

УДК 539.375

© 2001 г. В.Н. КУКУДЖАНОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛАХ С ДИАГРАММОЙ ОБЩЕГО ВИДА

Исследуется распространение волн напряжений в стержнях из упруговязкопластических материалов с диаграммой, имеющей падающие участки.

В предыдущих работах автора был развит асимптотический метод решения краевых задач распространения волн в упругопластических средах с учетом дополнительных членов с малыми параметрами и решен ряд задач о распространении волн в полубесконечном стержне [1, 2].

В настоящей работе эта методика сращения медленно и быстроменяющихся решений обобщена на общий случай краевых условий и диаграммы материала, имеющей участки разупрочнения. Показано, что при разупрочняющейся диаграмме в упруговязкопластической среде возникает краевой эффект нового типа, которого нет при упрочняющейся диаграмме. Приведены численные расчеты с помощью разностных схем, разработанных специально для решения жестких систем гиперболического типа [3, 4], которые подтвердили выводы, сделанные на основе асимптотического решения.

Показано, что распределение деформаций в тонком стержне вблизи ударяемого конца определяется не влиянием скорости деформации [5], а наличием разупрочнения на диаграмме материала в стадии предшествующей его разрушению. Только при ударах со скоростью $v \geq v_0$, достаточной для того, чтобы деформация на конце стержня превысила деформацию ϵ_h , отвечающую пределу прочности на статистической диаграмме, вблизи конца стержня вместо "плато" – области постоянного распределения, характерного для упрочняющегося материала, появляется область локализации деформации и распределение принимает форму "шляпки гриба".

Исследовано влияние разупрочнения на характер распространения импульсов большой ($t_0 \geq \tau$) и средней ($t_0 \sim 10\tau$) продолжительности и на отскольное разрушение, производимое такими импульсами при соударении стержней.

1. Введение. Исследованию распространения волн в стержнях из упрочняющегося упругопластического материала в 40х–60х годах двадцатого столетия было посвящено большое количество статей. Более поздние работы были основаны на модели упруговязкопластического материала и исследовании влияния скорости пластической деформации на распространение волн [5, 6]. В первых исследованиях предлагалось определять это влияние по распределению остаточных деформаций в длинном стержне при ударе с постоянной скоростью $v = v_0 H(t)$ [5]. Однако этот способ определения вязких свойств оказался некорректным [1], так как при нагружении с постоянной скоростью различия в распространении остаточных деформаций по двум моделям минимальны и заметны лишь в узком переходном слое квазифронта пластической волны, а не вблизи ударяемого конца, как это следовало из работ [5, 7, 8] из-за ошибочности расчета, связанного с неправильным выбором численного метода решения жесткой системы уравнений, благодаря чему появлялся псевдокраевой эффект.

Практически во всех исследованиях, посвященных распространению волн в неупругих материалах, принималось, что материалы имеют монотонно возрастающие диаграммы. Однако диаграммы σ - ϵ для многих инженерных материалов таких как некоторые металлы, бетоны, различные геоматериалы имеют участки падения напряжений при росте деформаций. Более того, трудно себе представить упруго-пластический материал с монотонно возрастающей диаграммой во всем диапазоне изменений деформаций. Лишь в последние десять лет стали появляться работы, в которых предприняты попытки рассмотреть материалы с зависимостью между напряжением и деформацией более общего вида.

Сложившееся положение имеет простое объяснение, связанное с тем, что классические упругопластические модели материалов, независимые от изменения масштаба времени, приводят к некорректной постановке краевых задач при падающей диаграмме, так как система уравнений в области разупрочнения меняет тип – переходит от гиперболического к эллиптическому типу. При численном решении задачи появляется существенная зависимость решения от используемого разбиения области. Для регуляризации задачи необходимо вводить в систему уравнений высшие дифференциальные члены с малым параметром, характеризующим либо внутренний масштаб длины, либо быстрое время протекания дополнительных внутренних процессов, которые не учитываются упругопластической моделью.

В последние годы в этом направлении велись достаточно интенсивные поиски различных подходов. В качестве таких дополнительных внутренних процессов учитывались микрополярные силовые факторы [9], нелокальный характер деформации [10], зависимость определяющих соотношений от высших градиентов [11; 12], от микроструктурных параметров [13], предлагались также модели сред, зависящие от скорости деформации [14]. Предпринимаются также попытки построить более полные физические модели на основе теории дислокаций, микротрещин и микропор [4, 15], которые позволили бы описать процессы разупрочнения и разрушения неупругих материалов. В большинстве работ решение получали численными методами, аналитические же решения были получены для линеаризованных уравнений.

2. Основные уравнения и постановка задачи. Будем рассматривать стержень из упруговязкопластического материала, определяющие уравнения которого имеют вид

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\text{sqn } \sigma}{\tau} \hat{\Phi}(|\sigma| - \sigma_s(\epsilon)) \quad (2.1)$$

$$\hat{\Phi}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \Phi(z), & z \geq 0 \end{cases}$$

где τ – параметр, имеющий размерность времени, E – модуль упругости материала, $\Phi(z)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0) = 0$.

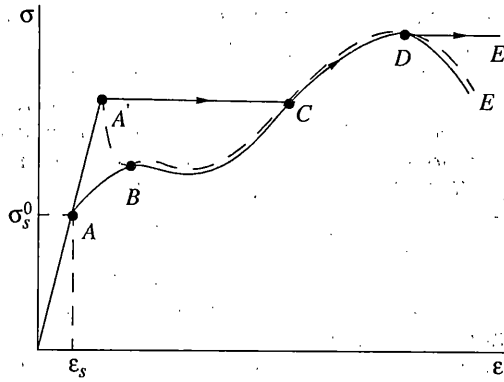
Уравнение (2.1) описывает мгновенное деформирование материала при $\tau \rightarrow \infty$ упругими соотношениями $\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E$ и бесконечно медленное деформирование при $\tau \rightarrow 0$ стационарной зависимостью $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$.

Уравнение (2.1) можно записать через скорость пластических деформаций $\dot{\epsilon}^p$:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon} - \dot{\sigma}/E \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \epsilon^p}{\partial t} = \frac{\text{sqn } \sigma}{\tau} \hat{\Phi}(|\sigma| - \sigma_s(\epsilon)), \quad \sigma = \sigma_s(\epsilon) + \text{sqn}(\sigma) \hat{\Phi}^{-1}(\dot{\epsilon}^p \tau) \quad (2.3)$$

Такая модель может рассматриваться как регуляризирующая по отношению к классической модели упругопластического материала, в которой принимается нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$. Регуляризатором является член, зависящий от производной по времени от пластической деформации. Вместо конечной связи между σ и ϵ получается дифференциальное соотношение (2.1). Функцию $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$ примем общего немонотонного вида, имеющей как участки упроч-



Фиг. 1

нения, так и разупрочнения, сплошная кривая ABCDE, показанная на фиг. 1. Исследуем как будет вести себя материал с таким определяющим уравнением при одноосном напряженно-деформированном состоянии.

