МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001

УДК 539.374

© 2001 г. К.В. КУКУДЖАНОВ

ДВУХСКОРОСТНАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В работе [1] была предложена модель, представляющая неоднородный композит в виде однородной анизотропной упруговязкопластической среды. На основе этой модели были решены нестационарные задачи динамического деформирования и разрушения неупругих слоистых композитных тел. Такой подход позволяет достаточно хорошо определить средние характеристики НДС, но не позволяет определить локальные эффекты, связанные с гетерогенной структурой композита, которые могут быть довольно существенны, особенно в динамических задачах. В связи с этим в ряде работ были предприняты попытки учесть эти эффекты как в упругих, так и неупругих композитах [2–7].

В настоящей работе на основе теории многоскоростных моделей сплошной среды построены модель двухфазного композита, состоящего из упругих волокон или слоев, между которыми находится неупругая вязкопластическая матрица. Получена полная система уравнений динамики, учитывающая упруговязкопластическое взаимодействие матрицы и волокон, на основе которой во второй части работы будет исследовано различие в распространении неупругих волн в композитах по односкоростной и двухскоростной моделям. Будет дано сравнение с экспериментальными результатами, подтверждающее преимущество подхода, принятого в настоящей работе.

1. Основные уравнения теории многоскоростной смеси. Будем моделировать исходный неоднородный композит некоторым двухскоростным взаимодействующим континуумом, который представляет собой совокупность двух классических односкоростных сред, имеющих свое собственное движение и заполняющих один и тот же объем, равный объему исходной неоднородной среды. Таким образом, в каждой точке, занимаемой исходной неоднородной средой (композитом), в любой момент времени предполагается одновременное существование двух различных материальных частиц, принадлежащих разным односкоростным средам и характеризующиеся своей совокупностью переменных параметров. Возможность такого описания связана с предположением о существовании характеристического элемента объема V, характерный размер которого h удовлетворяет условию $h_{\text{mic}} \ll h \ll h_{\text{macr}}$, где h_{mic} – характерный размер структуры, например, включения или расстояния между включениями, h_{macr} – макроразмер тела или расстояние, на котором существенно меняются макропараметры смеси. Характеристические объемы являются точками пространства, в котором записываются основные уравнения теории двухскоростной смеси, содержащей компоненты композита пропорционально их объемному содержанию. Введем обычным образом для каждого из компонентов смеси объемное содержание $\eta_\alpha = V_\alpha/V$, где V_α – объем α-го компонента композита $\alpha = 1,2$ ($V = V_1 + V_2$), парциальную плотность (приходящуюся на единицу объема композита) $\rho_\alpha = \eta_\alpha\rho_\alpha^*$, где ρ_α^* –

реальная плотность материала α-фазы композита, вектор скорости $V^{(\alpha)}$, а также другие параметры, характеризующие свой компонент смеси.

Основные уравнения сохранения, описывающие макроскопическое движение неоднородной среды, постулируются (феноменологический подход [8, 9]) для каждого из компонентов смеси, моделирующего фазы компонента. При этом в уравнения сохранения должны войти члены, отражающие взаимодействие фаз в среднем. Дифференциальную форму этих уравнений в декартовой прямоугольной системе координат, оси которой будем считать совпадающими с осями симметрии среды, примем в виде [2]:

$$\frac{d^\alpha \rho_\alpha}{dt} + \rho_\alpha \frac{\partial U_i^{(\alpha)}}{\partial x_i} = 0 \qquad (\alpha = 1,2) \quad (i = 1,2,3) \tag{1.1}$$

$$\rho_\alpha \frac{d^\alpha U_i^{(\alpha)}}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\partial x_i} + \rho_\alpha F_i^{(\alpha)} + R_i^{(\alpha)} \tag{1.2}$$

$$\rho_\alpha \frac{d^\alpha U^{(\alpha)}}{dt} - \sigma_{ij}^{(\alpha)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)} + \frac{\partial q_i^{(\alpha)}}{\partial x_i} - \rho_\alpha r^{(\alpha)} - \rho_\alpha \psi^{(\alpha)} = 0 \tag{1.3}$$

$$-\frac{d^\alpha A_\alpha}{dt} - T_\alpha S_\alpha + \frac{1}{\rho_\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)} + \frac{q_i^{(\alpha)}}{\rho_\alpha T_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} \geqslant 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{d^\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \upsilon_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}$$

где $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ – симметричный тензор парциальных напряжений, $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ – вектор массовых сил, $U^{(\alpha)}$ – внутренняя энергия, $\mathbf{q}^{(\alpha)}$ – вектор теплового потока, $r^{(\alpha)}$ – внутренние тепловые источники, A_α – свободная энергия, T_α – температура, S_α – энтропия α-го компонента смеси, $R_i^{(\alpha)}$, $\psi^{(\alpha)}$ – члены, описывающие взаимодействие между компонентами смеси. Уравнения (1.1) – (1.3) представляют собой соответственно уравнения баланса массы, импульса и энергии, (1.4) – неравенство Клазиуса – Дюгема, означающее выполнение 2-го начала термодинамики для рассматриваемых процессов. Поскольку рассматриваются композиционные материалы, то мы пренебрегаем переносом массы между компонентами и считаем, что энтропия между компонентами смеси перераспределяется только за счет теплового взаимодействия между ними.

Постулируем также, что для обмена импульсом и энергией между компонентами имеют место следующие соотношения [2, 9]:

$$R_i^{(1)} + R_i^{(2)} = 0 \qquad (i = \overline{1,3}) \tag{1.5}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} R_i^{(\alpha)} \upsilon_i^{(\alpha)} + \rho_\alpha \psi^{(\alpha)} = 0 \tag{1.6}$$

Для того чтобы получить замкнутую систему, к уравнениям (1.1) – (1.6) необходимо добавить определяющие соотношения для компонентов смеси и определить конкретный вид членов, описывающих взаимодействие $R_i^{(\alpha)}$ $\psi^{(\alpha)}$.

