МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001

УДК 539.374

© 2001 г. В.М. САДОВСКИЙ

К ТЕОРИИ УДАРНЫХ ВОЛН В СЖИМАЕМЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

В рамках модели пластического течения упругосжимаемой среды при конечных деформациях исследуется класс разрывных решений с ударными волнами. Определяющие уравнения модели приводятся к вариационному неравенству, интегральное обобщение которого позволило получить полную систему соотношений сильного разрыва. На основе анализа этой системы доказывается, что при условиях пластичности Мизеса и Треска – Сен-Венана возможны продольные ударные волны, распространяющиеся вдоль главных осей тензора напряжений, а также поперечные и квазипоперечные волны, направляющие векторы которых ориентированы в главных плоскостях.

Проблема построения обобщенных решений с ударными волнами в теории упругопластического течения изучена значительно меньше, чем в механике идеальных (термодинамически обратимых) сред [1]. Оказалось, что прямое применение метода интегрального обобщения в этой теории не дает полной системы уравнений на поверхности разрыва, так как ассоциированный закон течения, описывающий диссипативный механизм деформирования, не приводится к эквивалентной системе интегральных законов сохранения [2, 3].

Полная система соотношений сильного разрыва для модели малых деформаций упругопластической среды впервые была получена при помощи вспомогательной гипотезы о максимальной диссипации энергии на фронте волны [4]. Обоснованием этой гипотезы послужил альтернативный способ построения соотношений на основе интегрального обобщения вариационного неравенства, связанного с принципом максимума мощности диссипации энергии [5]. Подобное исследование геометрически линейных моделей упрочняющихся сред проводилось в [6, 7]. Естественно, что полученные в этих работах выражения для скоростей волн и уравнения, связывающие скачки решения, пригодны лишь для анализа ударных волн небольшой амплитуды.

Другой универсальный метод построения системы соотношений на поверхности разрыва связан с приближением разрывного решения последовательностью решений модели вязкой и теплопроводной среды со сглаженными ударными волнами при стремлении коэффициентов вязкости и теплопроводности к нулю. Такой метод применялся к анализу частных моделей теории упругопластического течения при конечных деформациях, описывающих плоские волны одноосного деформирования [8–10]. В случае пространственного состояния в окрестности фронта волны при его реализации возникают непреодолимые технические трудности.

В настоящей работе исследование ударных волн конечной амплитуды проводится на основе упрощенной термомеханической модели динамического деформирования сжимаемой среды с упругим изменением объема и пластическим формоизменением.

1. Специальная формулировка модели. Процесс деформирования сплошной среды рассматривается относительно неподвижной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3. Система уравнений движения и уравнение неразрывности в эйлеровом описании имеют вид

$$\rho \dot{v}_j = \sigma_{jk,k}, \quad \dot{\rho} = -\rho v_{k,k} \qquad (1.1)$$

Здесь и всюду ниже принимается правило суммирования по повторяющимся индексам, индекс после запятой означает частную производную по времени или пространственной переменной, точка – полную производную по времени. Используются общепринятые обозначения.

Первый принцип термодинамики и неравенство Клаузиуса – Дюгема, служащее определением внутреннего производства энтропии в элементе среды s^i, записываются как

$$\rho \dot{U} = \sigma_{jk} v_{j,k} - q_{k,k}, \quad \rho \dot{s}^i = \rho \dot{s} + (q_k / T)_{,k} \geqslant 0 \qquad (1.2)$$

Пренебрегая упругим формоизменением при развитых пластических деформациях, будем считать, что термодинамическое состояние элемента полностью определяется двумя параметрами: плотностью ρ, характеризующей деформацию объема, и энтропией s. Внутренняя энергия является функцией состояния $U = U(\rho, s)$, следовательно, из соотношений (1.2) с учетом уравнения неразрывности можно получить равенство

$$\rho T \dot{s}^i = \tau_{jk} v_{j,k} + (p - \rho^2 \partial U / \partial \rho) \dot{\rho} / \rho + \rho (T - \partial U / \partial s) \dot{s} - T_{,k} q_k / T$$

в котором $p = -\sigma_{jk}\delta_{jk}/3$ – гидростатическое давление, $\tau_{jk} = \sigma_{jk} + p\delta_{jk}$ – девиатор тензора напряжений Коши, δ_{jk} – символ Кронекера. В силу независимости термодинамических параметров отсюда получим систему уравнений состояния $p = \rho^2 \partial U/\partial \rho$, $T = \partial U/\partial s$ и неравенство внутренней диссипации энергии

$$\rho T \dot{s}^i = \tau_{jk} \xi_{jk} - T_{,k} q_k / T \geqslant 0 \qquad (1.3)$$

где $\xi_{jk} = (v_{j,k} + v_{k,j})/2 + \dot{\rho}/(3\rho)\delta_{jk}$ – тензор скоростей пластической деформации элемента.

