью более высокого уровня, из которой, как частные случаи, следуют модели входящих в нее пластических и вязких сред (третья аксиома реологии М. Рейнера [7]).

Далее рассматривается изотропная, несжимаемая бингамовская среда при изотермическом течении. Для получения уравнений течения таких сред добавим к известным динамическим уравнениям движения сред и уравнению несжимаемости уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора скоростей деформации. Представим их в виде, справедливом для записи уравнений течения любой изотропной несжимаемой среды

$$\tau_{xx}=\sigma_0+\Phi(H)\varepsilon_{xx},\quad \tau_{yy}=\sigma_0+\Phi(H)\varepsilon_{yy},\quad \tau_{zz}=\sigma_0+\Phi(H)\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy}=\Phi(H)\varepsilon_{xy},\quad \tau_{xz}=\Phi(H)\varepsilon_{xz},\quad \tau_{yz}=\Phi(H)\varepsilon_{yz} \tag{5}$$

где $\Phi(H)$ не определенная пока функция, зависящая от интенсивности скоростей деформации, а среднее нормальное напряжение равно

$$\sigma_0=1/3(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}) \tag{6}$$

Подставив выражения интенсивности напряжений T и интенсивности скоростей деформации H, с учетом равенства (6) и уравнения несжимаемости $\operatorname{div}\bar{v} = 0$, в уравнение (1), найдем функцию $\Phi(H)$:

$$\Phi(H) = 2\mu + \tau_0/H \tag{7}$$

Компоненты тензора напряжений (5) в этом случае примут следующий вид:

$$\tau_{xx}=\sigma_0+\left(2\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\varepsilon_{xx},\quad \tau_{yy}=\sigma_0+\left(2\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\varepsilon_{yy},\quad \tau_{zz}=\sigma_0+\left(2\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy}=\left(2\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\varepsilon_{xy},\quad \tau_{xz}=\left(2\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\varepsilon_{xz},\quad \tau_{yz}=\left(2\mu+\frac{\tau_0}{H}\right)\varepsilon_{yz} \tag{8}$$

Таким образом, получены известные реологические соотношения для бингамовских сред [1, 8], которые являются следствием основного реологического закона (1) и соотношений (5), и наоборот, уравнение (1) является следствием соотношений (8). Из системы неоднозначных уравнений (8) путем исключения из них среднего нормального напряжения σ_0 и комплекса $(2\mu + \tau_0/H)$, с учетом равенств (2), получим уже известную однозначную систему уравнений следующего вида [3]:

$$\frac{2\tau_{xy}}{\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x} = \frac{2\tau_{xz}}{\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x} = \frac{2\tau_{yz}}{\partial v_y/\partial z + \partial v_z/\partial y} = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\partial v_x/\partial x - \partial v_y/\partial y} =$$

$$= \frac{\tau_{xx} - \tau_{zz}}{\partial v_x/\partial x - \partial v_z/\partial z} \tag{9}$$

Следует отметить, что из приведенных десяти уравнений (9) только четыре являются независимыми. Этими уравнениями будут любые четыре, содержащие все компоненты тензора напряжения или тензора скоростей деформации.

Запишем теперь полную систему уравнений движения бингамовских сред (система I), состоящую из следующих уравнений:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) \tag{10}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

$T = \tau_0 + 2\mu H$ (см. (1))

$$\frac{2\tau_{xy}}{\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x} = \frac{2\tau_{xz}}{\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x} = \frac{2\tau_{yz}}{\partial v_y/\partial z + \partial v_z/\partial y} = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\partial v_x/\partial x - \partial v_y/\partial y} =$$

$$= \frac{\tau_{xx} - \tau_{zz}}{\partial v_x/\partial x - \partial v_z/\partial z} \quad \text{(см. (9)).}$$

Здесь величины T и H, входящие в уравнение (1), должны быть выражены соответственно через компоненты тензора напряжения и проекции скорости.