Деформации будем считать малыми, а процессы изотермическими, поэтому в уравнениях (1.1) – (1.4) можно положить $d^\alpha/dt = \partial/\partial t$, $T_1 = T_2 = T = \text{const}$. В этом случае полная система уравнений значительно упрощается, в нее войдут уравнения движения компонентов смеси

$$\rho_2 \dot{\upsilon}_i^{(2)} = \sigma_{ij,j}^{(2)} + \rho_2 F_i^{(2)} + R_i^{(2)} \tag{1.7}$$

$$\rho_1 \dot{\upsilon}_1^{(1)} = \sigma_{ij,j}^{(1)} + \rho_1 F_i^{(1)} + R_i^{1} \tag{1.8}$$

и определяющие соотношения, которые примем в виде

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} = \dot{\sigma}_{ij}^{(1)}(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}) \tag{1.9}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(2)} = \dot{\sigma}_{ij}^{(2)}(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}) \tag{1.10}$$

Наконец, для того чтобы замкнуть систему (1.7) – (1.10), постулируем, что обмен импульсом в (1.7) – (1.8) имеет вид [5, 6, 10]:

$$R_i^{(1)} = -R_i^{(2)} = Y_{ij}(u_j^{(2)} - u_j^{(1)}) \tag{1.11}$$

где $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ – вектор перемещений в α-м компоненте смеси, а Y_{ij} – так называемый вязкодинамический оператор, зависящий от времени. Конкретней вид определяющих соотношений (1.9) – (1.10) и вязкодинамического оператора для слоистого и волокнистого композитов в случае упруговязкопластического поведения матрицы будет рассмотрен ниже на основе микро-модельного анализа при некоторых упрощающих предположениях.

2. Определяющие соотношения. Рассмотрим сначала ограничения на вид определяющих соотношений, которые вытекают из неравенства Клаузиуса – Дюгема. Примем, что свободная энергия α-го компонента смеси есть функция $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)e}$ и T_α: $A_\alpha = A_\alpha(\varepsilon_{ij}^{(\alpha)e}), T_\alpha$. Считая, что полную деформацию можно представить в виде суммы упругой $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)e}$ и неупругой $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)p}$ частей

$$\varepsilon_{ij}^{(\alpha)} = \varepsilon_{ij}^{(\alpha)e} + \varepsilon_{ij}^{(\alpha)p} \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{2.1}$$

из (1.4) получаем

$$\left(\frac{\sigma_{ij}^{i\alpha}}{\rho_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}^{(\alpha)e}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)e} + \frac{1}{\rho_\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_{ij}^{(\alpha)p} \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Откуда следует

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = \rho_\alpha \partial A_\alpha / \partial \varepsilon_{ij}^{(\alpha)e} \tag{2.3}$$

$$D_\sigma = \sigma_{ij}^{(\alpha)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)p} \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Предположим, что свободная энергия A_α есть квадратичная функция деформации, тогда из (2.3) получаем линейную связь между напряжениями и упругими деформациями α-го компонента смеси

$$\sigma_{i\gamma}^{(\alpha)} = L_{ijkl}^{(\alpha)} \varepsilon_{kl}^{(\alpha)e} \tag{2.5}$$

при этом матрица упругих моделей α-го компонента смеси должна быть симметричной

$$L_{ijkl}^{(\alpha)} = L_{klij}^{(\alpha)} = L_{jikl}^{(\alpha)} = L_{ijlk}^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{2.6}$$

Кроме (2.6) в качестве еще одного ограничения, наложим требование неотрицательной определенности матрицы $L_{ijkl}^{(\alpha)}$, являющееся следствием гипотезы положительной определенности упругой энергии в деформированном состоянии.

Определим конкретный вид матрицы $L^{(\alpha)}$ по известным упругим модулям компонентов композита и их геометрии. Естественно, что в общем случае упругие модули для компонентов смеси не пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности η_α) упругим модулям моделируемого композита. Хотя такое предположение иногда делается [3, 9], оно пригодно только в случае очень малой концентрации дисперсной фазы (волокон). Присутствие двух фаз и их совместное деформирование (в волокнистой и слоистой композитах) приводит к тому, что компоненты смеси оказываются анизотропными, тогда как компоненты композита микроскопически изотропны. Для получения упругих модулей компонентов смеси естественно потребовать от модели в первую очередь правильно воспроизводить динамическую реакцию материала при бесконечно больших длинах волн. Воспользуемся результатами, полученными в [1]:

$$\sigma_{ij}^{(r)} = B_{ijkl}^{(r)}\sigma_{kl} \qquad (r = m, f) \tag{2.7}$$

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.8}$$

где $\sigma_{ij}^{(r)}$ – тензор средних напряжений в компонентах композита, σ_{ij}, ε_{ij} – тензора средних напряжений и деформаций композита, а матрицы $B^{(r)}$ и L определены через известные упругие модули и объемные концентрации фаз волокнистого и слоистого композитов. Подставляя (2.8) в (2.7), получаем связь

$$\sigma_{ij}^{(r)} = B_{ijkl}^{(r)}L_{klpq}\varepsilon_{pq} \tag{2.9}$$

Далее считая, что смесь претерпевает однородную деформацию, равную средней деформации $\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij}$ и полагая, что тензора парциальных напряжений в компонентах смеси равны произведению соответствующих концентраций и тензора средних напряжений в компонентах композита $\sigma_{ij}^{(1)} = \eta_1\sigma_{ij}^{(m)}$, $\sigma_{ij}^{(2)} = \eta_1\sigma_{ij}^{(f)}$ из (2.9) получаем

$$\dot\sigma_{ij}^{(\alpha)} = L_{ijkl}^{(\alpha)}\dot\varepsilon_{kl}^{(\alpha)e}, \qquad L_{ijpq}^{(\alpha)} = \eta_\alpha B_{ijkl}^{(r)}L_{klpq} \qquad (r = m, f_\alpha = 1,2) \tag{2.10}$$