Судя по правой части неравенства (1.3), систему обобщенных термодинамических сил в рассматриваемом необратимом процессе составляют величины τ_{jk}, $-T_{,k}/T$, а соответствующие этой системе термодинамические потоки равны ξ_{jk} и q_k. Считая обобщенные силы зависящими от потоков и параметров состояния среды, можно определить диссипативную функцию $\rho T \dot{s}^i = D(\xi, q)$ (параметры ρ и s для краткости опущены).

Предположим, что диссипативная функция разлагается в сумму двух слагаемых $D_0(\xi)$ и $D_1(q)$, первое из которых характеризует процесс производства тепла в элементе среды, а второе – тепловую диффузию. Для изотропной среды второе слагаемое находится в явной форме из закона теплопроводности Фурье $D_1 = q^2/(\alpha T)$, где $\alpha(\rho, T)$ – коэффициент теплопроводности. Первое слагаемое представляет собой положительно-однородную функцию относительно ξ, поскольку при равномерном температурном поле пластическое деформирование не зависит от масштаба времени.

По теореме Эйлера для однородных функций $D_0 = \xi_{jk}\partial D_0/\partial \xi_{jk}$. Из (1.3) с учетом независимости потоков следует система определяющих уравнений необратимого деформирования $\tau_{jk} = \partial D_0/\partial \xi_{jk}$. Если диссипативная функция выпукла относительно потоков, то эту систему можно представить в более общей форме, допускающей недифференцируемость D_0:

$$\tau \in \partial D_0(\xi) \equiv \{\tau^* : \ D_0(\xi^*) - D_0(\xi) \geqslant \tau^*_{jk} (\xi^*_{jk} - \xi_{jk}) \text{ для всех } \xi^* \} \qquad (1.4)$$

Решение включения (1.4), содержащего субдифференциал диссипативной функции, удовлетворяет также эквивалентному уравнению

$$\tau_{jk} \xi_{jk} - D_0(\xi) = \max_{\xi^*} \{\tau_{jk} \xi^*_{jk} - D_0(\xi^*)\}$$

Правая часть данного уравнения есть преобразование Юнга функции D_0, которое в силу однородности D_0 равно индикаторной функции выпуклого и замкнутого множества $K = \{\tau^* : \ \tau^*_{jk}\xi^*_{jk} \leqslant D_0(\xi^*)$ для всех $\xi^*\}$:

$$\delta_K(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \tau \in K \\ +\infty, & \text{если} \quad \tau \notin K \end{cases}$$

Граница множества K в пространстве девиаторов напряжений описывает поверхность текучести среды.

По свойству инволютивности преобразования Юнга

$$D_0 \equiv \tau_{jk}\xi_{jk} = \max_{\tau^*}\{\tau^*_{jk}\xi_{jk} - \delta_K(\tau^*)\} = \max_{\tau^*\in K}\tau^*_{jk}\xi_{jk}$$

Таким образом, справедлива двойственная формулировка системы определяющих уравнений необратимого деформирования в виде принципа максимума мощности диссипации энергии

$$-(\tau^*_{jk} - \tau_{jk})\xi_{jk} \geqslant 0, \quad \tau, \tau^* \in K \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1), (1.2) и вариационное неравенство (1.5) составляют замкнутую модель динамического деформирования сжимаемой пластической среды, термомеханические свойства которой характеризуются функцией состояния $U(\rho, s)$ и множеством допустимых напряжений $K(\rho, s)$. В случае изотропной среды с сингулярным условием пластичности множество K задается на девиаторной плоскости пространства главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при помощи условия $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leqslant \varkappa(\rho, T)$. Здесь $\varkappa$ – предел текучести материала; f – выпуклая, положительная, симметричная относительно аргументов функция текучести, не зависящая от гидростатического давления и равная нулю в начале координат пространства. Эта функция представима в виде $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$, где f_l – непрерывно дифференцируемые выпуклые функции. После применения теоремы Куна – Таккера неравенство (1.5) приводится к системе уравнений ассоциированного закона течения $\xi_{jk} = \lambda_l \partial f_l/\partial\tau_{jk}$, в которой λ_l – неотрицательные множители Лагранжа, равные нулю при $f_l < \varkappa$.