3. Квазистатическое нагружение. Уравнение (2.1) связывает между собой дифференциальным соотношением две функции $\sigma(t)$ и $\epsilon(t)$. Чтобы их определить надо задать еще одно соотношение между ними. Наиболее простым условием является условие, отвечающее деформированию стержня мгновенно приложенным к его концу либо напряжением, либо деформацией, либо скоростью, плавно изменяющимися при $t > 0$. Эти три типа условий наиболее часто используются при экспериментальном определении квазистатических зависимостей между напряжением и деформацией. Исследуем решение уравнения (2.1) для трех указанных процессов, считая, что после скачкообразного изменения соответствующая величина медленно изменяется во времени, так что характерное время $t_0 \gg \tau$.

Можно задать эти три процесса следующим образом:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \sigma'_0(t), \quad t > 0, \quad \sigma = \sigma_0 \text{ при } t = 0 \\
 2) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} &= \epsilon'_0(t), \quad t > 0, \quad \epsilon = \epsilon_0 \text{ при } t = 0 \\
 3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= v'_0(t), \quad t > 0, \quad v = v_0 \text{ при } t = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Третье условие, по существу, эквивалентно второму. Действительно, учитывая, что $\partial \epsilon / \partial t = \partial v / \partial x$ и распространением волн по длине стержня можно пренебречь, получим линейное распределение скорости по стержню, закрепленному при $x = l$ $v = v_0(1 - x/l)$ и с точностью до обозначений получаем второе условие:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -v'_0(t), \quad \epsilon_0 = \frac{v_0}{c}, \quad c = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \text{ при } t = 0$$

Таким образом, достаточно рассмотреть два первых процесса.

Перейдем к безразмерным величинам, $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_0$, $\bar{\epsilon} = \epsilon / \epsilon_0$, $\bar{t} = t / t_0$ и введем большой параметр $\delta = t_0 / \tau \epsilon_s \gg 1$:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}^p}{\partial \bar{t}} = \partial \bar{\epsilon} / \partial \bar{t} - \delta \bar{\sigma} / \partial \bar{t} = \delta (\text{sqn } \bar{\sigma}) \hat{\Phi}(|\bar{\sigma}| - \sigma_s(\bar{\epsilon}))
 \tag{3.2}$$

Определяющее уравнение (2.1) и условие на процесс деформирования (3.1) можно рассматривать как систему двух нелинейных уравнений с малым параметром δ^{-1} при

старших производных. Эта задача сингулярно возмущенная по отношению к модели упругопластического материала $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$, не учитывающей временные эффекты. Общая аналитическая теория решения таких "жестких" систем обыкновенных дифференциальных уравнений известна, разработаны и численные методы их решения [16]:

Рассмотрим решение системы, состоящей из уравнения (3.2) и первого условия (3.1). Функции в правых частях уравнений $\delta\hat{\Phi}(\sigma, \varepsilon)$, $\sigma'_0(t)$ и их производные – величины $O(1)$. Спектр вариационной матрицы (3.1) определяется уравнением

$$\det \begin{pmatrix} \delta\Phi_\varepsilon - \lambda & \delta\Phi_\sigma \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\delta\Phi_\varepsilon - \lambda)\lambda = 0$$

Учитывая, что $\Phi_\varepsilon = \Phi_2 dz/d\varepsilon = -\Phi_2 \partial\sigma_s/\partial\varepsilon$, получим, что система жесткая при $d\sigma_s/d\varepsilon > 0$ и не является таковой при $d\sigma_s/d\varepsilon \leq 0$, $\Phi_2 > 0$.

Поле траекторий интегральных кривых в фазовой плоскости $\sigma - \varepsilon$ легко исследуется. Кривая $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$ разбивает плоскость на две части. Слева от нее $\sigma = \sigma_s(\varepsilon) > 0$, а справа $\dot{\varepsilon}^p = 0$.

Вне малой окрестности $O(\delta^{-1})$ кривой $\sigma - \varepsilon$ поле направлений интегральных кривых почти горизонтально, скорость изменения ε очень велика (порядка $O(\delta)$) и направлена в сторону возрастания, т.е. происходит быстрый рост пластической деформации. За малое время $O(\delta^{-1})$ стержень из состояния $A'(\sigma_0, \varepsilon_0)$ переходит по почти горизонтальной прямой в точку $C(\sigma^*, \varepsilon^*)$ в окрестности кривой $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$. В этой окрестности $\dot{\sigma} = O(1)$ и $\dot{\varepsilon} = O(1)$, так как $\Phi(z) = O(\delta^{-1})$, и напряженно деформируемое состояние изменяется вдоль возрастающей ветви CD кривой $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$ до точки D , где $\partial\sigma_s/\partial\varepsilon = 0$. Дальнейшее движение вдоль кривой на падающем отрезке становится неустойчивым, система теряет жесткость и происходит быстрое движение по горизонтали в точку $E(\sigma_*, \varepsilon_*)$ фиг. 1.

Чтобы описать изменение ε на участках быстрого изменения ($\varepsilon_0, \varepsilon^*$) достаточно положить в уравнении (2.3) $\sigma = \sigma_0$ начальному значению и проинтегрировать полученные уравнения

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = +\delta\Phi(\sigma_0 - \sigma_s(\varepsilon)), \quad t = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\Phi(\sigma_0 - \sigma_s(\varepsilon))}$$

где $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$, поскольку мгновенное деформирование происходит по закону Гука.

В точке ($\varepsilon = \varepsilon^*$, $\sigma_0 = \sigma_s(\varepsilon^*)$), в зависимости от асимптотического вида функции $\Phi(z) = az^\alpha$ при $z \rightarrow 0$ интеграл будет сходиться при $\alpha \leq 1$ и расходиться при $\alpha > 1$. Соответственно время, за которое $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$ будет конечным или бесконечным в масштабе $O(\delta^{-1})$. Однако и при $\alpha > 1$ стремление $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$ очень быстрое экспоненциального характера и "эффективное время" такого перехода всегда конечная величина в масштабе $O(\delta^{-1})$.

Если переход совершается из точки неустойчивости, то имеем внутренний пограничный слой. Начальной для него будет точка неустойчивости $\sigma = \sigma_*$ и $\varepsilon = \varepsilon_*$ при $t = t_*$ и время перехода на устойчивую ветвь будет вычисляться по формуле.

$$t - t_* = \int_{\varepsilon_*}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\Phi(\sigma_* - \sigma_s(\varepsilon))}$$

Таким образом, при медленном нагружении напряжением, зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ будет иметь вид кривой $OA'CDE'$ (фиг. 1). Для нее характерно повышение предела текучести по сравнению со стационарной зависимостью $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$ и площадки идеального скольжения.