где индекс 1 соответствует матрице m, а индекс 2 – волокну f. Заметим, что получаемые таким образом матрицы $L^{(\alpha)}$ оказываются несимметричными, что противоречит условию (2.6). Но эта несимметричность слабая (различия недиагональных элементов в случае умеренных концентраций волокон $\eta_1 < 0{,}5$ для всех рассматриваемых в настоящей работе материалов не превышали 10%). Поэтому, для того чтобы удовлетворить условию (2.6), необходимо симметризовать эти матрицы, взяв в качестве недиагональных модулей полусуммы соответствующих элементов матрицы сверху и снизу главной диагонали, при этом матрицы $L^{(\alpha)}$ всегда оказывались положительно определенными. Отметим, что аналогичные выражения для упругих модулей смеси были получены в [6] при рассмотрении распространения волн в слоистом композите с изотропными упругими компонентами.

Определим теперь неупругую (вязкопластическую) деформацию первого компонента смеси, соответствующего матрице. При этом будем естественно считать, что второй компонент смеси (волокна) остается упругим. В качестве условия вязкопластичности первого компонента можно взять условие вязкопластичности для матрицы, т.е. пренебречь влиянием волокон на пластичность матрицы, что, очевидно, допустимо только при малых концентрациях последних.

Для того чтобы учесть влияние волокон на вязкопластические характеристики матрицы и получить условие вязкопластичности первого компонента смеси, примем следующее допущение. Поскольку жесткостные характеристики волокон значительно превосходят аналогичные характеристики матрицы, будем считать волокна нерастяжимыми. Заметим, что подобный подход использовался в [11] для получения условий пластичности композита при моделировании его гомогенной упругопластической средой.

Рассмотрим сначала волокнистый композит с однонаправленным семейством волокон, направление которых зададим вектором $R = (R_i)$ $(i = 1,3)$. Будем считать, что условие пластичности для первого компонента смеси не зависит от гидростатического давления, а также, что оно не зависит от нагрузки в направлении волокон, так как волокна считаются нерастяжимыми и такая нагрузка полностью воспринимается волокнами и следовательно не производит напряжений в матрице. Тогда функция нагружения матрицы композита f_m зависит от следующего девиатора напряжений $s_{ij}^{(1)}$:

$$\eta_1 s_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} - \tfrac{1}{2}(\sigma_{kk}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(1)} k_k k_l)\delta_{ij} + \tfrac{1}{2}(\sigma_{kk}^{(1)} - 3\sigma_{kl}^{(1)} k_k k_l) k_i k_j \tag{2.11}$$

удовлетворяющего условиям

$$s_{ii}^{(1)} = 0, \qquad s_{ij}^{(1)} k_i k_j = 0 \tag{2.12}$$

Считая, что функция нагружения f_m зависит только от второго инварианта тензора напряжения $\sigma^1 = (\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}^{(1)}\sigma_{ij}^{(1)})^{1/2}$, получим условие вязкопластичности для первого компонента смеси в виде [12]:

$$S^{(1)} = (\tfrac{1}{2} s_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(1)})^{1/2} = K_m(I^{(1)p}) + K_m(0)\varphi_m^{-1}(\tau_{0m}\dot{I}^{(1)p}) \tag{2.13}$$

где $I^{(1)p} = (\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}^{(1)p}\varepsilon_{ij}^{(1)p})^{1/2}$, $\dot{I}^{(1)p} = (\tfrac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p})^{1/2}$ – интенсивность пластических деформаций и их скоростей, τ_{0m} – время релаксации материала матрицы, K_m – предел текучести матрицы на сдвиг, φ_m – некоторая неотрицательная функция, такая, что $\varphi_m(x) > 0$ при $x > 0$ и $\varphi_m(x) \equiv 0$ при $x < 0$. Предполагая для первого компонента смеси справедливость ассоциированного закона течения с учетом (2.13), получим

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(i)p} = \lambda_1 \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{\tau_{0m} S^{(1)}} \varphi_m\left(\frac{S^{(1)} - K_m(I^{(1)p})}{K_m(0)}\right) \geqslant 0 \tag{2.14}$$

Из (2.14) и (2.12) следует пластическая несжимаемость первого компонента смеси и отсутствие пластической деформации в направлении волокон

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^{(1)p} = 0, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p} k_i k_j = 0 \tag{2.15}$$

Из (2.11), (2.12) и (2.14) следует, что предлагаемая модель вязкопластического композита полностью удовлетворяет термодинамическим ограничениям

$$D_\sigma = \sigma_{ij}^{(1)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p} = \lambda_1 \sigma_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(1)} = \lambda_1 \eta_1 s_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(1)} \geqslant 0 \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь случай матрицы армированной, например, тканными слоями, в которых нити взаимоперпендикулярны. Направления волокон зададим векторами **k** и **l**, **kl** = $k_i l_i = 0$. Считая, что пластичность не возникает при гидростатическом давлении и при нагрузке вдоль направления волокон, определим тензор $s_{ij}^{(1)}$ как

$$\eta_1 s_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} + (\sigma_{kl}^{(1)} k_k k_l + \sigma_{kl}^{(1)} l_k l_l - \sigma_{kk}^{(1)})\delta_{ij} + (\sigma_{kk}^{(1)} - 2\sigma_{kl}^{(1)} k_k k_l - \sigma_{kl}^{(1)} l_k l_l) k_i k_j +$$
$$+(\sigma_{kk}^{(1)} - 2\sigma_{kl}^{(1)} l_k l_l - \sigma_{kl}^{(1)} k_k k_l) l_i l_j \tag{2.17}$$