В пределе при $\varkappa \to 0$ рассматриваемая модель переходит в модель идеального сжимаемого газа, при $\partial U/\partial\rho \to \infty$ – в модель несжимаемой жесткопластической среды. Одновременный учет двух механизмов – упругого изменения объема и пластического формоизменения – делает ее пригодной для описания динамики деформируемых сред в условиях высоких давлений, когда жесткопластическая модель неприменима из-за значительной объемной деформации элементов. Обоснование возможности пренебрежения упругими сдвигами при построении определяющих уравнений упругопластического деформирования приводится в работе [11].

Модель сжимаемой вязкопластической среды строится путем замены в (1.4) диссипативной функции D_0 потенциалом напряжений $\Psi_0 = D_0(\xi) + \mu_0|\xi|^2$, в котором $\mu_0(\rho, T)$ – коэффициент вязкости, $|\xi| = \sqrt{\xi_{jk}\xi_{jk}}$ – евклидова норма тензора. Из-за неоднородности потенциала уравнение в (1.3) при отсутствии притока тепла становится неинвариантным относительно растяжения времени, следовательно, в этой модели учитывается термодинамическое влияние скорости деформирования.

Цепочка легко проверяемых равенств

$$\max_{\xi^*}\{\tau_{jk}\xi^*_{jk} - \max_{\tau^*\in K}\tau^*_{jk}\xi^*_{jk} - \mu_0|\xi^*|^2\} = \max_{\xi^*}\min_{\tau^*\in K}\{\tau_{jk}\xi^*_{jk} - \tau^*_{jk}\xi^*_{jk} - \mu_0|\xi^*|^2\} =$$

$$= \min_{\tau^*\in K}\max_{\xi^*}\{\tau_{jk}\xi^*_{jk} - \tau^*_{jk}\xi^*_{jk} - \mu_0|\xi^*|^2\} = \min_{\tau^*\in K}|\tau - \tau^*|^2/(4\mu_0)$$

позволяет вычислить преобразование Юнга для Ψ_0: $\Phi_0 = |\tau - \tau^\pi|^2/(4\mu_0)$, где τ^π –

проекция девиатора тензора напряжений на K по норме $|\tau|$. Это выражение представляет собой потенциал скоростей деформирования вязкопластической среды Шведова – Бингама с определяющими уравнениями

$$\xi_{jk} = \partial\Phi_0 / \partial\tau_{jk} \equiv (\tau_{jk} - \tau_{jk}^{\pi})/(2\mu_0) \tag{1.6}$$

Известно, что уравнения (1.6) некорректны при описании обратимого деформирования среды на стадии разгрузки ($f < \varkappa$), поскольку при заданных скоростях деформации они не позволяют однозначно найти напряженное состояние элемента среды. Один из способов регуляризации модели состоит в добавлении к потенциалу Φ_0 вязкого квадратичного слагаемого $\Phi = \Phi_0 + |\tau|^2/(4\mu)$, $\mu = \mu(\rho, T)$.

Для такого потенциала определяющие уравнения принимают вид

$$\xi_{jk} = (\tau_{jk} - \tau_{jk}^{\pi})/(2\mu_0) + \tau_{jk}/(2\mu) \tag{1.7}$$

Реологическая схема соответствующей модели приведена на фиг. 1.

По свойству проекции на выпуклое множество для всех тензоров $\tau^* \in K$ выполняется неравенство

$$(\tau_{jk}^* - \tau_{jk}^{\pi})(\tau_{jk}^{\pi} - 2\mu\xi_{jk}) = (1 + \mu/\mu_0)(\tau_{jk}^* - \tau_{jk}^{\pi})(\tau_{jk}^{\pi} - \tau_{jk}) \geqslant 0$$

из которого следует, что $\tau^{\pi} = (2\mu\xi)^{\pi}$. Учитывая это, можно обратить уравнение (1.7), выразив девиатор тензора напряжений через тензор скоростей деформации

$$\tau_{jk} = \frac{\mu}{\mu_0 + \mu}\{2\mu_0\xi_{jk} + (2\mu\xi_{jk})^{\pi}\}$$

Потенциалом напряжений в данной модели является выпуклая функция

$$\Psi = -\frac{1}{4(\mu_0 + \mu)}|2\mu\xi - (2\mu\xi)^{\pi}|^2 + \mu|\xi|^2$$

равная преобразованию Юнга для Φ. В пределе при $\mu_0 \to 0$, $\mu \to \infty$ определяющие уравнения (1.7) преобразуются в вариационное неравенство (1.5). Процесс разгрузки в рамках регуляризованной модели описывается на основе уравнений динамики вязкой сжимаемой жидкости.