Иначе выглядит эта зависимость, когда нагружение ведется по второму режиму

деформирования (3.1). Уравнение состояния, разрешенное относительно $d\sigma/dt$, запишется так

$$d\sigma/dt = -\delta\Phi(\sigma - \sigma_s(\varepsilon)) \quad (3.3)$$

Анализ, аналогичный приведенному выше, показывает, что в этом случае спектр вариационной матрицы не жесткий. Поле направлений интегральных кривых почти вертикально, материал из точки $A(\sigma^0, \varepsilon^0)$ почти по вертикали попадает в точку B в (δ^{-1}) -окрестности кривой $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$ за время порядка $O(\delta^{-1})$ и далее изменение напряженно-деформированного состояния происходит медленно, $\dot{\sigma} = O(1)$ и $\dot{\varepsilon} = O(1)$ на штриховой кривой $BCDE$. В этом случае для зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ характерно образование "зуба текучести" – снижение напряжения от верхнего значения предела текучести до его нижнего значения, определяемого стационарной кривой $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$.

Проведенный анализ можно рассматривать как теоретическое обоснование наблюдаемых эффектов при квазистатическом растяжении образцов на испытательных машинах силового и кинематического типа, говорящее в пользу упруговязкопластической модели материала по сравнению с классической упругопластической моделью.

4. Динамическое нагружение. Асимптотический метод решения. Перейдем к решению задачи о динамическом нагружении стержня с учетом распространения нелинейных упруговязкопластических волн. Система уравнений, описывающая динамику в одномерном случае может быть записана в виде

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\text{sqn } \sigma}{\tau} \hat{\Phi}(|\sigma| - \sigma_s(\varepsilon))$$

Запишем систему уравнений (4.1) в стандартном матричном виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = F(U)$$

где $U(v, \varepsilon, \sigma)$ – вектор решения с указанными компонентами. Собственные значения матрицы A легко определяются

$$\det |A - cI| = 0, \quad c_{1,2} = (E^{1/2}/\rho), \quad c_3 = 0$$

Им соответствуют три линейно независимых вектора, и следовательно система уравнений (4.1) принадлежит к гиперболическому типу независимо от вида диаграммы $\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$.

Характеристические соотношения имеют следующий вид

$$dx = \pm c_{1,2} dt = 0, \quad \rho c_{1,2} dv \mp d\sigma = \frac{\text{sqn } \sigma}{\tau} \hat{\Phi}(|\sigma| - \sigma_s(\varepsilon)) dt \quad (4.2)$$

$$dx = 0, \quad E d\varepsilon - d\sigma = \frac{\text{sqn } \sigma}{\tau} \hat{\Phi}(|\sigma| - \sigma_s(\varepsilon)) dt$$

Удобно перейти в уравнениях (4.1) к безразмерным переменным

$$\hat{x} = \frac{x}{c_0 t_0}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \hat{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_0 = v_0 \rho c_0, \quad c \varepsilon_0 = v_0, \quad t_0 = \frac{L}{c_0}, \quad c_0 = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2}$$

где v_0 – характерная скорость, L – длина стержня. Тогда получаем систему с параметром δ^{-1} при старшем операторе в определяющем уравнении

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$\delta^{-1}(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}) = \text{sqn } \sigma \hat{\Phi}[|\sigma| - \sigma_s(\epsilon)]$$

Здесь и далее крышка над безразмерными величинами опускается. Из последнего уравнения ясно, что при $t_0 \gg \tau_{\epsilon 0}$, $\delta^{-1} \ll 1$, оно переходит в уравнение $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$ и система (4.3) описывает распространение волн в упругопластическом материале, независимом от изменения масштаба времени с диаграммой общего вида $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$.

Будем искать решение системы (4.3) в виде разложения по малому параметру δ^{-1} :

$$U = U^0 + \delta^{-1}U^{(1)} + \dots + O(\delta^{-n}) \quad (4.4)$$

В нулевом приближении получаем систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t} = c^2(\epsilon^0) \frac{\partial \epsilon^{(0)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \epsilon^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x}, \quad c^2(\epsilon^0) = \left. \frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon^0} \quad (4.5)$$

описывающую упругопластические волны.

Эта система уравнений допускает разрывные решения: ударные волны, контактные разрывы и другие особенности, которые зависят от вида функции $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$. Для выпуклой функции, когда $\sigma''_s(\epsilon) < 0$, возможны только слабые разрывы. При $\sigma''_s(\epsilon) = 0$ (случай линейного упрочнения) возможны сильные разрывы, распространяющиеся с постоянной скоростью c_1 , отвечающей модулю упрочнения E_1 : $c_1 = (E_1/\rho)^{1/2}$. Для вогнутой диаграммы при $\sigma''_s(\epsilon) > 0$ система (4.5) допускает ударные волны как с постоянной, так и с переменной скоростью. При нулевом угле наклона $d\sigma_s/d\epsilon = 0$ возмущения не распространяются и возникают стационарные разрывы. Наконец при разупрочнении в области, где $d\sigma_s/d\epsilon < 0$, система уравнений (4.5) из гиперболической становится эллиптической и начально-краевая задача становится для нее некорректной.

Во всех этих трех случаях разложение (4.4) по степеням малого параметра перестает быть равномерно точным. И в областях и на линиях, где это происходит решение следует строить иначе, учитывая быстрый рост его изменения для одних величин и медленный для других. Решения для структур ударных волн и разрывов с постоянной скоростью асимптотическим методом были построены в работах [1, 2], для стационарного разрыва и полос локализации в [12].

Прежде чем применять этот же метод для решения задачи об ударе по стержню с диаграммой, имеющей участки разупрочнения, отметим следующие обстоятельства. Введение вязкости в упругопластическую модель при монотонно возрастающей зависимости $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$ не приводит к появлению краевого эффекта, так как краевые условия для обеих моделей одинаковы, может появиться лишь начально-краевой эффект, поскольку начальные условия в задаче отличаются. Для упруговязкопластической модели при $t = 0$ задаются независимо три величины σ , ϵ и v , а для упругопластической только две последние. Хотя число условий на концах стержня не меняется при любой диаграмме, но при разупрочнении возможна ситуация, когда эти условия оказываются несогласованными с видом диаграммы $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$. В этом случае для упругопластической модели не существует регулярного решения, а для упруговязкопластической такое решение существует. Это различие приводит к краевому эффекту в областях, где такое несогласование имеет место.