при этом имеет место

$$s_{ii}^{(1)} = 0, \quad s_{ij}^{(1)} k_i k_j = 0, \quad s_{ij}^{(1)} l_i l_j = 0 \tag{2.18}$$

Полагая справедливым ассоциированный закон (2.14) при условии вязкопластичности (2.13), получаем те же определяющие соотношения, но для $s_{ij}^{(1)}$ определяемым формулой (2.17). Аналогично предыдущим можно рассмотреть также случай матрицы, армированной нерастяжимыми поверхностями (слоями), положив

$$\eta_1 s_{ij}^{(1)} = \sigma_{ik}^{(1)} n_j n_k + \sigma_{kj}^{(1)} n_i n_k - 2\sigma_{kl}^{(1)} n_k n_l n_i n_j \tag{2.19}$$

где **n** = (n_i) $(i = 1,3)$ – вектор-нормаль к поверхности слоев.

Итак, из соотношений (2.1), (2.10), (2.14) получаем систему определяющих соотношений для смеси, моделирующей композит с упруговязкопластической матрицей в виде

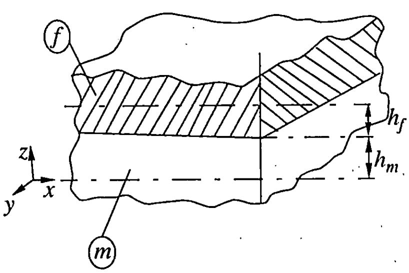
$$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} = L_{ijkl}^{(1)}(\dot{\varepsilon}_{kl}^{(1)} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{(1)p}), \quad \dot{\sigma}_{ij}^{(2)} = L_{ijkl}^{(2)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{(2)} \tag{2.20}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(i)p} = \begin{cases} 0, & S^{(1)} < K_m(I^{(1)p}) \\ \dfrac{1}{\tau_{0m}S^{(1)}}\varphi_m[(S^{(1)} - K_m(I^{(1)p}))/K_m(0), & S^{(1)} \geqslant K_m(I^{(1)p}) \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)} = \tfrac{1}{2}(\upsilon_{i,j}^{(\alpha)} + \upsilon_{j,i}^{(\alpha)}) \quad (\alpha = 1, 2) \tag{2.22}$$

где $s_{ij}^{(1)}$ – в зависимости от типа композиционного материала определяется формулами (2.11), (2.17), (2.19).

3. Вязкодинамический оператор. Для получения по известным свойствам и геометрии композита вязкодинамического оператора (1.11), описывающего взаимодействие между компонентами смеси, моделирующей этот композит, примем процедуру, предложенную в [10] при получении уравнений движения водонасыщенных грунтов, моделируемых упругим скелетом, по которому течет вязкая жидкость.



Фиг. 1

Рассмотрим слоистый композит. Будем рассматривать одну ячейку композита, ограниченную срединными плоскостями смежных слоев (фиг. 1), где h_m и h_f – полутолщины слоев, $d = h_m + h_f$. Оси декартовой системы координат показаны на фигуре. Пусть на каждый слой действуют постоянные по z в пределах слоя и композита массовые силы, направленные вдоль оси x. Считаем, что

$$u_x^{(r)} = u_x^{(r)}(z,t), \quad u_x^{(r)} = u_z^{(r)} = 0$$

$$\sigma_{xz}^{(r)} = \sigma_{xz}^{(r)}(z,t), \quad \sigma_{ij}^{(r)} = 0 \quad (ij / xz, \ r = m, f)$$

где $\mathbf{u}^{(r)} = (u_x^{(r)}, u_y^{(r)}, u_z^{(r)})$ – вектор перемещений и $\sigma_{ij}^{(r)}$ – тензор напряжений r-го компонента композита.

Пусть оба компонента композита упруги, тогда уравнения движения и определяющие соотношения для r-го компонента композита примут вид

$$\partial\sigma^{(r)} / \partial z + f^{(r)} = \rho_\alpha^* \partial^2 u^{(r)} / \partial t^2 \quad (r = m, f) \tag{3.1}$$

$$\partial\sigma^{(r)} / \partial t = \mu^{(r)} \partial / \partial t \partial u^{(r)} / \partial z \tag{3.2}$$

Индексы для упрощения записи опущены. Здесь ρ_r^* и $\mu^{(r)}$ – соответствующие константы материала r-го компонента композита, f^r – массовая сила, действующая на компонент.

Если один из компонентов композита (матрица) целиком находится в условиях вязкопластического течения, то при линейной аппроксимации закона упрочнения: $K(\varepsilon) = 2\mu_0^{(m)}\varepsilon$, определяющие соотношения для него имеют вид

$$\frac{\partial\sigma^{(m)}}{\partial t} = \mu^{(m)}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z} + \frac{\mu_0^{(m)}}{\tau^{(m)}}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial z} - \frac{\sigma^{(m)}}{\tau^{(m)}} \tag{3.3}$$

Пусть при этом другой компонент композита (волокна) остается упругим и для него справедливо (3.2). Совершенно аналогично можно рассмотреть случай вязкопластичности волокон.