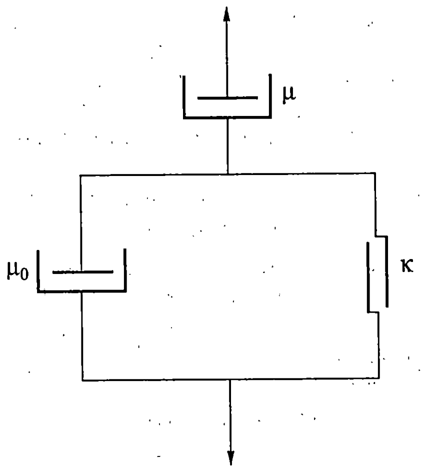
2. Соотношения сильного разрыва. Разрывы скоростей, напряжений и термодинамических параметров состояния возникают в адиабатическом приближении модели пластической среды без учета вязких эффектов. Необходимая при построении обобщенных решений этой модели система уравнений баланса массы, импульса и энергии на разрыве может быть получена при помощи интегральных законов сохранения в следующем виде (см., например, [1]):

$$[m] = 0, \quad m[v_j] = -[\sigma_{jk}]\nu_k; \quad m[v^2/2 + U] = -[\sigma_{jk}v_j]\nu_k \tag{2.1}$$

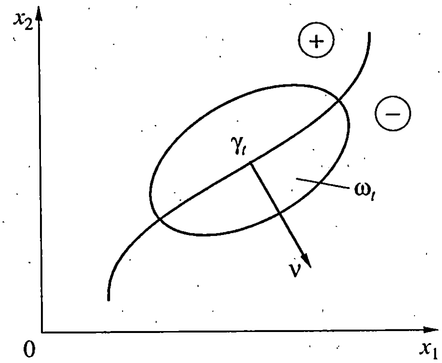
где квадратные скобки означают скачок функции $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$ ($\varphi^{\pm}$ – односторонние пределы функции φ на поверхности разрыва); c – скорость движения фронта разрыва в направлении нормали, v_{ν} – нормальная скорость среды, $m = \rho(c - v_{\nu})$ – величина потока массы, положительная для волн, распространяющихся вправо относительно среды, отрицательная для волн, движущихся в противоположном направлении, и равная нулю на контактных разрывах.

Пополним систему (2.1), исходя из интегрального обобщения принципа максимума (1.5). Пусть γ_t – произвольный участок фронта разрыва в момент времени t; ω_t – пространственная область, включающая в себя γ_t, $\partial\omega_t$ – граница ω_t (фиг. 2). Мощность пластической диссипации энергии в этой области на гладком поле допустимых напряжений вычисляется по формуле Грина

$$\int\limits_{\omega_t} \tau_{jk}^* \xi_{jk}\, d\omega = \int\limits_{\partial\omega_t} \tau_{jk}^* v_j \nu_k\, d\gamma - \int\limits_{\omega_t} \tau_{jk,k}^* v_j\, d\omega$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Существенно, что правая часть приведенного равенства имеет смысл в случае разрывного поля скоростей. Стягивая ω_t к поверхности разрыва, получим выражение для мощности диссипации на γ_t:

$$d_t^* = -\int\limits_{\gamma_t} \tau_{jk}^* [v_j] \nu_k d\gamma$$

Отсюда следует, что поверхностная плотность мощности равна $-\tau_{jk}^* [v_j] \nu_k$.

Найти мощность диссипации энергии d_t на действительном напряженном состоянии таким же способом не удается, поскольку в точках границы γ_t изменяются скачком скорости и напряжения одновременно. Поверхностная плотность этой величины определяется непосредственно из системы уравнений (2.1), из которой выводится уравнение притока тепла на разрыве:

$$m([U] + p^0[1/\rho]) = -\tau_{jk}^0 [v_j] \nu_k$$

(здесь и ниже $\varphi^0 = (\varphi^+ + \varphi^-)/2$). Поскольку выражение $-p^0[1/\rho]$, связанное со скачком ρ, представляет собой изменение внутренней энергии элемента при переходе через разрыв за счет объемной деформации, то искомая плотность равна левой части уравнения. В силу этого уравнения она может быть также получена по формуле для поверхностной плотности мощности пластической диссипации энергии на допустимых напряжениях после замены тензора τ^* тензором τ^0.