Так как в области, где материал находится в состоянии разупрочнения, происходит быстрый рост деформации и такая область неподвижна, то в ее окрестности решение должно строиться с учетом не только малости параметра δ^{-1} , но и другого малого

параметра λ . Этот параметр вводится как коэффициент растяжения по координате x , так чтобы производные решения по растянутой координате $\beta = x/\lambda$ были порядка $O(1)$. Порядок λ по отношению к δ^{-1} определяется в ходе решения задачи. Физические соображения подсказывают, что в окрестности рассматриваемого сечения, где материал разупрочняется, которое для простоты примем за $x = 0$, скорости движения частиц будут сохраняться по порядку такими же, как и в области упрочнения, напряжения будут близки к значению, определяемому стационарной зависимостью $\sigma \sim \sigma_s(\epsilon)$, а деформации будут существенно больше, чем в области упрочнения. Эти соображения и анализ уравнений (4.3) приводят к следующему сингулярному виду разложений v , σ и ϵ по параметру λ , в котором следует искать решение в области его быстрого изменения

$$\begin{aligned} v &= v^{(0)} + \lambda v^{(1)} + \dots + O(\lambda^n) \\ \sigma &= \sigma_s(\epsilon) + \lambda \sigma^{(1)} + \dots + O(\lambda^n) \\ \epsilon &= \frac{1}{\lambda} \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)} + \lambda \epsilon^{(2)} + \dots + O(\lambda^n) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подставляя эти ряды в (4.3), после преобразования к растянутой координате β , и полагая, что разложение функции $\Phi(z)$ при $z \rightarrow 0$ имеет вид

$$\Phi(z) = z^n + O(z^{n+1}) \quad (n > 0)$$

получим, что параметр $\lambda = \delta^{-(n+1)}$, а нулевое приближение быстроменяющегося решения определяется следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta} \right)^{1/n}, \quad \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta} = \frac{\partial \epsilon^{(0)}}{\partial \beta} \quad (4.7)$$

Решение необходимо сращивать с медленноменяющимся решением уравнения (4.5). Условие сращивания для случая, когда слой находится внутри стержня, можно записать в виде

$$v|_{\beta=0} = \frac{1}{2}(v_1 - v_2), \quad v|_{\beta \rightarrow \infty} = v_2 \quad (4.8)$$

где v_1 и v_2 — значения скорости в решении уравнений (4.5) слева и справа от рассматриваемого сечения, либо

$$v|_{\beta=0} = v_0, \quad v|_{\beta \rightarrow \infty} = v_* \quad (4.9)$$

если слой находится на краю стержня; v_0 — значение, заданное при $x = 0$, а v_* — скорость, определяемая по упругопластическим уравнениям (4.5), отвечающая максимальному напряжению, после которого происходит разупрочнение.

Оба условия одностипны с точностью до обозначений, поэтому перепад в значении v на полубесконечном интервале в дальнейшем будем обозначать Δv . Начальные условия здесь можно не учитывать, так как ищется установившееся решение для больших значений времени $t \gg \tau_{\epsilon_s}$. Единственное ограничение, чтобы они были согласованы с краевыми условиями (4.8)–(4.9).

5. Структура полосы локализации деформации. Решение этой задачи (4.8)–(4.9) автомодельно, оно зависит от одной переменной и удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{4v}{p(p+1)} \left(\frac{dv}{dz} \right)^{1-p} &= 0 \\ z = \frac{\beta}{(2t)^{n/(n+1)}}, \quad p = \frac{1}{n} \quad (n > 0) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Решение уравнения (5.1) при $n > 1$ можно получить в замкнутом виде

$$v = \frac{v_2}{I_1} \int_0^{\xi} \frac{dz}{(1+z^2)^k} + \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (5.2)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^k} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(k-1/2)}{2\Gamma(k)}, \quad k = \frac{n}{n-1}, \quad 1 \leq k < \infty$$

$$\xi = z \left(\frac{2(1-p)}{(1+p)p} \right)^{1/p+1} \left(\frac{\Delta v}{I_1} \right)^{p-1}$$

Полосы локализаций деформаций или зоны, где произошло разупрочнение, растут со временем, но быстро затухают по экспоненциальному закону. Эффективная ширина может быть вычислена по формуле

$$\Delta x = \frac{\Delta v}{\max(dv/dx)} = t^{n/(n+1)} \delta^{1/(n+1)} \Delta z \quad (5.3)$$

где Δz не зависит от t и δ и определяется по формуле

$$\Delta z = I_1 \left(\frac{\Delta v}{I_1} \right)^{(n-1)/(n+1)} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{n/(n+1)}$$

При $n = 1$ решение уравнения (5.1) может быть записано через интеграл вероятности

$$v = \frac{2\Delta v}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi = \Delta v \operatorname{erf}(z) \quad (5.4)$$

Эффективная ширина полосы локализации в этом случае не зависит от Δv

$$\Delta x = (\delta \pi t)^{1/2} \quad (5.5)$$

Решение для деформации может быть вычислено с помощью второго уравнения системы (4.7):

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\Delta v \beta}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} - 1 + \operatorname{erf} z \right) \quad (5.6)$$

где ε_0 – начальная деформация при $t = 0$. При $z \gg 1$ из (5.6) можно получить следующее асимптотическое представление

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \Delta v \frac{t^{3/2}}{2\pi\beta^2} e^{-\beta^2/4t} (1 + O(z^{-2})) \quad (5.7)$$

Откуда видно, что деформация очень быстро затухает с β по ширине полосы локализации.

При малых $\beta \ll 1$ из решения (5.6) находим

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\Delta v}{\pi} \left(\frac{tL}{l} \right)^{1/2} (1 + O(z)) \quad (5.8)$$

где $l = \tau_{\varepsilon} c_0$ – внутренний масштабный размер в упруговязкопластическом материале.

Из (5.8) следует, что для классической модели упругопластического материала,

рассматриваемого как предел упруговязкопластического при $t \rightarrow 0$, деформация в полосах локализации бесконечна.

Рассмотрим случай, когда $n < 1$. В этом случае ширина полосы локализации по z остается постоянной $z = z_0$, и тогда вместо условий (4.9) следует поставить условия на конечном интервале $[0, z_0]$:

$$v(0) = 0, \quad v(z_0) = \Delta v, \quad v'(z_0) = 0$$

Решение уравнения (5.1) в этом случае может быть получено в следующем виде

$$v = \frac{\Delta v}{I_0} \int_0^{z/z_0} (1 - \xi^2)^m d\xi, \quad I_0 = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(m+3/2)}$$

$$0 \leq m = \frac{n}{1-n} \leq \infty, \quad z_0 = \left(\frac{n+1}{(1-n)n} \right)^{n/(1+n)} \left(\frac{v_0}{I_0} \right)^{(1-n)/(1+n)}$$

Отметим, что из приведенного нелинейного анализа следует, что ширина зоны локализации зависит от величины Δv , а не только от свойств материала. Только при $n = 1$ эта зависимость пропадает.

Сравнение приведенного решения с полученным в [17], основанном на упруго-пластической модели, для задачи растяжения стержня с двух концов мгновенно приложенными силами, показывает, что оно устраняет недостатки, присущие упруго-пластической модели: распределение деформаций в виде δ -функции в центре стержня, равенство диссипации нулю и независимость решения от вида падающей части кривой $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$.