Будем считать, что все функции, входящие в (3.1) – (3.3), являются гармоническими по времени

$$\begin{bmatrix} u^{(r)} \\ \sigma^{(r)} \\ f^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^{(r)}(z) \\ \sigma_0^{(r)}(z) \\ f_0^{(r)} \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} u_0^{(r)} \\ \sigma_0^{(r)} \\ f_0^{(r)} \end{bmatrix} e^{pt} \tag{3.4}$$

Тогда после подстановки в (3.1) – (3.3):

$$\partial\sigma_0^{(r)} / \partial z + f_0^{(r)} = \rho_r^* p^2 u_0 \tag{3.5}$$

$$\sigma_0^{(r)} = \mu_r \partial u_0^{(r)} / \partial z \tag{3.6}$$

$$\mu_r = \mu^{(r)} \quad (r = m, f) \tag{3.7}$$

если оба компонента композита упругие и

$$\mu_f = \mu^{(f)}, \quad \mu_m = \frac{\mu^{(m)} p - \mu_0^{(m)} / \tau^{(m)}}{1 + p\tau^{(m)}} \tag{3.8}$$

если матрица вязкопластически течет. Откуда для перемещения имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_0^{(r)}}{\partial z^2} - \frac{\rho_r^* p^2}{\mu_r} u_0^{(r)} = -\frac{f_0^{(r)}}{\mu_r} \tag{3.9}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{gathered} u_0^{(r)} = A_r \operatorname{sh} a_r z + B_r \operatorname{ch} a_r z + F_r \\ a_r^{(2)} = \rho_r^* p^2 / \mu_r, \quad F_r = f_0^{(r)} / \mu_r a_r^2 \end{gathered} \tag{3.10}$$

где $a_r^{(2)}$, F_r – константы. Для $u_0^{(r)}$ имеем четыре граничных условия:
при $z = h_m$ выполняются условия неразрывности

$$u_0^{(m)}\Big|_{z=h_m} = u_0^{(f)}\Big|_{z=h_m}, \quad \sigma_0^{(m)}\Big|_{z=h_m} = \sigma_0^{(f)}\Big|_{z=h_m} \tag{3.11}$$

на срединных плоскостях слоев $z = 0$ и $z = d$ выполняются условия симметрии

$$\frac{\partial u_0^{(m)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0^{(f)}}{\partial z}\Big|_{z=d} = 0 \tag{3.12}$$

Из (3.10)–(3.12) находим

$$u_0^{(m)} = (F_m - F_f) C B_f' \operatorname{ch} a_m z + F_m \tag{3.13}$$

$$u_0^{(f)} = (F_m - F_f) B_f' (\operatorname{ch} a_f z - \operatorname{th} a_f d \operatorname{sh} a_f z) + F_f \tag{3.14}$$

Для напряжений на границе раздела слоев из (3.6) и (3.13) имеем

$$\sigma_0^{(m)}\Big|_{h_m} = (F_m - F_f)CB'_f\mu_m a_m \operatorname{sh} a_m h_m \tag{3.15}$$

Для того чтобы получить вязкодинамический оператор заметим, что сила, действующая на первый компонент со стороны второго, приходящаяся на единицу объема слоистого композита, равна

$$R_1 = \frac{\sigma_{xz}\big|_{z=h_m}}{d} \tag{3.16}$$

с другой стороны из (1.11) следует

$$R_1 = Y_1\left(u_1^{(2)} - u_1^{(1)}\right) \tag{3.17}$$

где $u_1^{(\alpha)}$ – компонента перемещения в α-м компоненте смеси. Определим перемещения в компонентах смеси как средние перемещения в каждой из фаз композита

$$\bar{u}_0^{(1)} = \frac{1}{h_m}\int_0^{h_m} u_0^{(m)}dz, \quad \bar{u}_0^{(2)} = \frac{1}{h_f}\int_{h_m}^{d} u_0^{(f)}dz \tag{3.18}$$

Тогда из (3.13), (3.15) и (3.18) исключая $F_m - F_f$, будем иметь

$$\sigma_0^m\Big|_{h_m} = \frac{CB'_f\mu_m a_m \operatorname{sh} a_m h_m\left(\bar{u}_0^{(1)} - \bar{u}_0^{(2)}\right)}{\left(\dfrac{CB'_f}{h_m}\displaystyle\int_0^{h_m} \operatorname{ch} a_m z dz - \dfrac{B'_f}{h_f}\displaystyle\int_{h_f}^{d} (\operatorname{ch} a_f z - \operatorname{th} a_f d \operatorname{sh} a_f z)dz + 1\right)} \tag{3.19}$$

Разложим (54) в точке $a_m = a_f = 0$ в ряд, удерживая члены вплоть до $O(p^2)$ (подразумевая, что p – мало, т.е. считая, что изменение решения во времени происходит достаточно медленно). После чего, учитывая (3.16), (3.17) и переходя к решению, зависящему от времени, получаем искомое выражение для членов описывающего взаимодействие между фазами. Если оба компонента упругие, то будем иметь

$$Y_1 = K^e + \rho_{12}^e \partial^2/\partial t^2 \tag{3.20}$$

$$K^e = \frac{3\mu_{(m)}\mu_{(f)}}{d^2(\mu_{(m)}\eta_f + \mu_{(f)}\eta_m)} \tag{3.21}$$

$$\rho_{12}^e = \frac{{\mu^{(m)}}^2\rho_2 h_f^2 + {\mu^{(f)}}^2\rho_1 h_m^2}{5(\mu^{(m)}h_f + \mu^{(f)}h_m)^2}$$

Если матрица находится в условиях вязкопластического течения, то для вязкодинамического оператора получаем

$$Y_1 = K^p + l\frac{\partial}{\partial t} + \rho_{12}^p\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.22}$$

$$K^p = \frac{3\mu_0^{(m)}\mu^{(f)}}{d^2(\mu_0^{(m)}h_f + \mu^{(f)}h_m)}$$

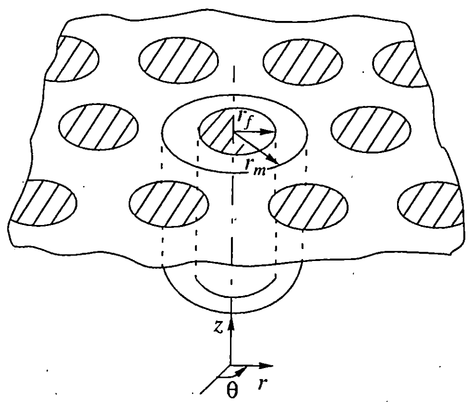
$$l = K^p\theta(1-\delta)\tau^{(m)} \tag{3.23}$$

$$\rho_{12}^p = \frac{{\mu_0^{(m)}}^2\rho_2 h_f^2 + {\mu^{(f)}}^2\rho_1 h_m^2}{5(\mu_0^{(m)}h_f + \mu^{(f)}h_m)^2} + K^p\tau^2\theta(\delta-1)(1+\delta\theta)$$

$$\theta = \frac{\mu^{(m)}}{\mu_0^{(m)}} - 1, \quad \delta = \frac{\mu_0^{(m)}h_f}{\mu^{(f)}h_m + \mu_0^{(m)}h_f}$$

Отметим, что в выражении (3.22), в отличие от упругого композита, помимо членов с разностью перемещений и ускорений вошел член пропорциональный разности скоростей компонентов смеси.