Интегральное обобщение принципа максимума на разрыве сводится к неравенству $d_t \geqslant d_t^*$.

При произвольном варьировании напряженного состояния по обе стороны от разрыва тензор τ^0 пробегает в пространстве напряжений область $K^0 \equiv (K^+ + K^-)/2$. Предположим, что интегральное неравенство выполняется для любого тензора τ^*, удовлетворяющего на γ_t ограничению $\tau^* \in K^0$. С учетом произвольности γ_t получим

$$(\tau_{jk}^* - \tau_{jk}^0)[v_j] \nu_k \geqslant 0, \quad \tau^0, \ \tau^* \in K^0 \tag{2.2}$$

Строго говоря, требование выполнения интегрального принципа максимума для гладких полей допустимых напряжений позволяет вывести неравенство (2.2) только для вариаций частного вида, когда $\tau^* \in K^+ \cap K \subset K^0$. Оказывается, такого класса вариаций недостаточно при описании разрывов. Расширение множества "пробных функций" до K^0 необходимо и естественно с механической точки зрения.

Неравенство (2.2), отвечающее принципу максимума диссипации энергии на скачке, совместно с системой уравнений (2.1) образует замкнутую модель сильного разрыва в сжимаемой пластической среде. Модель позволяет исследовать классы разрывных решений при различных условиях пластичности. Из (2.2) в общем случае вытекает, что движущиеся разрывы возможны только если тензор τ^0 принадлежит границе множества K^0, а тензоры $\tau^\pm$ являются граничными точками $K^\pm$ соответственно. Действительно, если τ^0 – внутренняя точка, то в силу произвольности вариации напряжений выполняется система равенств $[v_j]\nu_k + [v_k]\nu_j = \frac{2}{3}[v_\nu]\delta_{jk}$. Полагая за счет поворота осей координат $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$, получим условие непрерывности вектора скорости на фронте. При отсутствии скачка скорости из уравнения неразрывности и условия $[\rho] \neq 0$ имеем $m = 0$, $v_1 = c$. Следовательно, в данном случае реализуется контактный разрыв, неподвижный относительно среды. На фронте контактного разрыва непрерывен вектор напряжений, проекциями которого в системе координат, связанной с фронтом, являются σ_{11}, σ_{12} и σ_{13}. Допускается разрыв напряжений σ_{22}, σ_{33}, σ_{23} и внутренней энергии U. Разрывы такого рода реализуются, например, в случае контактного соединения двух сред вдоль плоского участка границы при наличии в одной из них поперечных начальных напряжений.

3. Условие пластичности Мизеса. На основе тождества [7]:

$$\frac{\varkappa^+\varkappa^-}{4}\left[\!\left[\frac{\tau}{\varkappa}\right]\!\right]^2 = \frac{\varkappa^0}{2\varkappa^+}|\tau^+|^2 + \frac{\varkappa^0}{2\varkappa^-}|\tau^-|^2 - |\tau^0|^2$$

доказывается, что при условии пластичности Мизеса с

$$f = |\tau|/\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{j<k}(\sigma_j - \sigma_k)^2}$$

тензор $\tau_{jk}/\varkappa$ на фронте диссипативной ударной волны непрерывен. Поэтому тензоры напряжений по обе стороны γ_t соосны. После поворота координатной системы к главным осям этих тензоров из (2.1), (2.2) получим

$$m[v_j] = -[\sigma_j]\nu_j, \quad m^2[1/\rho] = [\sigma_j]\nu_j^2, \quad 2m^2[U] = [\sigma_j^2]\nu_j^2 \tag{3.1}$$

$$[\sigma_j + \sigma_k]\nu_j\nu_k = (2[\sigma_l]\nu_l^2/3 + \lambda\tau_j/\varkappa)\delta_{jk}$$

где $\lambda \geqslant 0$ – множитель Лагранжа, равный нулю при $f(\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0) < \varkappa^0$.

Анализируя систему уравнений (3.1), можно показать, что в соответствие с моделью сильного разрыва в сжимаемой пластической среде кроме неподвижных контактных разрывов возможны два типа диссипативных ударных волн: продольные волны, распространяющиеся вдоль главных осей, и квазипоперечные волны, направления движения которых лежат в главных плоскостях. При пространственной ориентации вектора нормали к фронту ($\nu_1\nu_2\nu_3 \neq 0$) движущиеся разрывы невозможны. В этом случае в силу (3.1) выполняются уравнения $[\sigma_j + \sigma_k] = 0$ ($j \neq k$), позволяющие установить непрерывность скоростей и напряжений.

