

УДК 539.3

© 2001 г. К.Ф. ЧЕРНЫХ

**ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ФЛАМАНА  
(ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ ПОДХОДЫ)**

Под задачей Фламана обычно понимают проблему линейной теории упругости о воздействии сосредоточенных сил и моментов на край полуплоскости. Обобщение же состоит в рассмотрении обобщенной антиплоской деформации, границы более общего вида и учете геометрической и физической нелинейностей. При рассмотрении вопроса используются соотношения и обозначения, приведенные в [1–5].

1. Как известно, линейная плоская задача сводится к нахождению пары функций Гурса – Колосова  $\Psi(\zeta)$ ,  $\Phi(\zeta)$  из комплексных граничных условий. Так однородное статическое граничное условие имеет вид (фиг. 1):

$$(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)})e^{i\gamma} - (\zeta\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)})e^{-i\gamma} = 0 \quad (1.1)$$

Для бесконечной области

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \Phi_0(\zeta), & \Phi_0(\zeta) &= \frac{a_{-3}}{\zeta^3} + \frac{a_{-4}}{\zeta^4} + \dots \\ \Psi(\zeta) &= b_0 + \frac{b_{-1}}{\zeta} + \frac{b_{-2}}{\zeta^2} + \Psi_0(\zeta), & \Psi_0(\zeta) &= \frac{b_{-3}}{\zeta^3} + \frac{b_{-4}}{\zeta^4} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Постоянные  $a_0$ ,  $b_0$  определяются из условий на бесконечности, а постоянные  $a_{-1}$ ,  $b_{-1}$ ,  $a_{-2}$ ,  $b_{-2}$  в задаче Фламана определяют сосредоточенные силы и моменты, согласно формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2 &= \int_L [(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)})e^{i\gamma} - (\zeta\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)})e^{-i\gamma}] ds \\ \mathcal{M}_3 &= \text{Im} \int_L \zeta [(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)})e^{i\gamma} - (\zeta\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)})e^{-i\gamma}] ds \end{aligned} \quad (1.3)$$

Через найденные функции Гурса – Колосова напряжения определяются по формулам Колосова

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(z)}) \\ \Sigma_2 &\equiv \sigma_{11} - \sigma_{22} + i2\sigma_{12} = -2[\zeta\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)}] \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Для выявления влияния геометрической нелинейности удобно рассматривать редуцированный стандартный материал (он же гармонический, полулинейный, в упругом потенциале которого отсутствуют линейные члены). Здесь функции Гурса – Колосова определяются из (однородного в нашем случае) статического граничного условия (фиг. 1):

$$\sigma^* \Phi(\zeta) e^{i\dot{\gamma}} + \alpha \overline{\Psi(\zeta)} e^{-i\dot{\gamma}} = 0$$

$$\left( \sigma^* = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha = \frac{E}{1+\nu} \right) \quad (2.1)$$

Градус здесь и ниже сопровождается величинами, отнесенные к отсчетной (недеформированной) конфигурации тела.

Комплексные условные напряжения (симметричные напряжения Био) подсчитываются по формулам

$$\dot{\Sigma}_1 \equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = 2\sigma^* |\Phi(\zeta)| \quad (2.2)$$

$$\dot{\Sigma}_2 \equiv \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i2\dot{\sigma}_{12} = 2\alpha \overline{\Phi(\zeta)} \overline{\Psi(\zeta)} |\Phi(\zeta)|^{-1}$$

В работах [4–6] было показано, что истинные напряжения (напряжения Коши) непригодны для рассмотрения сингулярных проблем (в том числе и сосредоточенных воздействий). Поэтому они и не рассматриваются в статье. Далее, имеют место соотношения

$$\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2 = \int_L [\sigma^* \Phi(\zeta) e^{i\dot{\gamma}} + \alpha \overline{\Psi(\zeta)} e^{-i\dot{\gamma}}] d\dot{s}$$

$$M_3 = \text{Im} \int_L \bar{\zeta} [\sigma^* \Phi(\zeta) e^{i\dot{\gamma}} + \alpha \overline{\Psi(\zeta)} e^{-i\dot{\gamma}}] d\dot{s} \quad (2.3)$$

Представления же (1.2) сохраняются.