Перейдем теперь к рассмотрению однонаправленного волокнистого композита с гексагональной или хаотической укладками. Пусть оси декартовой прямоугольной системы совпадают с осями симметрии материалов компонентов композита и ось z направлена вдоль волокон. На волокна и матрицу действуют постоянные по прост-



Фиг. 2

ранству в пределах каждого компонента и всего композита массовые силы, направленные вдоль оси z. Если укладка волокон гексагональная, то рассмотрим ячейку композита, представляющую собой цилиндр с радиусом основания r_m и образующей параллельной оси z (фиг. 2), где r_f – радиус волокон, $r_m = r_f / \sqrt{\eta_f}$ – радиус цилиндра, вычисленный из условия неизменности объемных содержаний матрицы и волокон при замене шестиугольника кругом. Такую же ячейку выделим и в случае хаотической укладки, заменяя ее гексагональной с той же объемной концентрацией волокон. Будем считать, что

$$u_z^{(r)} = u_z^{(r)}(r,t), \quad u_r^{(r)} = u_\theta^{(r)} = 0$$

$$\sigma_{rz}^{(r)} = \sigma_{rz}^{(r)}(r,t), \quad \sigma_{ij}^{(r)} = 0 \quad (ij \neq rz \ \ (r = m, f))$$

где $\mathbf{u}^r = (u_x^{(r)}, u_y^{(r)}, u_z^{(r)})$ – вектор перемещений и $\sigma_{ij}^{(r)}$ – тензор напряжений r-го компонента композита в цилиндрической системе координат. Уравнения для r-го компонента композита имеют вид

$$\frac{\partial \sigma^{(r)}}{\partial r} + \frac{\sigma^{(r)}}{r} + f^{(r)} = \rho_r^* \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2} \tag{3.24}$$

где индексы z и rz опущены.

Определяющие соотношения в этом случае имеют вид, аналогичный (3.2)–(3.3), с той разницей, что частное дифференцирование по z в них должно быть заменено дифференцированием по r. Откуда с учетом (3.4) для $u_0^{(r)}$ получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_0^{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_0^{(r)}}{\partial r} - a_r^2 u_0^{(r)} = -\frac{f_0^{(r)}}{\mu_r} \tag{3.25}$$

Это уравнение заменой $\xi = i a_r r$ сводится к уравнению Бесселя. Решение уравнения

(3.25) имеет вид

$$u_0^{(r)} = A_r I_0(a_r r) + B_r K_0(a_r r) + F_r \tag{3.26}$$

где $I_0(y)$ и $K_0(y)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка. Для $u_0^{(r)}$ имеем четыре граничных условия

$$u_0^{(m)}\Big|_{r=r_m} = u_0^{(f)}\Big|_{r=r_m}, \quad \sigma_0^{(m)}\Big|_{r=r_m} = \sigma_0^{(f)}\Big|_{r=r_m}$$

$$\frac{\partial u_0^{(r)}}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0^{(m)}}{\partial r}\Big|_{r=r_m} = 0 \tag{3.27}$$

Из (3.26)–(3.27) получаем

$$u_0^{(f)} = (F_f - F_m)CB'_m I_0(a_f r) + F_f \tag{3.28}$$

$$u_0^{(m)} = (F_f - F_m)B'_m\left[I_0(a_m r) + \frac{I_1(a_m r_m)}{K_1(a_m r_m)}K_0(a_m r)\right] + F_m$$

$$B'_m = \frac{1}{D - CI_0(a_f r_f)}$$

$$C = \frac{\mu_m a_m}{\mu_f a_f}\frac{1}{I_1(a_f r_f)}\left[I_1(a_m r_f) - \frac{I_1(a_m r_m)}{K_1(a_m r_m)}K_1(a_m r_f)\right] \tag{3.29}$$

$$D = I_0(a_m r_f) + \frac{I_1(a_m r_m)}{K_1(a_m r_m)}K_0(a_m r_f)$$

где $I_1(y)$ и $K_1(y)$ – модифицированные функции Бесселя 1-го порядка.

Для напряжений на границе раздела волокно-матрица

$$\sigma_0^{(f)}\Big|_{r_f} = \mu_f a_f (F_f - F_m)CB'_m I_1(a_f r_f) \tag{3.30}$$

В этом случае сила, действующая на первый компонент со стороны второго и приходящаяся на единицу объема волокнистого композита

$$R_3 = \frac{2\sigma_{xz}\Big|_{r=r_f} r_f}{r_m^2} \tag{3.31}$$

Определим перемещения в компонентах смеси как средние перемещения в компонентах композита

$$\bar{u}_0^{(1)} = \frac{1}{\pi r_f^2}\int\limits_{S_f} u_0^{(f)}dS, \quad u_0^{(2)} = \frac{1}{\pi(r_m^2 - r_f^2)}\int\limits_{S_m} u_0^{(m)}dS \tag{3.32}$$

