МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. Т.И. МАСЛИКОВА, В.С. ПОЛЕНОВ

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛНАХ В ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ

Динамическому деформированию пористой среды посвящен ряд работ, где соотношения между деформациями и напряжениями эквивалентны аналогичным соотношениям М.А. Био [1], однако основная задача о динамическом поведении такой среды еще не может считаться окончательно решенной и требует дополнительного изучения. Поэтому представляет интерес рассмотреть вопрос о распространении нестационарных, упругих волн в бесконечной, однородной упругой пористой среде. Наличие и степень пористости в твердых телах учитывается с помощью коэффициента пористости m, равного отношению объема пор к общему объему, занимаемому средой. Используя математическую теорию разрывов [2, 3] для основных соотношений, показано, что в такой среде распространяются две продольные волны и одна поперечная. Получены дифференциальные уравнения, определяющие изменение интенсивности продольных и поперечных волн в процессе их распространения.

1. Основные соотношения, определяющие процесс динамического деформирования упругой среды с наличием пор можно описать системой [3, 4]:

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{j,j}^{(1)}\delta_{ik} + \mu(u_{i,k}^{(1)} + u_{k,i}^{(1)}) + (1-m)R_0 u_{j-j}^2\delta_{ik} \tag{1.1}$$

$$\sigma = (1-m)R_0 u_{k,k}^{(1)} + mR_0 u_{k,k}^{(2)} \tag{1.2}$$

$$\rho_{11}\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial t} + \rho_{12}\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.3}$$

$$\rho_{12}\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial t} + \rho_{22}\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

где σ_{ij} – полный тензор напряжения пористой среды; m – пористость; σ – сила, действующая на газ, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды; λ, μ – коэффициенты Ламе; R_0 – модуль сжимаемости второй фазы; ρ_{12} – коэффициент динамической связи твердой фазы и газа в поре; $\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}$, $\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}$; ρ_1 и ρ_2 – плотность твердой фазы и газа в поре; δ_{ij} – символ Кронекера; $u_{i,j}^{(\alpha)}$ – компоненты перемещения фаз.

Продифференцируем (1.1) и (1.2) по t и, используя теорию разрывов для основных соотношений с учетом разности значений величин на двух сторонах волновой поверхности $\Sigma(t)$, получим

$$[\partial\sigma_{ik}/\partial t] = \lambda[\upsilon^{(1)}_{k,k}]\delta_{ik} + \mu[\upsilon^{(1)}_{i,k}] + \mu[\upsilon^{(1)}_{k,i}] + (1-m)R_0[\upsilon^{(2)}_{k,k}]\delta_{ik} \tag{1.5}$$

$$[\partial\sigma/\partial t] = (1-m)R_0[\upsilon^{(1)}_{k,k}] + mR_0[\upsilon^{2}_{k,k}]$$

$$\rho_{11}[\partial\upsilon^{(1)}_i/\partial t] + \rho_{12}[\partial\upsilon^{(2)}_i/\partial t] = [\partial\sigma_{ik}/\partial x_k]$$

$$\rho_{12}[\partial\upsilon^{(1)}_i/\partial t] + \rho_{22}[\partial\upsilon^{(2)}_i/\partial t] = [\partial\sigma/\partial x_i]$$

Для нахождения скорости G волновой поверхности $\Sigma(t)$ к системе (1.5) применим геометрические и кинематические условия совместности первого порядка [2] для фаз:

$$\begin{aligned}
&[\partial\upsilon^{(\alpha)}_i/\partial t] = -\lambda^{(\alpha 1)}G, \quad [\partial\upsilon^{(\alpha)}_i/\partial x_k] = \lambda^{(\alpha)}_i\nu_k \quad (\alpha = 1, 2)\\
&[\partial\sigma_{ik}/\partial x_k] = S_{ik}\nu_k, \quad [\partial\sigma/\partial x_k] = \eta\nu_k\\
&[\partial\sigma_{ik}/\partial t] = -S_{ik}G, \quad [\partial\sigma/\partial t] = -\eta G
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где S_{ik}, $\lambda^{(\alpha)}_i$ $(\alpha = 1, 2)$, η – величины скачков первых производных напряжений, силы и скоростей перемещений фаз, G – скорость волновой поверхности $\Sigma(t)$, ν_i – единичный вектор нормали к поверхности $\Sigma(t)$.