Рассмотрим плоскость с клиновым вырезом (фиг. 2), берега которого свободны от распределенной нагрузки. На его верхнем (+) и нижнем (–) берегах

$$\dot{\gamma}^\pm = \mp \left( \frac{\pi}{2} + \dot{\beta} \right), \quad e^{i\dot{\gamma}^\pm} = \mp i e^{\mp i\dot{\beta}}, \quad e^{-i\dot{\gamma}^\pm} = \pm i e^{\mp i\dot{\beta}}$$

В полярных координатах (фиг. 2)  $\zeta = r e^{i\dot{\phi}}$  и на берегах выреза  $\dot{\phi}^\pm = \pm(\pi - \dot{\beta})$ .

Примем

$$\Phi(\zeta) = \sum_n A_n \zeta^{\lambda_n}, \quad \Psi(\zeta) = \sum_n B_n \zeta^{\lambda_n} \quad (2.4)$$

С учетом выписанных соотношений граничное условие (2.1) принимает вид

$$\sum_n r^{\lambda_n} [(\sigma^* A_n) e^{i[\lambda_n(\pi-\dot{\beta})-\dot{\beta}]} - (\alpha \bar{B}_n) e^{-i[\lambda_n(\pi-\dot{\beta})-\dot{\beta}]}] = 0$$

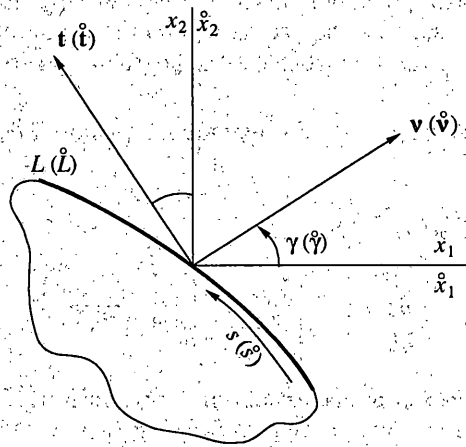
$$\sum_n r^{\lambda_n} [(\sigma^* A_n) e^{-i[\lambda_n(\pi-\dot{\beta})-\dot{\beta}]} - (\alpha \bar{B}_n) e^{i[\lambda_n(\pi-\dot{\beta})-\dot{\beta}]}] = 0$$

Для каждого значения  $n$  имеем однородную систему двух уравнений с определителем  $\Delta = i2 \sin 2[\lambda_n(\pi - \dot{\beta}) - \dot{\beta}]$ . Приравнявая его нулю, приходим к характеристическому уравнению с корнями

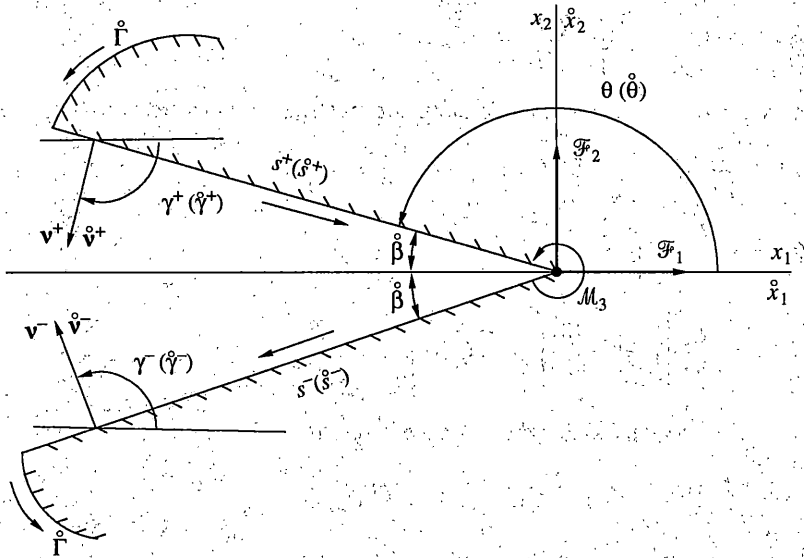
$$\lambda_n = \frac{n/2 + \dot{\beta}/\pi}{1 - \dot{\beta}/\pi} \quad (2.5)$$

Подстановка найденных корней в упомянутые пары уравнений дает

$$B_n = (-1)^n (\sigma^* / \alpha) \bar{A}_n \quad (2.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Коэффициенты же  $A_n$  определяются из граничных условий на не содержащем точку  $\zeta = \infty$  контуре  $\dot{\Gamma}$  (фиг. 2).