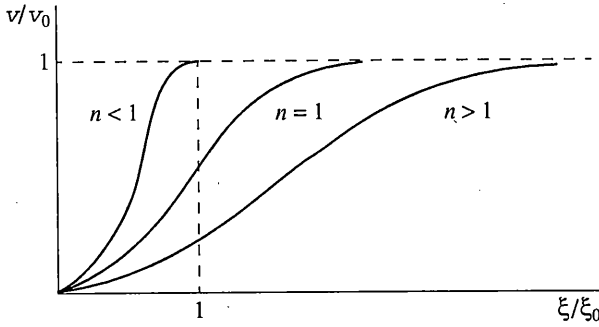
Профиль локализации деформации в этой задаче можно одновременно интерпретировать как профиль образующей шейки при динамическом растяжении образца. Как следует из приведенного решения он, главным образом, определяется типом нелинейной вязкости. Профили шейки при разных значениях n имеют вид, качественно совпадающий с реально наблюдаемым для упругопластических материалов (фиг. 2). В то время как упругопластическое решение дает профиль в виде δ -функции.

Асимптотическое решение позволяет понять качественные закономерности влияния разупрочнения материала на распространение волн, в частности позволяет ответить на вопросы, на которые классическая модель упругопластического материала не дает ответов. Однако систематическое применение асимптотического способа для решения сложных краевых задач, хотя принципиально и возможно, но оказывается менее эффективным по сравнению с численными методами решения, как для материалов с диаграммой общего вида, так и в более простом случае упрочняющегося материала. Поэтому перейдем к численному интегрированию уравнений (4.3).

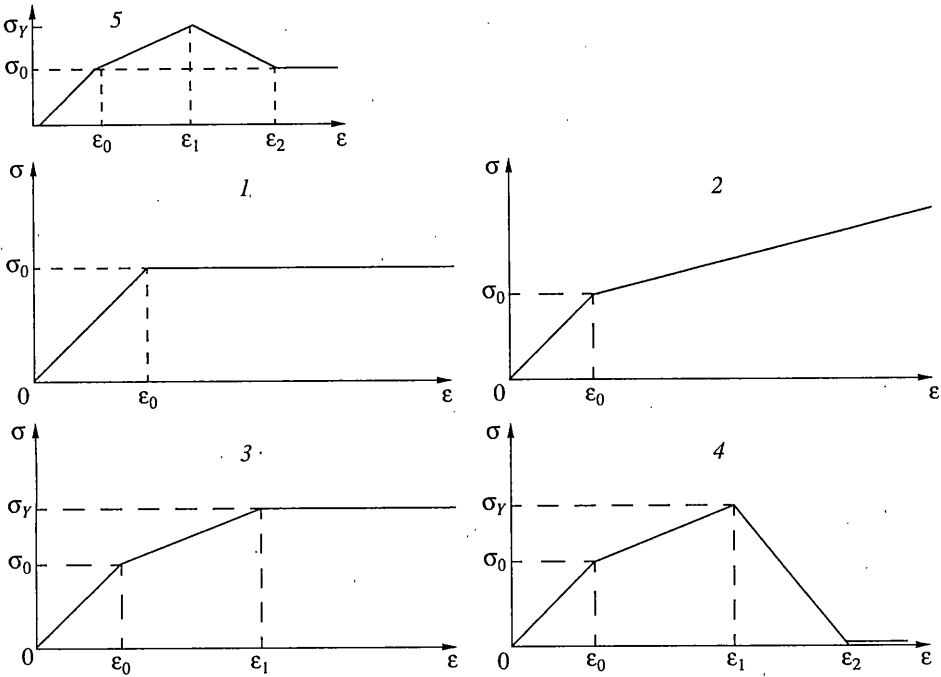
6. Численное решение. Численное решение жесткой системы уравнений (4.3) осуществлялось на основе двух разностных схем предиктор-корректор и неявной схемы, построенных с использованием характеристических соотношений (4.2), что позволило контролировать точность расчета. Подробно эти схемы описаны в [3] и [4].

Перейдем к описанию результатов численного решения задач распространения волн в разупрочняющемся упруговязкопластическом стержне и исследуем к каким отличительным особенностям приводит наличие участков разупрочнения у стационарной диаграммы $\sigma - \epsilon$.

В дальнейшем будем рассматривать следующие характерные виды диаграмм, приведенные на фиг. 3. Цифрой (1) будем обозначать идеально пластическую диаграмму; цифрой (2) – диаграмму с неограниченным линейным упрочнением; (3) – с ограниченным участком упрочнения и последующим неограниченным идеальным скольжением; (4) – диаграмму общего вида с участками упрочнения и разупрочнения до полной потери прочности при нулевом напряжении, и, наконец, (5) – диаграмму с неполным разупрочнением и остаточной прочностью.