Продольные волны с направляющими косинусами $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$ описываются системой соотношений

$$\tau_1/\varkappa = \pm 2/\sqrt{3}, \quad \tau_2/\varkappa = \tau_3/\varkappa = -\tau_1/(2\varkappa), \quad [\sigma_1]\tau_1/\varkappa > 0 \tag{3.2}$$

Последнее из них – условие положительности множителя Лагранжа – обеспечивает диссипативность волн. Выбор знака (+) в (3.2) приводит к ударной волне растяжения ($[\sigma_1] > 0$). Знак (–) соответствует волне сжатия.

Из законов сохранения массы и энергии с учетом очевидных равенств

$$[\sigma_j] = -[p] + [\varkappa]\tau_j/\varkappa, \quad \sigma_j^0 = -p^0 + \varkappa^0\tau_j/\varkappa$$

можно получить уравнение ударной адиабаты продольных волн растяжения и сжатия

$$[U] = -p^0[1/\rho] + 2/\sqrt{3}\varkappa^0\,|[1/\rho]| \tag{3.3}$$

Необходимо заметить, что оно отличается от известного уравнения ударной адиабаты идеального газа [1] наличием слагаемого, характеризующего прочностные свойства среды. Для вычисления относительной скорости продольных волн через скачки плотности и давления справедлива формула, также имеющая дополнительное слагаемое:

$$m^2[1/\rho] = -[p] \pm 2[\varkappa]/\sqrt{3} \tag{3.4}$$

Если нормальный к фронту волны вектор лежит в плоскости x_1, x_3 и не совпадает с главными ортами, то из системы (3.1) может быть получено уравнение $[\sigma_1 + \sigma_3] = 0$, которое означает, что в данной плоскости для скачков напряжений реализуется состояние чистого сдвига. Поперечные волны, распространяющиеся по направлениям сдвига $\nu_1^2 = \nu_3^2 = 1/2$, определяются при помощи системы соотношений

$$[U] = [\varkappa^2]/(2m^2), \quad \tau_1/\varkappa = -\tau_3/\varkappa = \pm 1, \quad [p] = [\rho] = 0, \quad [\varkappa] > 0 \tag{3.5}$$

Ударные волны этого типа возможны только в случае чисто механической среды, когда давление является функцией плотности, но не зависит от теплового параметра. При учете такой зависимости система становится несовместной. В этом случае допускаются квазипоперечные волны, для которых $\nu_1^2 \neq \nu_3^2$. Эти волны описываются соотношениями

$$\frac{\tau_1}{\varkappa} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\frac{1+\nu_1^2}{\sqrt{1-\nu_1^2\nu_3^2}}, \quad \frac{\tau_3}{\varkappa} = -\frac{1+\nu_3^2}{1+\nu_1^2}\frac{\tau_1}{\varkappa}, \quad [p] = \frac{\tau_1+\tau_3}{2\varkappa}[\varkappa], \quad [\varkappa] > 0 \tag{3.6}$$

Из закона сохранения массы с учетом (3.6) получается уравнение, показывающее, что в отличие от поперечных волн при переходе через квазипоперечные происходит скачкообразное изменение плотности среды

$$m^2[1/\rho] = 3[p] \tag{3.7}$$

Закон сохранения энергии на разрыве приводится к виду

$$[U] = -p^0[1/\rho] + [\varkappa^2]/(2m^2) \tag{3.8}$$

Следует заметить, что в случае постоянного предела текучести из всех перечисленных типов диссипативных разрывов допускаются только продольные ударные волны, на которых непрерывен девиатор тензора напряжений, а давление разрывно. Существование поперечных и квазипоперечных волн противоречит условию диссипативности.