Для учета общей (физической и геометрической) нелинейности удобно использовать модель малосжимаемого материала [4-5] с упругим потенциалом

$$\Phi = \frac{E}{1+\nu} [-(J-1) + \Psi(I_\Lambda)]$$

$$\left( I_\Lambda = 2 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| + \lambda, \quad J = \lambda \left( \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) \right) \quad (2.7)$$

Здесь  $\zeta = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2$ ,  $z = x_1 + ix_2$  – комплексные координаты материальной точки, до и после деформации,  $\lambda$  – кратность удлинения в направлении оси  $\dot{x}_3$ ,  $I_\Lambda$  – первый инвариант тензора кратности удлинений,  $J$  – кратность изменения объема,  $\Psi$  – произволь-

ная функция. Таким образом, в силу присущей большинству материалов малости изменения объема, "ответственный" за его изменение инвариант  $J$  учитывается простейшим – линейным – образом. Сдвиговая же деформация учитывается произвольной функцией  $\Psi(\circ)$ .

Для плоской задачи нахождение определяющих функций  $\partial z/\partial \zeta$ ,  $\partial z/\partial \bar{\zeta}$  сводится к квадратурам

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\chi[\Omega, \lambda]}{\xi^2(\zeta, \lambda)} \quad (\Omega = \xi(\zeta, \lambda)\overline{\xi(\zeta, \lambda)})$$

$$z = \frac{\int \chi[\Omega, \lambda] d\zeta}{\xi^2(\zeta, \lambda)} + \overline{\eta(\zeta, \lambda)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \int \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[ \frac{\chi(\Omega, \lambda)}{\xi^2(\zeta, \lambda)} \right] d\zeta + \overline{\eta'(\zeta, \lambda)} \quad (2.8)$$

Разумно распоряжаясь тремя произвольными функциями ( $\xi(\zeta, \lambda)$ ,  $\eta(\zeta, \lambda)$ ,  $\chi[\Omega, \lambda]$ ) можно получать семейства точных решений задач (в том числе и краевых) нелинейной плоской задачи. Отвечающий им упругий потенциал определяется из параметрического (параметр  $\Omega$ ) соотношения

$$\Psi'(2 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| + \lambda) = \Omega, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| = \frac{\chi[\Omega, \lambda]}{\Omega} \quad (2.9)$$

Далее, комплексные номинальные напряжения подсчитываются по формулам

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = \frac{2E}{1+\nu} [-\lambda \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \xi^2(\zeta, \lambda)]$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = \frac{2E}{1+\nu} \lambda \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 + \Omega(\zeta, \lambda) \right] \quad (2.10)$$

Главные вектор и момент находятся из соотношений

$$\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2 = \frac{1}{2} \int_L [\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\dot{\gamma}} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\dot{\gamma}}] d\dot{s} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{M}_3 = \frac{1}{2} \text{Im} \int_L \bar{\zeta} [\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\dot{\gamma}} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\dot{\gamma}}] d\dot{s}$$

Наконец, комплексные условные напряжения подсчитываются по формулам

$$\dot{\Sigma}_1 \equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = \frac{2E}{1+\nu} \left[ -\lambda \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| + \Omega(\zeta, \lambda) \right]$$

$$\dot{\Sigma}_2 \equiv \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i2\dot{\sigma}_{12} = \frac{2E}{1+\nu} \lambda \frac{\xi(\zeta, \lambda)}{\xi(\zeta, \lambda)} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}$$

$$\dot{\sigma}_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 + \Omega(\zeta, \lambda) \right] \quad (2.12)$$