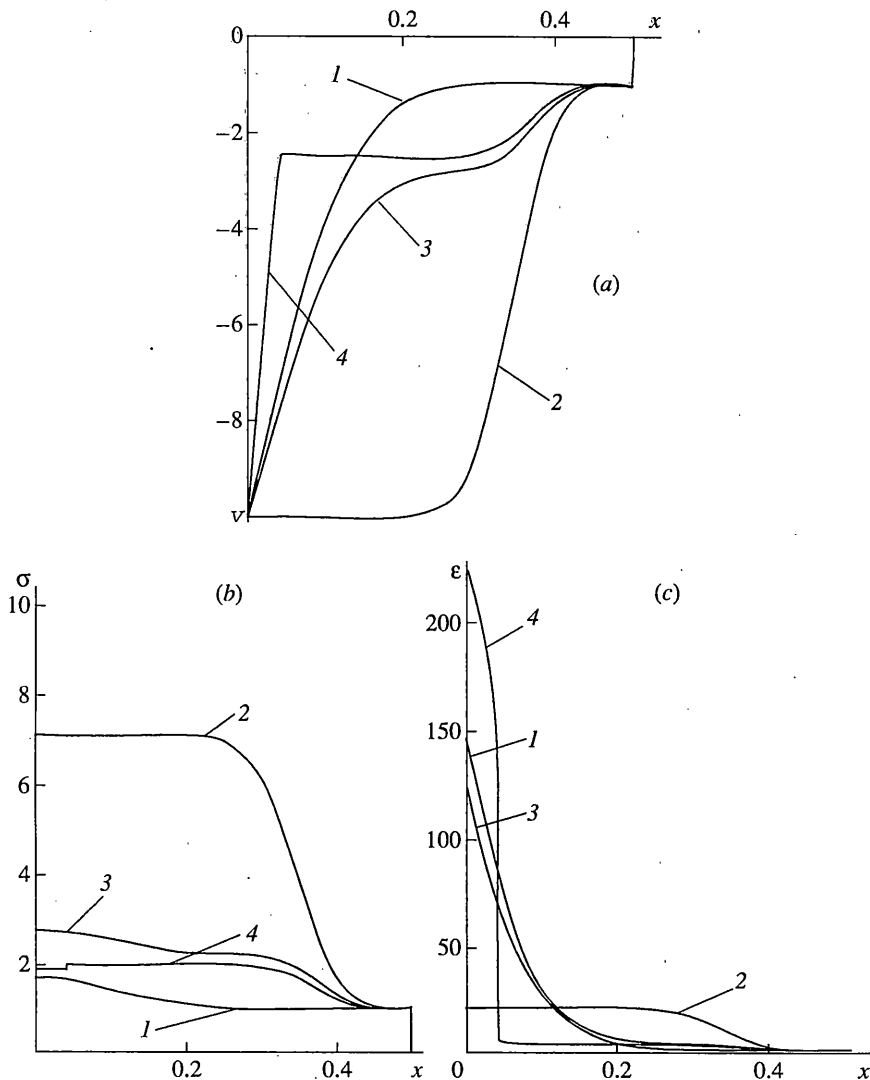
Фиг. 2



Фиг. 3

Приведем сначала решение задачи о распространении прямой волны в стержне (при ударе по концу стержня $x = 0$ постоянной скоростью $v = v_0 H(t)$, $v_0 = 10$) для различных видов стационарных или длительных зависимостей $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$, приведенных на фиг. 3 в безразмерных переменных.

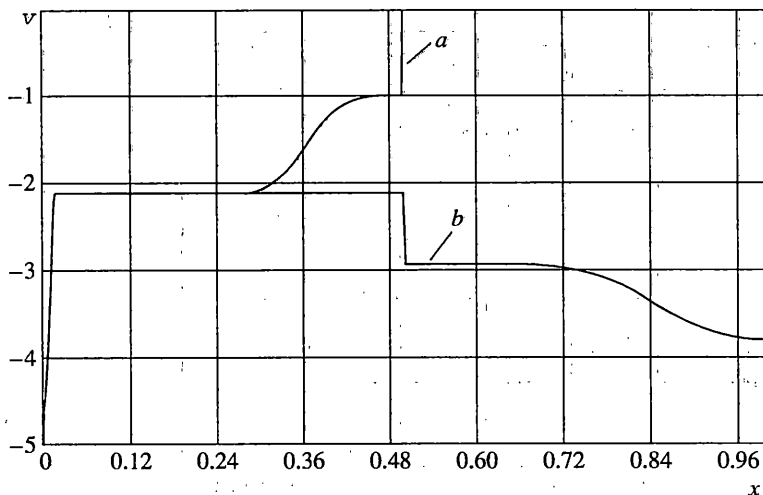
На фиг. 4, *a-c* показано распределение напряжений, скоростей и деформаций по длине стержня в момент времени $t = 0.5$, из которого ясно виден краевой эффект и локализация деформаций при $x = 0$ для диаграмм с разупрочнением и идеальной пластичностью. Наибольшее значение напряжения достигается при упрочняющейся диаграмме (2). Для диаграммы (2) с упрочнением краевой отсутствует: за упругим предвестником распространяется квазифронт упругопластической волны, со скоростью $(E_1/\rho)^{1/2}$, за которым образуется область постоянных значений напряжений, деформаций и скоростей. Напряжение в области постоянных значений наибольшие для диаграммы (2) и наименьшие для диаграммы (4) с полным разупрочнением.



Фиг. 4

Распределение деформаций в окрестности ударяемого конца стержня – при упрочнении образует плато (кривые (2), на фиг. 4) при отсутствии упрочнения стержень на конце принимает форму "шляпка гриба" – погранслою затухает по экспоненте для диаграмм (1) и (3), а при разупрочнении (диаграмма (4) фиг. 4, c) погранслою имеет конечную ширину. Локализация деформаций для диаграммы (4) наиболее интенсивная и растет с изменением малого параметра как δ^{-1} , что согласуется с асимптотическим решением.

Как следует из полученных результатов, краевой эффект возможен только при несогласовании граничного условия с равновесной диаграммой материала $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$. Этот факт проясняет причину появления псевдокраевого эффекта в расчетах Малверна [5]. Зависимость, использованная для аппроксимации равновесной диаграммы для алюминия, имела вид $\sigma_s(\epsilon) = 2 - 1/\epsilon < 2$, хотя она монотонно возрастающая кривая; но ограничена и имеет асимптоту. Численная схема, использованная в расчете, была явная, первого порядка точности и уравнения для равновесной кривой