Полученная система уравнений I: (1), (9), (10), (11), состоит из девяти независимых уравнений и содержит девять неизвестных функций координат и времени (шесть компонент тензора напряжения и три проекции скорости). Можно показать, что из уравнений (1) и (9), с помощью равенств (6) и (11), могут быть получены все реологические соотношения (8). Поэтому, вместо обобщенного реологического уравнения (1), в полную систему уравнений движения бингамовских сред можно включить одно из реологических соотношений (8).

Система уравнений I отличается от уравнений Г. Генки тем, что шесть неоднозначных реологических уравнений (8), входящих в систему уравнений Г. Генки, заменены четырьмя однозначными, независимыми уравнениями из системы (9) и одним неоднозначным уравнением (1), являющимся реологической моделью бингамовской среды.

Из полученной системы уравнений, описывающей течение бингамовских сред, как частные случаи, следуют уравнения движения вязких и идеально пластических сред.

Для этого в уравнении (1) поочередно полагаются равными нулю соответствующие значения реологических констант τ_0 и μ, т.е. при $\tau_0 = 0$ получаем уравнения течения вязких сред, а при $\mu = 0$ получаем уравнения течения пластических сред [3]. При использовании полученной системы уравнений для вязких сред давление в среде p уже не является независимой функцией, определяемой из уравнений движения. Оно может быть определено из реологических соотношений (8), если принять для несжимаемых сред $\sigma_0 = -p$.

Следует особо подчеркнуть, что система уравнений, аналогичная системе I, будет описывать течение любой сплошной среды, для которой имеют место соотношения (5). Для этого в полученной системе уравнений следует заменить уравнение (1) соответствующим обобщенным реологическим соотношением, связывающим интенсивности напряжений и скоростей деформации для новой среды.

Получим теперь из общих уравнений (система I) уравнения плоского течения среды параллельно координатной плоскости xoz. В этом случае

$$v_y \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \equiv 0$$

и из уравнений (9) следует: $\tau_{yz} \equiv 0$ и $\tau_{xy} \equiv 0$. С учетом этого, система уравнений I примет следующий вид (система II):

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right), \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \tag{12}$$

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_z / \partial z = 0 \tag{13}$$

$$T = \tau_0 + 2\mu H \tag{14}$$

$$2\tau_{xz}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = (\tau_{xx} - \tau_{zz})\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \tag{15}$$

$$\tau_{yy} = \sigma_0 = \tfrac{1}{2}(\tau_{xx} + \tau_{zz}) \tag{16}$$

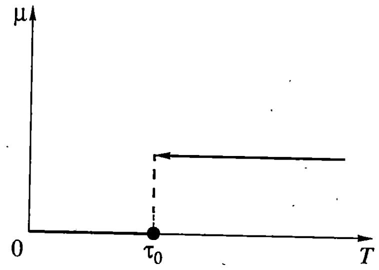
$$T = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tau_{xx} - \tau_{zz})^2 + 4\tau_{xz}^2} \tag{17}$$

$$H = \tfrac{1}{6}\sqrt{[(\varepsilon_{xx})^2 + (\varepsilon_{xx})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2] + \varepsilon_{xz}^2}$$

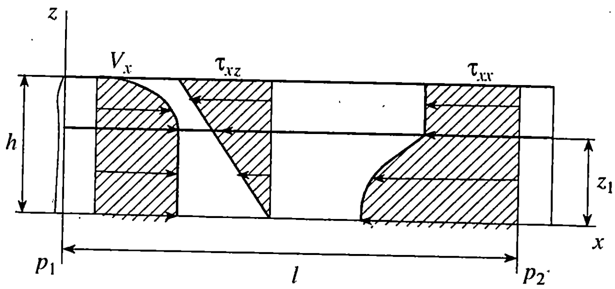
Система II состоит из пяти уравнений (12)–(15) и содержит пять определяемых функций координат и времени: три компоненты тензора напряжений и две проекции скорости. При $\mu = 0$ данная система уравнений превращается в известную систему уравнений для плоской деформации пластической среды [3]. Проиллюстрируем использование полученных уравнений на примере.