Однородное же статическое граничное условие имеет вид

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\dot{\gamma}} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\dot{\gamma}} = 0 \quad (2.13)$$

3. Известно, что при линейной антиплоской деформации отличны от нуля лишь две компоненты тензора напряжений:  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$ . При этом

$$\Sigma_3 \equiv \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \mu \overline{\Psi(\zeta)} \quad (3.1)$$

где для несжимаемого материала  $\mu = E/3$ . Однородное статическое граничное условие имеет вид:

$$\Psi(\zeta)e^{i\gamma} + \overline{\Psi(\zeta)}e^{-i\gamma} = 0 \quad (3.2)$$

В линейной постановке антиплоская деформация значительно проще плоской задачи. В нелинейной теории это преимущество в значительной мере утрачивается. "В работе" оказываются не два, а все шесть компонент тензора напряжений. Кроме того в нелинейной постановке антиплоская деформация переопределена. В работах автора [4, 5] было показано, что переопределенность не имеет место для материала "типа неогукковского", для которого упругий потенциал имеет вид

$$\Phi = \Phi \left( \lambda^2 + 2\lambda^{-1} + 4 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}} \right)$$

Простейшим представителем этого класса материалов является собственно неогукковский материал, хорошо себя зарекомендовавший для (несжимаемых) резино-подобных материалов. Для него

$$\Phi = \frac{\mu}{2} (\lambda^2 + 2\lambda^{-1} + \Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)}) \quad (3.3)$$

$$\dot{\Sigma}_1 \equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = \mu \frac{\cos \omega}{\lambda + \lambda^{-1/2}} \Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)}$$

$$\dot{\Sigma}_2 \equiv \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i2\dot{\sigma}_{12} = \mu \frac{\cos \omega}{\lambda + \lambda^{-1/2}} \overline{\Psi(\zeta)}^2$$

$$\dot{\Sigma}_3 \equiv \dot{\sigma}_{13} + i\dot{\sigma}_{23} = \mu \cos \omega \overline{\Psi(\zeta)}$$

$$\dot{\sigma}_{33} = \mu \cos \omega \left[ \lambda - \lambda^{-2} - \frac{\lambda^{-3/2}}{\lambda + \lambda^{-1/2}} \Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)} \right]$$

$$\cos \omega = \frac{\lambda + \lambda^{-1/2}}{\sqrt{(\lambda + \lambda^{-1/2})^2 + \Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)}}} \quad (3.4)$$

Однородное статическое граничное условие сохраняет вид. Главные вектор и момент подсчитываются по формулам

$$\mathcal{F}_3 = \mu \operatorname{Re} \int_L \Psi(\zeta) e^{-i\gamma} d\zeta \quad (3.5)$$

$$M_1 + iM_2 = \frac{\mu}{2} \int_L \zeta [\Psi(\zeta) e^{i\gamma} + \overline{\Psi(\zeta)} e^{-i\gamma}] d\zeta$$

Последние выражения пригодны и для линейного случая при опущенном символе. В приведенных зависимостях  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$  – величина угла поворота материальной частицы тела.

4. Вернемся к обобщенной задаче Фламана в линейной постановке, принимая

$$\Phi(\zeta) = \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \Phi_k(\zeta), \quad \Psi(\zeta) = \frac{b_{-1}}{\zeta} + \frac{b_{-2}}{\zeta^2} + \Psi_k(\zeta) \quad (4.1)$$

Здесь  $\Phi_k(\zeta)$ ,  $\Psi_k(\zeta)$  – корректирующие слагаемые, обеспечивающие отсутствие распределенной нагрузки на границе полуплоскости (фиг. 3), где

$$\zeta = \bar{\zeta} = x_1, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad e^{i\gamma} = i, \quad e^{-i\gamma} = -i \quad (4.2)$$

Подстановка выражений (4.1) в граничное условие (1.1) дает

$$\Phi_k(x_1) + \overline{\Phi_k(x_1) + x_1 \Phi'_k(x_1) + \Psi_k(x_1)} = -\frac{a_{-1} + \bar{b}_{-1}}{x_1} - \frac{i2\text{Im} a_{-2} + \bar{b}_{-2}}{x_1^2} \quad (4.3)$$