4. Условие пластичности Треска – Сен-Венана. Пусть ν_j^M и ν_j^m – главные оси тензора σ^0, отвечающие наибольшему и наименьшему нормальным напряжениям

$$\sigma_M^0 = \max_{|\nu|=1}\sigma_{jk}^0\nu_j\nu_k, \quad \sigma_m^0 = \min_{|\nu'|=1}\sigma_{jk}^0\nu_j'\nu_k' = -\max_{|\nu'|=1}(-\sigma_{jk}^0\nu_j'\nu_k')$$

На диссипативных волнах при условии пластичности Треска – Сен-Венана ($2f = \sigma_M - \sigma_m$) выполняется цепочка неравенств, каждое из которых является точным равенством:

$$2\varkappa^0 = \sigma_{jk}^0(\nu_j^M\nu_k^M - \nu_j^m\nu_k^m) = \max_{|\nu|=|\nu'|=1}\sigma_{jk}^0(\nu_j\nu_k - \nu_j'\nu_k') \leqslant$$

$$\leqslant 1/2\max_{|\nu|=|\nu'|=1}\sigma_{jk}^+(\nu_j\nu_k - \nu_j'\nu_k') + 1/2\max_{|\nu|=|\nu'|=1}\sigma_{jk}^-(\nu_j\nu_k - \nu_j'\nu_k') \leqslant \varkappa^+ + \varkappa^-$$

Методом от противного при помощи этих неравенств доказывается, что

$$\sigma_{jk}^{\pm}(\nu_j^M \nu_k^M - \nu_j^m \nu_k^m) = \max_{|\nu|=|\nu'|=1} \sigma_{jk}^{\pm}(\nu_j \nu_k - \nu_j' \nu_k')$$

Отсюда

$$\sigma_{jk}^{\pm} \nu_j^M \nu_k'^M = \max_{|\nu|=1} \sigma_{jk}^{\pm} \nu_j \nu_k, \quad \sigma_{jk}^{\pm} \nu_j^m \nu_k'^m = \min_{|\nu'|=1} \sigma_{jk}^{\pm} \nu_j' \nu_k'$$

Следовательно, векторы ν_j^M, ν_j^m представляют собой главные направления для тензоров σ^+ и σ^- одновременно, а эти тензоры соосны.

После поворота координатной системы к главным осям из (2.1), (2.2) вытекает система уравнений

$$[\sigma_j + \sigma_k]\nu_j \nu_k = 0 \quad (j \neq k) \tag{4.1}$$

$$2[\sigma_1]\nu_1^2 - [\sigma_2]\nu_2^2 - [\sigma_3]\nu_3^2 = \lambda_{12} + \lambda_{13} - \lambda_{21} - \lambda_{31}$$

$$-[\sigma_1]\nu_1^2 - [\sigma_2]\nu_2^2 + 2[\sigma_3]\nu_3^2 = \lambda_{31} + \lambda_{32} - \lambda_{13} - \lambda_{23}$$

Здесь λ_{jk} – неотрицательные множители Лагранжа для ограничений $\sigma_j^0 - \sigma_k^0 \leqslant 2\varkappa^0$. Эти множители отличны от нуля только если соответствующие ограничения обращаются в равенства. Путем перебора различных вариантов равенств можно показать, что диссипативные разрывы допускаются только в следующих случаях.

1. Когда направление распространения волны совпадает с одной из главных осей и по обе стороны от фронта реализуется состояние полной пластичности, отвечающее ребру призмы текучести с уравнениями, содержащими нормальное напряжение к фронту. Так, при $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$, $\sigma_1^{\pm} - \sigma_3^{\pm} = 2\varkappa^{\pm}$, $\sigma_2^{\pm} = \sigma_3^{\pm}$ возможна продольная волна растяжения. При $\sigma_1^{\pm} - \sigma_3^{\pm} = -2\varkappa^{\pm}$, $\sigma_2^{\pm} = \sigma_3^{\pm}$ – продольная волна сжатия. На этих волнах выполняются соотношения, получаемые из (3.2)–(3.4) после замены предела текучести величиной $2\varkappa/\sqrt{3}$. На остальных ребрах призмы разрывы напряжений недопустимы.

2. Когда нормальный вектор волны лежит в главной плоскости и реализуется состояние неполной пластичности на грани призмы, в уравнение которой входят соответствующие главные напряжения. При $\nu_1\nu_3 \neq 0$, $\sigma_1^{\pm} - \sigma_3^{\pm} = 2\varkappa^{\pm}$ $(\sigma_1^{\pm} \geqslant \sigma_2^{\pm} \geqslant \sigma_3^{\pm})$ скачки напряжений на такой волне вычисляются с учетом системы (4.1) как

$$[\sigma_1] = [\varkappa], \quad [\sigma_3] = -[\varkappa], \quad [\sigma_2] = -3[p] \tag{4.2}$$

Направляющие косинусы равны между собой: $\nu_1^2 = \nu_3^2 = 1/2$, плотность среды непрерывна, а разрыв внутренней энергии согласуется с первым уравнением (3.5). Условие диссипативности принимает вид $[\varkappa] > 0$. Так как направление движения волны совпадает с направлением сдвига, то эта волна поперечная. Однако, в отличие от условия Мизеса, скачок давления на поперечной волне при условии пластичности Треска – Сен-Венана, вообще говоря, отличен от нуля. Поэтому существование волны допускается, даже если давление зависит от теплового параметра.