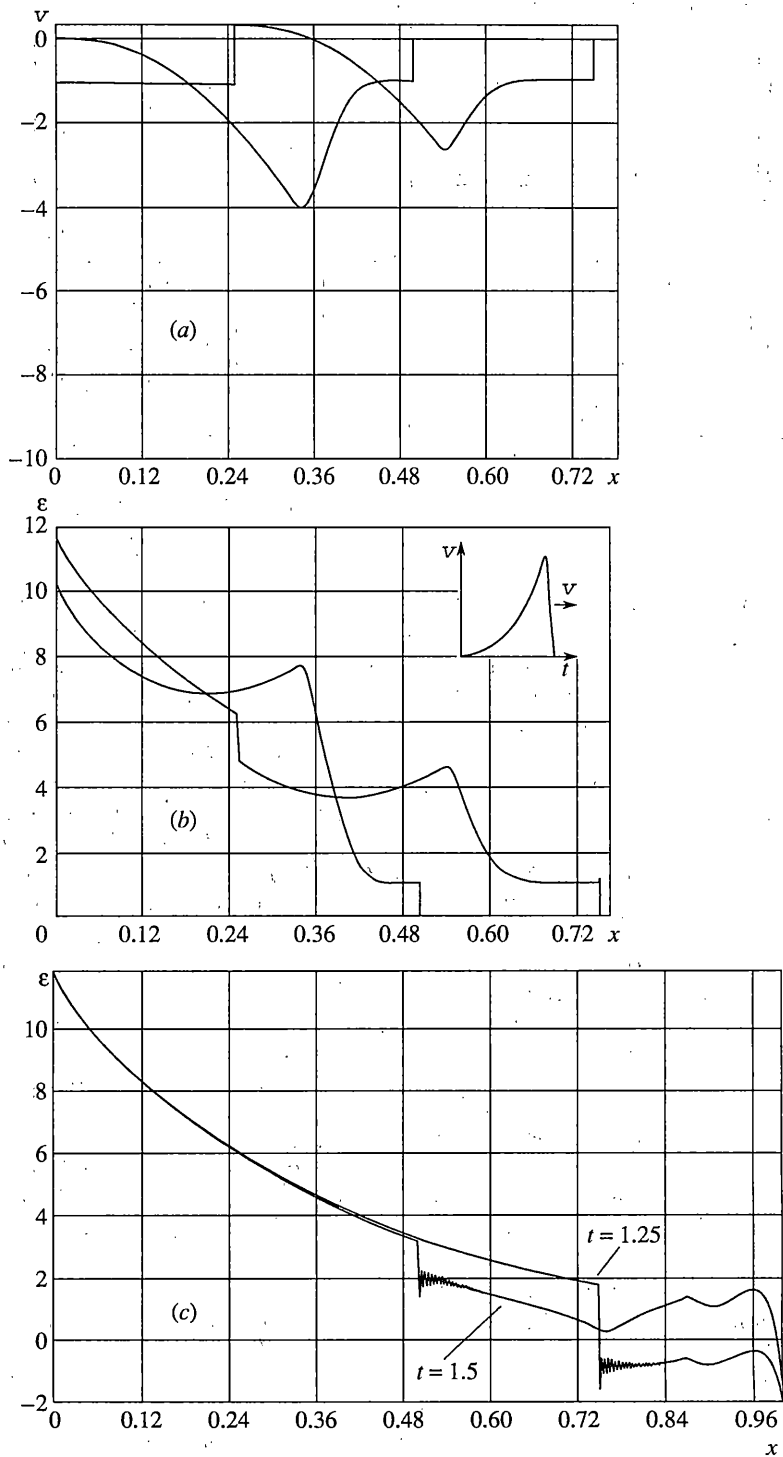


Фиг. 5

удовлетворялось приближенно с погрешностью $O(\Delta t) > O(\delta^{-1})$, причем ошибка занижала $\sigma_s(\epsilon)$, т.е. приводила к разупрочнению материала. Благодаря этому граничное условие оказывалось несогласованным с расчетной равновесной диаграммой, что и приводило к появлению слабо выраженного псевдокраевого эффекта: вместо плато получалось ниспадающее распределение деформаций. При использовании неявной схемы $\sigma = \sigma_s(\epsilon)$ при $\delta^{-1} \rightarrow 0$ выполняется точно и псевдоэффекта не возникает [3, 4].

Исследуем эффекты, связанные с разупрочнением, при распространении волн в стержнях конечной длины. На фиг. 5, где приведены профили распределения скорости в стержне со свободными концами и с диаграммой (5) при ударе с постоянной скоростью $v_0 = 10$ для двух моментов времени $t = 0.5$ до отражения и после него при $t = 1.5$. Нетрудно убедиться, что разупрочнение практически не влияет на профиль отраженной волны, который совпадает во всем стержне с профилем, получающимся при отражении упругопластической волны, отвечающей упрочняющейся части диаграммы, исключая окрестность ударяемого конца, где находится зона погранслоя, который ко времени $t = 1.5$ практически остается таким же как и при $t = 0.5$. То же самое относится и к распределению деформации – отраженная от свободного конца волна практически не сказывается на локализации деформации на ударяемом конце стержня.

Интересно проследить влияние разупрочнения на характер распространения импульса конечной длины. Рассмотрим задачу о распространении мгновенно приложенного и падающего по квадратичной параболе импульса скорости, профиль которого $v = v_0(t)$ показан на фиг. 6, в. Продолжительность импульса составляла $t_* = 0,25t_0$ и при $t = t_*$ на конце стержня происходила смена граничного условия. Условие для скорости при $t > t_*$ заменялось условием отсутствия на конце стержня напряжения $\sigma = 0$. Принималась диаграмма материала с разупрочнением и остаточной прочностью (5) фиг. 3. Распределение скорости в распространяющейся прямой волне показано на фиг. 6, а, а на фиг. 6, в приведено распределение деформаций для моментов времени $t = 0.5$ и $t = 0.75$. На фиг. 6, а видно, что импульс быстро затухает и расплывается уже при $t = 0.5$. Максимальное значение скорости снизилось с $v_{\max} = 10$ до $v_{\max} = 4$, а при $t = 0.75$ – до $v_{\max} = 2.6$. При смене граничного условия возникает скачок скорости, который распространяется вслед за основным импульсом. Благодаря быстрому падению скорости в приложенном импульсе, в его хвостовой части появляются напряжения противоположного знака и для их снятия необходим дополнительный скачок ско-



Фиг. 6

$V_1/\alpha\varepsilon_s$	-10	-20	-25	-30	-40
$-\sigma_{\max}/\sigma_0$	1,07	1,499	1,605	1,433	1,196
l_{\max}/l_2	0,710	0,590	0,547	0,520	0,740
l_B/l_2	0,689	0,260	0,377	0,556	0,712
t_B/t_0	2052	1844	1967	2118	2459

рости. Распределение деформации в прямой волне на фиг. 6, в показывает, что величина максимальной деформации в передней части распространяющегося основного импульса не превышает деформации, при которой начинается разупрочнение. Поэтому даже для импульса средней продолжительности отражение волны от свободного конца мало отличается от отражения упругопластической волны, интенсивность которой находится в пределах упрочняющейся части диаграммы (5) фиг. 3. Влияние разупрочнения, таким образом, проявляется только в окрестности ударяемого конца. Кроме того, в случае конечного импульса локализация деформаций значительно менее выражена, ее рост происходит только в течении конечного промежутка времени, а дальше она замораживается и остается неизменной после прохождения скачка, вызванного сменой граничного условия фиг. 6, в.

Распространение деформаций в отраженной волне показано на фиг. 6, с для моментов $t = 1.25$ и $t = 1.5$. В первые моменты времени после отражения напряжения и деформации меняют знак и сжатие переходит в растяжение, но затем по мере прихода основной части падающего импульса деформации снова становятся сжимающими и при $t = 1.5$ деформация во всем стержне сжимающая.

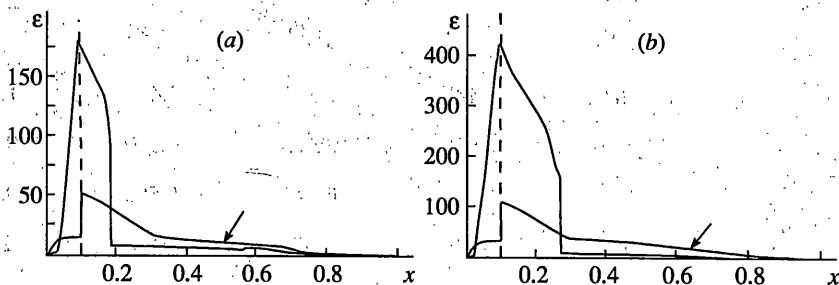
Таким образом, можно констатировать, что учет разупрочнения материала приводит к снижению растягивающих напряжений при отражении и к уменьшению возможности для откольного разрушения.

Наиболее простым способом нагружения стержня или пластины импульсом конечной длины, который широко используется при экспериментальных исследованиях откольного разрушения, является свободное соударение стержней. Изменяя длины стержней, скорости соударения и материалы соударяющихся стержней можно создавать импульсы требуемой продолжительности и интенсивности для изучения откольного разрушения в упругопластическом материале [18, 19]. Но интерпретация получаемых в эксперименте результатов требует численного моделирования.