Из (1.5) с учетом (1.6) получим систему уравнений для скоростей распространения волн

$$\lambda\lambda^{(1)}_k\nu_k\delta_{ij} + \mu(\lambda^{(1)}_i\nu_j + \lambda^{(1)}_j\nu_i) + (1-m)R_0\lambda^{(2)}_k\nu_k\delta_{ij} = -GS_{ij} \tag{1.7}$$

$$(1-m)R_0\lambda^{(1)}_k\nu_k + mR_0\lambda^{(2)}_k\nu_k = -\eta G \tag{1.8}$$

$$\rho_{11}\lambda^{(1)}_iG + \rho_{12}\lambda^{(2)}_iG = -S_{ik}\nu_k \tag{1.9}$$

$$\rho_{12}\lambda^{(1)}_iG + \rho_{22}\lambda^{(2)}_iG = -\eta\nu_i \tag{1.10}$$

Исключая из (1.7)–(1.10) величины S_{ij} и η, получим

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\lambda^{(1)}_j\nu_j\nu_i + \mu\lambda^{(1)}_i + (1-m)R_0\lambda^{(2)}_j\nu_j\nu_i = \rho_{11}G^2\lambda^{(1)}_i + \rho_{12}G^2\lambda^{(2)}_i\\
&(1-m)R_0\lambda^{(1)}_j\nu_j\nu_i + mR_0\lambda^{(2)}_j\nu_j\nu_i = \rho_{12}G^2\lambda^{(1)}_i + \rho_{22}G^2\lambda^2_i
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Предполагая, что $\lambda^{(\alpha)}_i\nu_i$ не обращается в нуль на поверхности $\Sigma(t)$, умножим (1.11) на ν_i и просуммируем по повторяющемуся индексу i, в результате получим однородную систему уравнений относительно

$$\omega_i = \lambda^{(1)}_i\nu_i, \quad \omega_2 = \lambda^2_i\nu_i$$

$$\begin{cases}(\lambda + 2\mu - \rho_{11}G^2)\omega_1 + ((1-m)R_0 - \rho_{12}G^2)\omega_2 = 0\\((1-m)R_0 - \rho_{12}G^2)\omega_1 + (mR_0 - \rho_{22})\omega_2 = 0\end{cases} \tag{1.12}$$

Чтобы система (1.12) имела ненулевое решение, ее определитель, составленный из коэффициентов при ω_1 и ω_2 должен быть равен нулю. Раскрывая определитель второго порядка, получим для скоростей G_e волновой $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned}
&(\rho_{11}\rho_{22} - \rho^2_{12})G^4_e + (2\rho_{12}C_2 - \rho_{11}C_3 - \rho_{22}C_1)G^2_e + C_1C_3 - C^2_2 = 0\\
&C_1 = \lambda + 2\mu, \quad C_2 = (1-m)R_0, \quad C_3 = mR_0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Тогда из уравнения (1.13) будем иметь

$$G_e^2 = \frac{1}{2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}\{(\rho_{11}C_3+\rho_{22}C_1-2\rho_{12}C_2)\pm$$
$$\pm\sqrt{(\rho_{11}C_3-\rho_{22}C_1)^2+4(\rho_{22}C_2-\rho_{12}C_3)(\rho_{11}C_2-\rho_{12}C_1)}\} \quad (\lambda_i^\alpha \nu_i \neq 0,\ \alpha=1,2) \tag{1.14}$$

Отсюда следует, что в упругой однородной пористой среде распространяются две продольные волны 1 и 2 типов, скорости которых равны G_{e1}^2 и G_{e2}^2.

С другой стороны, если $\lambda_i^{(\alpha)}\nu_i = 0$ на $\Sigma(t)$, то из (1.11) и условия, что не все $\lambda_i^{(\alpha)}$ обращаются в нуль одновременно, непосредственно следует

$$(\mu-\rho_{11}G^2)\lambda_i^{(1)} - \rho_{12}G^2\lambda_i^{(2)} = 0, \quad \rho_{12}G^2\lambda_i^{(1)} + \rho_{22}G^2\lambda_i^{(2)} = 0 \tag{1.15}$$

Из данной системы уравнений, скорость поперечной волны определяется равенством

$$G_t^2 = \frac{\mu\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2} \quad (\lambda_i^{(\alpha)}\nu_i = 0) \tag{1.16}$$

Таким образом, в упругой однородной пористой среде распространяются две продольные и одна поперечная волна.