Поперечная волна возможна также в случае грани $\sigma_1^{\pm} - \sigma_3^{\pm} = -2\varkappa^{\pm}$ $(\sigma_3^{\pm} \geqslant \sigma_2^{\pm} \geqslant \sigma_1^{\pm})$, она описывается приведенными соотношениями с точностью до перестановки индексов.

3. Когда вектор нормали лежит в главной плоскости тензора напряжений и на фронте реализуется состояние полной пластичности, причем в одно из двух уравнений ребра призмы входят соответствующие главные напряжения. При $\nu_1\nu_3 \neq 0$,

$\sigma_1^\pm - \sigma_3^\pm = 2\varkappa^\pm$, $\sigma_2^\pm = \sigma_3^\pm$ система уравнений (4.1) позволяет установить, что

$$\nu_1^2 > \nu_3^2, \quad [\sigma_1] = [\varkappa] > 0, \quad [\sigma_2] = [\sigma_3] = -[\varkappa] \tag{4.3}$$

Система (4.1) определяет квазипоперечную волну, подобную (3.6). Скачки плотности и внутренней энергии на ее фронте удовлетворяют уравнениям

$$m^2[1/\rho] = 3[p](\nu_1^2 - \nu_3^2), \quad [U] = (-p^0 + \varkappa^0/3)[1/\rho] + [\varkappa^2]/(2m^2) \tag{4.4}$$

Ориентация квазипоперечной волны относительно главных направлений не может быть произвольной, так как система (4.3), (4.4) по сравнению с системой, описывающей поперечные волны, содержит дополнительное уравнение $[p] = [\varkappa]/3$. В силу условия диссипативности при положительном скачке давления на этой волне происходит разрежение среды ($[\rho] < 0$).

Наконец, при $\sigma_1^\pm - \sigma_3^\pm = 2\varkappa^\pm$, $\sigma_2^\pm = \sigma_1^\pm$ допускается квазипоперечная волна уплотнения ($[\rho] > 0$), описываемая системой

$$\nu_1^2 < \nu_3^2, \quad [\sigma_1] = [\sigma_2] = [\varkappa] > 0, \quad [\sigma_3] = -[\varkappa] \tag{4.5}$$

$$m^2[1/\rho] = -3[p](\nu_1^2 - \nu_3^2), \quad [U] = (-p^0 - \varkappa^0/3)[1/\rho] + [\varkappa^2]/(2m^2)$$

Отметим, что класс действительных сильных разрывов в сжимаемой пластической среде существенно зависит от вида функций состояния. В частности, в средах, предел текучести которых при постоянной плотности является убывающей функцией температуры, поперечные волны отсутствуют ввиду нарушения на них условия диссипативности. Кроме того, некоторые разрывы могут быть неустойчивыми и, следовательно, не реализуются. Этот круг вопросов требует дополнительного изучения и в данной работе не рассматривается.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00453).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
2. *Мандель Ж.* Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. № 5. С. 119–141.
3. *Кукуджанов В.Н.* К исследованию уравнений динамики упругопластических сред при конечных деформациях // Нелинейные волны деформаций. Таллин, 1977. Т. 2. С. 102–105.
4. *Быковцев Г.И., Кретова Л.Д.* О распространении ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106–116.
5. *Садовский В.М.* О динамической корректности теории упруго-идеально-пластического течения // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинам. СО АН СССР. 1983. Вып. 63. С. 147–151.
6. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Рычков В.А.* Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошной среды. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 1996. С. 116–127.
7. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
8. *Пачепский Я.А.* О структуре ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 2. С. 300–305.
9. *Друянов Б.А., Святова Е.А.* Задача о структуре разрыва в упрочняющейся пластической среде // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1047–1049.
10. *Kukudjanov V.N.* Investigation of shock wave structure in elasto-visco-plastic bars using asymptotic method // Arch. Mech. 1981. V. 33. No 5. P. 739–751.
11. *Иванов Г.В.* Об уравнениях упругопластического деформирования при произвольной величине поворотов и деформаций // ПМТФ. 1978. № 3. С. 130–135.

Красноярск

Поступила в редакцию
2.11.2000