Полученному уравнению удовлетворяют

$$\Phi_k(\zeta) = -\frac{a_{-1} + \bar{b}_{-1}}{\zeta}, \quad \Psi_k(\zeta) = \frac{i2\text{Im} a_{-2} - b_{-2}}{\zeta^2}$$

Отсюда и из (4.1) получаем функции Гурса – Колосова

$$\Phi(\zeta) = -\frac{\bar{b}_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{b_{-1}}{\zeta} + \frac{i2\text{Im} a_{-2}}{\zeta^2} \quad (4.4)$$

Подстановка этих выражений в (1.3) дает с учетом того, что на малой окружности (фиг. 2):

$$\gamma = \theta - \pi, \quad e^{i\gamma} = -e^{i\theta}, \quad e^{-i\gamma} = -e^{-i\theta}, \quad ds = r d\theta \quad (4.5)$$

$$\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2 = 2\pi \bar{b}_{-1}, \quad \mathcal{M}_3 = -2\pi \text{Im} a_{-2}$$

Отсюда следует

$$b_{-1} = \frac{\mathcal{F}_1 - i\mathcal{F}_2}{2\pi}, \quad \text{Im} a_{-2} = -\frac{\mathcal{M}_3}{2\pi}$$

Опуская в выражении (4.4)  $\text{Re} a_{-2}$ , приходим к сингулярным функциям Гурса – Колосова

$$\Phi(\zeta) = -\frac{\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2}{2\pi} \frac{1}{\zeta} - \frac{i\mathcal{M}_3}{2\pi} \frac{1}{\zeta^2}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\mathcal{F}_1 - i\mathcal{F}_2}{2\pi} \frac{1}{\zeta} - i \frac{\mathcal{M}_3}{\pi} \frac{1}{\zeta^2}$$

Отсюда и из соотношений (1.4) следует после перехода к полярным координатам

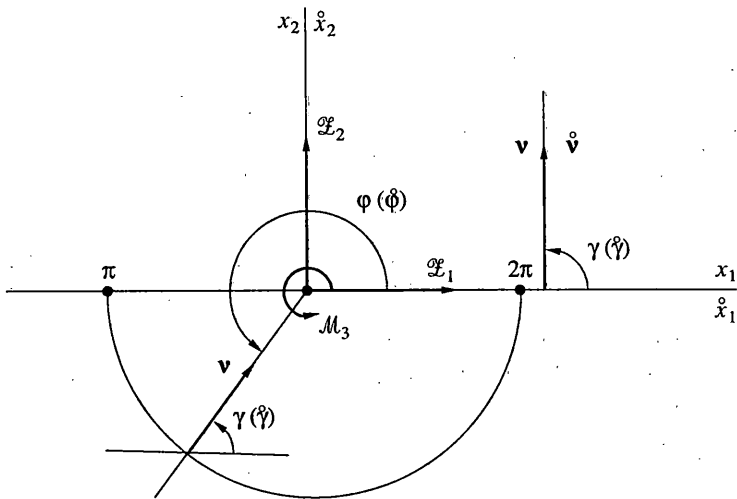
$$\sigma_{rr} = -\frac{2(\mathcal{F}_1 \cos \theta + \mathcal{F}_2 \sin \theta)}{\pi r} - \frac{2\mathcal{M}_3}{\pi r^2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{2\mathcal{M}_3}{\pi r^2} \sin^2 \theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (4.6)$$