2. Для определения изменения интенсивности $W=\sqrt{\lambda_i^{(\alpha)}\lambda_i^{(\alpha)}}$ продольных и поперечных волн продифференцируем (1.1), (1.2) по t и x_j, а уравнения (1.3), (1.4) по t; после преобразований имеем

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 v_i^{(2)}}{\partial t^2} = \lambda v_{j,ji}^{(1)} + \mu(v_{i,jj}^{(1)} + v_{j,ij}^{(1)}) + (1-m)R_0 v_{j,ji}^{(2)}$$
$$\rho_{12}\frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 v_i^{(2)}}{\partial t^2} = (1-m)R_0 v_{j,ji}^{(1)} + mR_0 v_{j,ji}^{(2)} \tag{2.1}$$

Записав соотношения (2.1) в разрывах с учетом геометрических и кинематических условий совместности второго порядка [2], затем, умножая на ν_i и принимая во внимание, $\nu_i\nu_i = 1$, $\nu_i x_\beta^i = 0$, получим

$$(\rho_{11}G^2-(\lambda+2\mu))M_i\nu_i + (\rho_{12}G^2-(1-m)R_0)N_i\nu_i - 2G\rho_{11}\frac{\delta\lambda_i^{(1)}}{\delta t}\nu_i - 2G\rho_{12}\frac{\delta\lambda_i^{(2)}}{\delta t}\nu_i =$$
$$= \lambda\lambda_{j,\alpha}^{(1)}q^{\lambda\beta}x_\beta^j - 2\Omega\mu\lambda_i^{(1)}\nu_i + \mu q^{\lambda\beta}\lambda_{j,\alpha}^{(1)}x_\beta^j + (1-m)R_0 q^{\alpha\beta}\lambda_{j,\alpha}^{(2)}x_\beta^j \tag{2.2}$$

$$(\rho_{12}G^2-(1-m)R_0)M_i\nu_i + (\rho_{22}G^2-mR_0)N_i\nu_i - 2G\rho_{12}\frac{\delta\lambda_i^{(1)}}{\delta t}\nu_i - 2G\rho_{22}\frac{\delta\lambda_i^{(2)}}{\delta t}\nu_i =$$
$$= (1-m)R_0 q^{\lambda\beta}\lambda_{j,\alpha}^{(1)}x_\beta^j + mR_0 q^{\alpha\beta}\lambda_{j,\alpha}^{(2)}x_\beta^j \quad (\alpha=\beta=1,2) \tag{2.3}$$

Здесь Ω, $q^{\alpha\beta}$ и x_β^j – средняя кривизна, коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы и производные декартовых координат x^j по криволинейным координатам u_β поверхности $\Sigma(t)$; M_i и N_i – некоторые новые функции, определенные на поверхности $\Sigma(t)$; $\delta/\delta t$ – дельта-производная по времени.

Исключая из (2.2) и (2.3) N_i и учитывая, что

$$\lambda_j^{(1)} = \omega_{1,\alpha}\nu_j + \omega_1\nu_{j,\alpha}, \quad \lambda_j^{(2)} = \omega_{2,\alpha}\nu_j + \omega_2\nu_{j,\alpha}$$
$$\nu_{j,\alpha} = -q^{\sigma\tau}b_{\alpha\beta}x_\tau^j, \quad 2\Omega = q^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$$

где $b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты второй фундаментальной квадратичной формы поверхности, получим

$$G\{(\rho_{12}^2-\rho_{11}\rho_{22})G^2+(m\rho_{11}-(1-m)\rho_{12})R_0\}\delta\omega_1/\delta t+ \tag{2.4}$$
$$+G\{m\rho_{12}-(1-m)\rho_{22}\}R_0\delta\omega_2/\delta t=\{-(\lambda+2\mu)(\rho_{22}G^2-mR_0)+$$
$$+(1-m)R_0(\rho_{12}G^2-(1-m)R_0)\}\Omega\omega_1+R_0\Omega G^2(m\rho_{12}-(1-m)\rho_{22})\omega_2$$

При преобразованиях учитывалось уравнение (1.13).