2. Пример. Рассмотрим задачу о течении бингамовской среды между двумя горизонтальными параллельными плоскостями при заданном перепаде давления (фиг. 2). Задача решается в принятой здесь постановке, т.е. рассматриваются две области течения среды – области сдвигового и пластического течений. Наличие этих областей учитывается в граничных условиях задачи. Ранее эта задача решалась с помощью уравнений Г. Генки и в иной постановке [9]. При этом считалось, что имеются две области течения: при $T > \tau_0$ – область сдвигового течения, при $T \leqslant \tau_0$ – область ядра течения. Для принятых условий ядро является недеформируемым (квазитвердым) телом. В такой постановке были получены: для сдвиговой области – поля скоростей и напряжений; для области ядра – поле скоростей, расход среды. Напряжения в ядре в этой постановке определить невозможно.

В рассматриваемой здесь постановке ($T \geqslant \tau_0$) считаем среду несжимаемой, а течение стационарным, плоским, изотермическим с линиями тока параллельными границ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ным плоскостям. Для решения этой задачи используем полученную систему II. Так как течение симметрично относительно плоскости $z = 0$, то задача решается при следующих граничных условиях [4]:

$$z = \pm h, \quad v_x = 0; \quad z = \pm z_1, \quad v_x^s = v_x^p, \quad \tau_{zz}^s = \tau_{zz}^p, \quad \tau_{xz}^s = \tau_{xz}^p \tag{18}$$
$$x = 0, \quad \tau_{xx} = -p_1; \quad x = l, \quad \tau_{xx} = -p_2$$

Эти граничные условия соответствуют наличию двух областей течения в бингамовской среде. Это, так называемые, области сдвигового течения при $T > \tau_0$ и пластического течения при $T = \tau_0$ [4]. Первое из граничных условий является условием прилипания среды к твердым границам, второе – условие непрерывности скорости и напряжения на границе раздела области сдвигового течения $z \in [z_1, h]$ и области пластического течения $z \in [0, z_1]$ (фиг. 2). Верхними индексами s и p обозначены величины, соответствующие сдвиговой и пластической областям течения среды. Ниже приводятся результаты решения этой задачи в виде формул и эпюр скорости течения и напряжений (фиг. 2).

В области сдвигового течения $z \in [-h, -|z_1|]$, $z \in [|z_1|, h]$:

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\mu l}\left[h^2 - z^2 + 2z_1 \operatorname{sign}\frac{dv_x}{dz}(h \mp z)\right]$$

Здесь при $z > 0$ $\operatorname{sign} dv_x/dz = -1$, при $z < 0$ $\operatorname{sign} dv_x/dz = 1$; знак минус соответствует $z > 0$, знак плюс соответствует $z < 0$:

$$\tau_{xx} = \tau_{zz} = -p_1 + (\Delta p / l)x, \quad \Delta p = p_1 - p_2$$

$$\tau_{xz} = -\tau_0 \frac{z}{z_1}, \quad z_1 = \pm\frac{\tau_0 l}{\Delta p}$$

При $z_1 = h$ имеем предельный случай, т.е. пластическое течение, а при $z_1 > h$ среда находится в покое.

В области пластического течения $z \in [-|z_1|, |z_1|]$:

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\mu l}(h \mp z_1)^2$$

Здесь знак минус соответствует $z_1 > 0$, знак плюс соответствует $z_1 < 0$:

$$\tau_{xx} = -p_1 + (\Delta p / l)x - 2\sqrt{\tau_0^2 - \tau_{xz}^2}$$

$$\tau_{zz} = -p_1 + (\Delta p / l)x, \quad \tau_{xz} = -\tau_0(z / z_1)$$

Расход среды Q находится из основного уравнения течения

$$Q = \frac{\Delta p \cdot h^3}{\mu l}\left[\frac{2}{3} - \left|\frac{z_1}{h}\right| + \frac{1}{3}\left|\left(\frac{z_1}{h}\right)^3\right|\right]$$

Эпюра нормального напряжения τ_{zz} на фиг. 2 не показана, так как она соответствует прямоугольной части эпюры τ_{xx}. Неоднозначность при определении нормальных напряжений τ_{xx} и τ_{zz} для области пластического течения устраняется тем, что их значения принимаются отрицательными для любых значений параметров, что следует из физического смысла задачи.