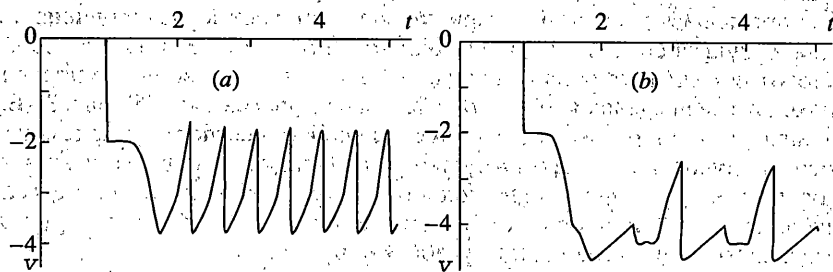
Рассмотрим задачу о соударении двух стержней: короткого стержня – ударника и длинного стержня – мишени и исследуем вопрос о том, как повлияет разупрочнение на откольное разрушение. Короткий стержень налетает на длинный со скоростью v_0 и в обоих стержнях распространяются волны сжатия, которые после отражения переходят в волны растяжения.

После отражения от свободного конца ударника обратная волна проникает в мишень и сталкивается с волной растяжения, отраженной от свободного конца стержня – мишени. В результате взаимодействия этих двух волн возникают растягивающие напряжения, они могут оказаться достаточными для того, чтобы вызвать откольное разрушение в мишени.

Суммарная длина обоих стержней принималась равной единице, длина ударника составляет $1/10$ от этой длины. Число разбиений по всей длине $N = 1000$, расчет проводился до $t = 2.5t_0$. Результаты представлены в таблице, где σ_{\max} – значение максимального растягивающего напряжения, которое возникает в мишени без учета откола, l_{\max} – безразмерное расстояние от правого конца мишени до точки, в котором возникает напряжение σ_{\max} , l_B – длина отколовшейся части стержня, t_B – момент, в который происходит откол. Диаграмма материала в обоих стержнях была вида (5) на



Фиг. 7



Фиг. 8

фиг. 3, но параметры для ударника и мишени отличались. Для ударника $E_1/E = 0.3$, $\epsilon_1/\epsilon_0 = 5$, $\epsilon_2/\epsilon_0 = 9$, а для мишени $E_1/E = 0.1$, $\epsilon_1/\epsilon_0 = 10$, $\epsilon_2/\epsilon_0 = 15$. Для описания откольного разрушения принимался критерий мгновенного откола $|\sigma| < \sigma_{\max}$, а также интегральный критерий накопления поврежденности материала в следующем виде

$$\int_0^t \frac{dt}{\tau(\sigma)} = 1, \quad \tau(\sigma) = \begin{cases} k(\sigma - \sigma_s)^\alpha, & \sigma > \sigma_s \\ \infty, & \sigma \leq \sigma_s \end{cases}$$

Использовались константы материала k и α , полученные в работе [19]. В таблице приведены значения σ_{\max} и других параметров откола при использовании мгновенного критерия откола для различных скоростей соударения стержней. Как видно из приведенных данных, зависимость параметров откола для разупрочняющегося материала имеет немонотонный характер. Зависимость растягивающих напряжений σ_{\max} от скорости соударения имеет максимум. Это связано с тем, что с некоторого значения v_0 удар вызывает настолько большие пластические деформации в месте контакта, что отраженный от свободного конца ударника импульс, проходя через этот участок сильно ослабляется и взаимодействуя с ослабленной волной, отраженной от свободного конца мишени не в состоянии вызвать откол.

На фиг. 7, а, в приведено распределение деформаций в стержнях после соударения при $t = 2.5t_0$, которое при больших t практически не изменяется, соответственно для двух значений скорости стержня $v_0 = -25$ и $v_0 = -50$, и для двух различных типов диаграмм (2) и (5) фиг. 3. Получено, что для диаграммы с упрочнением откол происходит в точке, указанной стрелкой, а для диаграммы (5) он вообще не происходит. Распределение деформаций для диаграммы (5) носит ярко выраженный локализованный характер вблизи места соударения, вдали от которого деформации лишь немного превышают упругие и почти не меняются с увеличением скорости удара. Для материалов с диаграммой (2) локализация деформаций значительно слабее, а вдали от места соударения они существенно превышают напряжения, полученные для диаграммы с разупрочнением. Это приводит к отколу.

На фиг. 8, а, в показано изменение скорости на свободном конце стержня – мишени для двух значений скорости соударения $v_0 = -20$ и $v_0 = -40$. Колебания, которые происходят после откола носят почти периодический характер. Частота этих колебаний зависит от длины отколовшейся части стержня.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-00-00173) и научной программы Университеты России (проекты 015.04.01.66).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кукуджанов В.Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
2. Kikudzhyanov V.N. Investigation of shock waves structure in elastoviscoplastic bars using the asymptotic method // Arch. of Mech. 1981. V. 33. № 5. P. 739–751.
3. Кукуджанов В.Н. Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. М.: МФТИ, 1992. 122 с.
4. Кукуджанов В.Н. Микромеханическая модель неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 72–87.
5. Малверн Л. Распространение продольных пластических волн с учетом влияния скорости деформации // Механика. Сб. перев. и обзоров. Иностран. период. лит. 1952. № 1. С. 153–161.
6. Соколовский В.В. Распространение упруговязкопластических волн в стержнях // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 261–280.
7. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х.Дж., Риппергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках // Проблемы механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. Вып. 3. С. 24–90.
8. Пежина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
9. Steinmann P., Stein E. Finite element localization analysis of micropolar strength degrading materials // Proc. Intern. Conf. Computer modeling of concrete structures. Eds. H. Mang. and oth. Swansea: Peneridge Press, 1994. P. 435–444.
10. Pijaudier-Cabot G., Bazant Z.P. Nonlocal damage theory // J. Eng. Mech. 1987. № 113. P. 1512–1533.
11. Sluys L.J., De Borst R., Mulhthaus H.B. Wave propagation localization and dispersion in a gradient dependent medium // Intern. J. Solid ans Struct. 1993. V. 30. № 9. P. 1153–1171.
12. Кукуджанов В.Н. О структуре полос локализации деформаций в нелокальной теории пластичности при динамическом нагружении // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 104–114.
13. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 327 с.
14. Needleman A. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1988. V. 6. P. 69–85.
15. Tvergaard V., Needleman A. Elastic-viscoplastic analysis of ductile fracture / Finite inelastic deformations – Theory and applications (UITAM Sym. Hannover/Germany). Eds. D. Besdo, E. Stein. Springer-Verlag, Berlin. 1991. P. 3–14.
16. Федоренко П.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 526 с.
17. Bazant Z.P., Belytschko T.B. Wave propagation in a strain softening bar; exact solution // J. Eng. Mech. 1985. V. 111. № 3. P. 381–389.
18. Новиков С.А. Напряжение сдвига и откольная прочность материалов при ударных нагрузках (Обзор) // ПМТФ. 1981. № 3. С. 109–120.
19. Кузьмина В.И., Кукуджанов В.Н. К моделированию откольного разрушения при соударении пластин // Изв. РАН. МТТ. 1985. № 3. С. 99–104.

Москва

Поступила в редакцию
25.05.2001