Для определения изменения интенсивности продольных волн первого типа из (2.4) исключим ω_2; тогда с учетом соотношения (1.12) будем иметь

$$G_{e_1}^2(A_1G_{e_1}^4+2B_1G_{e_1}^2+C_1)dW_{e_1}^1/ds=(D_1G_{e_1}^4+2E_1G_{e_1}^2+F_1)\Omega_{e_1}W_{e_1}^1 \tag{2.5}$$
$$A_1=(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)\rho_{12},\quad B_1=(1-m)R_0(\rho_{12}^2-\rho_{11}\rho_{22})$$
$$C_1=(1-m)R_0^2(m\rho_{11}-(1-m)\rho_{12})+(\lambda+2\mu)R_0(-m\rho_{12}+(1-m)\rho_{22})$$
$$D_1=(m\rho_{11}-(1-m)\rho_{12})R_0\rho_{12}+(\lambda+2\mu)\rho_{22}\rho_{12}-(1-m)R_0\rho_{11}\rho_{22}$$
$$E_1=(-(\lambda+2\mu)m+(1-m)^2R_0)R_0\rho_{12}$$
$$F_1=(1-m)R_0^2(m(\lambda+2\mu)-(1-m)R_0)$$
$$\delta\omega_1/\delta t=G_{e_1}d\omega_1/ds,\quad W_{e_1}^1=\sqrt{\omega_1\omega_1} \tag{2.6}$$

где S – расстояние вдоль луча к поверхности $\Sigma(t)$.

Исключая из (2.5) G_e^2 с помощью уравнения (1.14), получим дифференциальное уравнение для твердой фазы $dW_{e_1}^1/ds\equiv\Omega_{e_1}W_{e_1}^1$. Интенсивность волны второй фазы $W_{e_2}^1$, получим из первого соотношения (1.12)

$$W_{e_2}^1=\frac{\rho_{11}G_{e_1}^2-(\lambda+2\mu)}{(1-m)R_0-\rho_{12}G_{e_1}^2}W_{e_1}^1 \tag{2.7}$$

Тогда изменение интенсивности продольных волн первого типа запишется в виде

$$W_e^1=W_{e_1}^1+W_{e_2}^1=\frac{W_{0_e}^1((1-m)R_0-(\lambda+2\mu)+(\rho_{11}-\rho_{12})G^2)}{((1-m)R_0-\rho_{12}G^2)\sqrt{1-\Omega_0S+K_0S^2}} \tag{2.8}$$

Аналогично получим выражения для определения интенсивности продольной волны второго типа

$$W_e^1=W_{e_1}^2+W_{e_2}^2=\frac{W_{0_{e2}}^{(2)}((1-2m)R_0+(\rho_{22}-\rho_{12})G_{e_2}^2)}{((1-m)R_0-\rho_{12}G_{e_2}^2)\sqrt{1-2\Omega_0S+K_0S^2}} \tag{2.9}$$

Если учесть, что плотность непрерывна при переходе через фронт поперечной волны и $\lambda_i\nu_i=0$, то из условий (2.1), записанных в разрывах с учетом кинематических и геометрических условий второго порядка, имеем

$$\rho_{11}\left(G^2M_i-2G\frac{\delta\lambda_i^{(1)}}{\delta t}\right)\lambda_i^{(1)}+\rho_{12}\left(G^2N_i-2G\frac{\delta\lambda_i^{(2)}}{\delta t}\right)\lambda_i^{(1)}=\mu(M_i\lambda_i^{(1)}-2\Omega\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(1)}) \tag{2.10}$$
$$\rho_{12}\left(G^2M_i-2G\frac{\delta\lambda_i^{(1)}}{\delta t}\right)\lambda_i^{(1)}+\rho_{22}\left(G^2N_i-2G\frac{\delta\lambda_i^{(2)}}{\delta t}\right)\lambda_i^{(1)}=0$$

Из (2.10) получим

$$\lambda_i^{(1)} d\lambda_i^{(1)} / ds = \Omega \lambda_i^{(1)} \lambda_i^{(1)}, \quad \lambda_i^{(1)} = \omega_1 \tag{2.11}$$

Интегрируя (2.11) с использованием (1.17) и учитывая (1.16), получим выражение для изменения интенсивности поперечной волны

$$W_t = W_t^{(1)} + W_t^{(2)} = \frac{W_{O_t}(\mu - \rho_{11} + \rho_{22}) G_t^2}{((\rho_{12} + \rho_{22}) G_t^2 \sqrt{1 - 2\Omega_{O_t} S + K_{O_t} S^2}} \tag{2.12}$$

где K_0 – гауссова кривизна волновой поверхности, $\Sigma(t)$, от которой отсчитывается расстояние S.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid // J. Acoust. Soc. 1956. V. 28. № 1. P. 27–32.
2. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение твердых тел. М.: Мир, 1964. 205 с.
3. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. геофиз. 1944. Т. 8. № 4. С. 82–90.
4. *Косачевский Л.Я.* О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. 1959. Т. XXIII. Вып. 6. С. 1115–1123.

Москва

Поступила в редакцию
2.02.1999