Иключая $F_f - F_m$ из (3.30), (3.32), находим

$$\sigma_0^{(f)}\Big|_{r_f} = \frac{CB'_m \mu_f a_f I_1(a_f r_f)(\bar{u}_0^{(1)} - \bar{u}_0^{(2)})}{\dfrac{2CB'_m}{r_f^2}\int\limits_0^{r_f} I_0(a_f r)rdr + \dfrac{2B'_m}{r_m^2 - r_f^2}\int\limits_{r_m}^{r_f}\left[I_0(a_m r) + \dfrac{I_1(a_m r_m)}{K_1(a_m r_m)}K_0(a_m r)\right]rdr + 1}$$

Разлагая его в точке $a_m = a_f = 0$ в ряд и удерживая члены вплоть до $O(p^2)$ включительно, с учетом (1.11), (3.4), (3.31), получаем выражение для вязкодинамического оператора. Если волокна и матрица упруги, то

$$Y_3 = K^e + \rho_{12}^e \partial^2 / \partial t^2 \tag{3.33}$$

$$K^e = K(\mu^{(m)}, \mu^{(f)}) = \frac{\eta_m^2 \mu^{(m)} / r_m^2}{\left[\frac{1}{2} \ln 1/\sqrt{\eta_f} + \eta_f/2 - \eta_f^2/8 - \frac{3}{8} \right] + \mu_m^{(m)} \eta_m^2 / 8\mu^{(f)}}$$

$$\rho_{12}^e = \rho_{12}(\mu^{(m)}, \mu^{(f)}) = \frac{\mu^{(f)}\gamma}{\mu^{(m)}\beta} \rho_m^* K(\mu^{(m)}, \mu^{(f)})$$

$$\beta = -24(r_m^2 - r_f^2) r_m^4 \mu^{(f)} \left(4 \ln \frac{1}{\sqrt{\eta_f}} + 4\eta_f - \eta_f^2 - 3 + \frac{\mu^{(m)}\eta_m^2}{\mu^{(f)}} \right)$$

$$\gamma = 48 r_f^2 r_m^6 \ln^2(r_m / r_f) + 24 r_m^4 r_f^4 \ln(r_m / r_f) - 24 r_f^2 r_m^6 \ln(r_m / r_f) - r_f^8 + 10 r_f^6 r_m^2 - 24 r_m^4 r_f^4 +$$

$$+ 22 r_f^2 r_m^6 - 7 r_m^8 + \rho_f^* \mu^{(m)^2} / \rho_m^* \mu^{(f)^2} (r_f^2 - r_m^2)^3 r_f^2 \tag{3.34}$$

$$\eta_f = r_1^2 / r_2^2$$

Аналогичные выражения в случае упругих компонентов для K^e из (3.20) и (3.33) были получены другими методами в работах [9, 8, 5]. Если матрица целиком находится в условиях вязкопластического течения, а волокна упруги, то для вязкодинамического оператора имеем

$$Y_3 = K^p + l \frac{\partial}{\partial t} + \rho_{12}^p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.35}$$

$$K^p = K\left(\mu_0^{(m)}, \mu^{(f)}\right), \quad l = \theta(1-\delta)\tau K^p$$

$$\rho_{12}^p = \rho_{12}\left(\mu_0^{(m)}, \mu^{(f)}\right) + K^p \tau^2 \theta(\delta - 1)(1 + \delta\theta) \tag{3.36}$$

$$\delta = \frac{\mu_0^{(m)} \eta_m^2 / 8\mu^{(f)}}{[\frac{1}{2} \ln 1/\sqrt{\eta_f} + \eta_f/2 - \eta_f^2/8 - \frac{3}{8}] + \mu_0^{(m)} \eta_m^2 / 8\mu^{(f)}}$$

$$\theta = \mu^{(m)} / \mu_0^{(m)} - 1$$

Вид оператора для слоистого и волокнистого композита одинаковый (68) или (70), а отличие проявляется в различных выражениях для входящих в него констант через характеристики компонентов композита, соответственно выражения (3.21), (3.23) и (3.34), (3.36).

Итак, выражения (3.33)–(3.36) и (3.20)–(3.23) определяют вязкодинамический оператор Y_3 для волокнистого и Y_1 для слоистого композитов при распространении волн параллельно армирующим элементам. Если смесь трансверсально-изотропна, то для нее имеет место $Y_1 = Y_2$. Для того чтобы получить Y_1 для слоистого и Y_3 для волокнистого композитов, был проведен вывод по существу аналогичный рассмотренному выше. Результатом его, например для слоистого композита, будет аналитическое выражение для Y_1, получающееся из (3.21) простой заменой $\mu^{(r)}$ на $\lambda^{(r)} + 2\mu^{(r)}$ (аналогичный результат был получен в [5, 6]). Однако такие аналитические оценки для $Y_1(Y_3)$ не позволяют получить удовлетворительных результатов как для стационарных, так и нестационарных волн, распространяющихся нормально к армирующим элементам композита. Здесь отметим также работу [7], в которой получена анлитическая оценка для Y_1 в волокнистом композите, приемлемая, как показали расчеты автора, для концентраций волокон 1–2% и дающая совершенно неудовлетворительные результаты для умеренных концентраций. Поэтому примем гипотезу о том, что перенос импульса между компонентами смеси изотропен, т.е. будем считать, что $Y_1 = Y_3$ ($Y_3 = Y_1$) для волокнистого (слоистого) композита. Если смесь ортотропна (например, когда армирующие слои – однонаправленные слои волокон), примем аналогичную гипотезу, считая, что обмен импульсом изотропен в плоскости Ox_1x_3, где x_1 – направление максимальной жесткости в плоскости армирующего слоя.