Проанализируем полученные результаты с точки зрения их физического смысла. Начнем с анализа расхода среды Q. Подставив в это уравнение выражение координаты z_1 получим известную формулу А.М. Гуткина для определения расхода бингамовской среды, текущей между двумя параллельными плоскостями [9]:

$$Q = \frac{\Delta p \cdot h^3}{\mu l}\left[\frac{2}{3} - \frac{\tau_0 l}{h\Delta p} + \frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0 l}{h\Delta p}\right)^3\right]$$

В соответствии с вышеизложенным, из полученных формул расхода, путем поочередного приравнивания в них к нулю соответствующих реологических констант, получаются выражения для определения расходов вязкой и пластической сред. При $\tau_0 = 0$ получается выражение для расхода вязкой жидкости [6]. При $\mu = 0$ и $z_1 = h$ – выражение для расхода пластической среды. Однако, в этом случае, правая часть в первом выражении расхода неопределенна. Для раскрытия этой неопределенности используется выражение скорости течения среды в пластической области (см. выше), откуда определяется отношение z_1/h, которое затем подставляется в выражение расхода. После этого получим следующее выражение: $Q = 2hv_x$. Отсюда следует, что течение пластической среды между параллельными плоскостями представляет собой ее скольжение, как твердого тела, по тонкому прилипшему к стенкам слою этой среды. Аналогичный результат был получен в [1] для течения пластической среды в круглой прямой трубе. Перепад давления, при котором бингамовская среда будет течь как пластическое тело, определяется из выражения для z_1 при его значении h. Это предельный перепад давления, при котором еще может существовать течение среды. При меньшем перепаде давления среда будет находиться в равновесии. При перепаде давления большем предельного, чисто пластического течения уже не будет, так как появится область сдвигового течения и величина $z_1 < h$ при любых значениях параметров течения среды.

Выводы. *1*). Получена система уравнений течения бингамовских сред (система 1), которая позволяет исследовать течение бингамовской среды во всей области течения, то есть как в области сдвигового течения, так и в области пластического течения.

2). Из полученных уравнений, как частные случаи, следуют уравнения течений вязких (ньютоновских жидкостей) и идеально пластических сред. Эти частные случаи течений получаются путем приравнивания к нулю соответствующих реологических констант, что соответствует третьей аксиоме реологии М. Рейнера.

3). Полученные уравнения позволяют формализовать подход к решению широкого класса задач о течении бингамовских сред с применением ЭВМ.

4). Уравнения течений пластических сред, которые получаются из системы 1 при $\mu = 0$, совпадают с известными уравнениями М. Леви.

Авторы благодарят Ирину Георгиевну Горячеву за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
2. *Сен-Венан Б.* Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Теория пластичности. Сб. статей / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 11–19.
3. *Леви М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Теория пластичности. Сб. статей / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 20–23.
4. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* К теории течений бингамовских сред. Препринт № 626. ИПМ РАН, М., 1998. 63 с.
5. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Об одном случае плоского течения бингамовских сред // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 63–73.
6. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
7. *Рейнер М.* Деформация и течение. М.: Гостоптехиздат, 1963. 318 с.
8. *Генки Г.* О медленных стационарных течениях в пластических телах с приложениями к прокатке, штамповке и волочению // Теория пластичности. Сб. статей / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 136–156.
9. *Воларович М.П., Гуткин А.М.* Течение вязкопластичного тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом зазоре между коаксиальными трубками. // ЖТФ. 1946. Т. 16. Вып. 3. С. 321–329.

Москва

Поступила в редакцию
18.09.2000