4. Полная система уравнений. Подставляя (3.20)–(3.23) или (3.33)–(3.36) в уравнения (1.7), (1.8) с учетом (1.11) и (2.21), получим уравнения движения для трансверсально-изотропной смеси в виде

$$(\rho_1+\rho_{12})\dot{v}_i^{(1)} = \sigma_{ij,j}^{(1)} + K(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) + l(v_i^{(2)} - v_i^{(1)}) + \rho_{12}\dot{v}_i^{(2)}$$

$$(\rho_2+\rho_{12})\dot{v}_i^{(2)} = \sigma_{ij,j}^{(2)} + K(u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) + l(v_i^{(1)} - v_i^{(2)}) + \rho_{12}\dot{v}_1^{(1)} \tag{4.1}$$

$$\dot{u}_i^{(\alpha)} = v_i^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1,2;\ i,j = 1,2,3)$$

$$K, l, \rho_{12} = \begin{cases} K^e, & 0, \quad \rho_{12}^e; \quad S^{(1)} \leq K_m(I^{(1)p}) \\ K^p, & l, \quad \rho_{12}^p; \quad S^{(1)} > K_m(I^{(1)p}) \end{cases} \tag{4.2}$$

В заключение рассмотрим начальные и граничные условия, используемые в дальнейшем для двумерных задач, сформулированных в скоростях и напряжениях. Начальные условия предполагаются всегда нулевыми. На границе свободной от напряжений для каждого из компонентов смеси ставятся обычные условия свободной границы, как если бы второго компонента не было. Это же относится и к условиям излучения. Если на какой-либо поверхности композита, пусть для определенности это будет поверхность $z = \mathrm{const}$, действует нормальное давление $p(t)$, то граничные условия имеют вид

$$\sigma_{zz}^{(\alpha)} = \eta_\alpha p(t), \quad \sigma_{xz}^{(\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1,2) \tag{4.3}$$

Если на этой поверхности задана нормальная скорость $v_0(t)$, то граничные условия будут

$$v_z^{(\alpha)} = v_0(t), \quad v_x^{(\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1,2) \tag{4.4}$$

При нормальном ударе жестким ударником плотности ρ_0 и высоты h_0 с начальной скоростью v_0 граничные условия записываются так:

$$\rho_0 h_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = \sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(2)}, \quad v_z^{(\alpha)}\Big|_{t=0} = V_0, \quad \sigma_{xz}^{(\alpha)} = 0 \tag{4.5}$$

т.е. условия завязаны для обеих компонент.

На границе раздела двух композитных слоев $z = \mathrm{const}$ принимаются условия полного прилипания

$$\sigma_{zz}^{(\alpha)+} = \sigma_{zz}^{(\alpha)-}, \quad \sigma_{xz}^{(\alpha)+} = \sigma_{xz}^{(\alpha)-}, \quad v_x^{(\alpha)+} = v_x^{(\alpha)-}, \quad v_z^{(\alpha)+} = v_z^{(\alpha)-} \tag{4.6}$$

Если в какой-либо момент времени в некоторой контактной точке для среднего напряжения в композите: $|\sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(2)}| \geqslant \sigma_1$ или $|\sigma_{xz}^{(1)} + \sigma_{xz}^{(2)}| \geqslant \sigma_2$ (где σ_1 и σ_2 – пределы прочности соответственно на межслойный отрыв и сдвиг), то считается, что в этой точке произошло отслоение. Если расстояние (среднее по смеси) от рассматриваемой точки до поверхности смежного тела $l = 0$, то на берегах трещины ставится условие скольжения без трения

$$\sigma_{zz}^{(\alpha)+} = \sigma_{zz}^{(\alpha)-}, \quad v_z^{(\alpha)+} = v_z^{(\alpha)-}, \quad \sigma_{xz}^{(\alpha)+} = \sigma_{xz}^{(\alpha)-} = 0 \tag{4.7}$$

Если $l > 0$, то берега трещины принимаются свободными от напряжений.

Уравнения (4.1), (4.2), (2.20)–(2.22) образуют полную систему уравнений двухскоростной анизотропной упруговязкопластической смеси. Как видно из этих уравнений, полученная двухскоростная смесь представляет собой совокупность двух односкоростных анизотропных сред, связанных друг с другом посредством соответствующих членов в уравнениях движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-00173).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кукуджанов К.В.* Динамическое деформирование и разрушение неупругих слоистых композитов // Изв. РАН. МТТ. 1977. № 4. С. 87–98.
2. *Bedford A., Stern M.* Multi continuum theory for composite elastic materials // Acte Mech. 1972. V. 14. № 2/3. P. 85–102.
3. *Martin S.E., Bedford A., Stern M.* Steady state wave propagation in fibre-reinforced elastic materials // Development in Mech.: Proc. 12th Midwestern Conf. Nontre–Dam, 1971. V. 6. P. 515–527.
4. *Hegemier G.A.* Finite-amplitude elastic plastic wave propagation in laminated composites // J. Appl. Phys. 1974. V. 45. P. 4248–4253.
5. *McNiven H.D., Mengi Y.* A mathematical model for the linear dynamic behavior of two phase periodic materials // Intern. J. Solids and Structures. 1979. V. 15. № 4. P. 271–280.
6. *Stern M., Bedford A.* Wave propagation in elastic laminates using multicontinuum theory // Acta Mech. 1972. V. 15. № 1/2. P. 21–38.
7. *Хорошун Л.П.* К теории взаимопроникающих упругих смесей // Прикл. механика. 1979. Т. 13. № 10. С. 124–132.
8. *Green A.E., Naghdi P.M.* On basic equations of mixtures // Quatr. J. Mech. Appl. Math. 1969. V. 22. Pt. 4. P. 427–438.
9. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
10. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid // J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. № 2. P. 168–191.
11. Continuum theory of the mechanics of fiber–reinforced composites / Ed.: A.J.M. Spencer Wien: New York: Springer, 1984. 284 p.
12. *Кукуджанов В.Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 4. С. 21–65.

Москва

Поступила в редакцию
6.10.1999