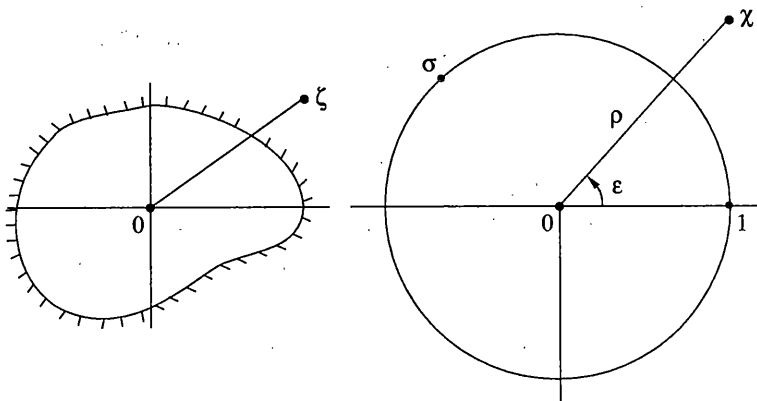
5. Рассмотрим случай геометрической нелинейности. Используя соотношения (2.1)–(2.3) и (4.1) и переходя к локальным полярным координатам, последовательно находим:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\alpha \bar{b}_{-1}}{\sigma^* \zeta} + i \frac{\text{Im} a_{-2}}{\zeta^2}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{b_{-1}}{\zeta} - \frac{i\sigma^* \text{Im} a_{-2}}{\alpha \zeta^2}$$

$$b_{-1} = -\frac{\mathcal{F}_1 - i\mathcal{F}_2}{2\pi\alpha}, \quad \text{Im} a_{-2} = \frac{\mathcal{M}_3}{\pi\sigma^*} \quad (5.1)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Для случая сосредоточенных сил

$$\dot{\sigma}_{rr} = \sqrt{\mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_2^2}, \quad \dot{\sigma}_{\theta\theta} = \dot{\sigma}_{r\theta} = 0 \quad (5.2)$$

а при сосредоточенном моменте

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{rr} \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} \\ \dot{\sigma}_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{2M_3}{\pi r^2} \begin{pmatrix} \cos^2 \dot{\theta} \\ \sin^2 \dot{\theta} \\ \sin \dot{\theta} \cos \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

6. Рассмотрим плоскость с клиновым вырезом. Согласно выражениям (2.4)–(2.6) сосредоточенным силам в угловой точке отвечают значения

$$n = -2, \quad \lambda_n = -1, \quad \Phi(\zeta) = \frac{A_{-2}}{\zeta}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\sigma^* \bar{A}_{-2}}{\alpha \zeta}$$

Как и выше находим

$$A_{-2} = -\frac{\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2}{4\beta\sigma^*}, \quad \Phi(\zeta) = -\frac{\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2}{4\beta\sigma^*} \frac{1}{\zeta}, \quad \Psi(\zeta) = -\frac{\mathcal{F}_1 - i\mathcal{F}_2}{4\beta\alpha} \frac{1}{\zeta}$$

$$\dot{\sigma}_{rr} = \frac{\sqrt{\mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_2^2}}{2\beta\dot{r}}, \quad \dot{\sigma}_{\theta\theta} = \dot{\sigma}_{r\theta} = 0 \quad (6.1)$$

Сосредоточенному же моменту в угловой точке отвечает  $\lambda_n = -2$ . Как усматривается из (2.5), этому значению характеристического числа при  $n = -3$  могут отвечать лишь  $2\beta = \pi$  (полуплоскость), либо  $2\beta = 0$  (прямолинейный разрез).

7. Рассмотрим плоскость с содержащим точку  $\zeta = 0$  отверстием с контуром общего вида (фиг. 4). Пусть

$$\zeta = \kappa(\chi) = R(\chi + \kappa_0(\chi))$$

$$\kappa_0(\chi) = \frac{c_{-1}}{\chi} + \frac{c_{-2}}{\chi^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{\chi^n} \quad (7.1)$$

где  $c_i$  – вещественные коэффициенты ( $R > 0$ ),  $\kappa$  – функция, отображающая внешность единичной окружности плоскости  $\chi$  на рассматриваемую область (физической) плоскости  $\zeta$ . Введем функцию

$$\bar{\kappa}(\chi) = R(\chi^{-1} + \bar{\kappa}_0(\chi))$$

$$\bar{\kappa}_0(\chi) = c_{-1}\chi + c_{-2}\chi^2 + \dots + c_{-n}\chi^n \quad (7.2)$$

удовлетворяющую на единичной окружности ( $\chi = \sigma = e^{ie}$ ), где

$$\bar{\sigma} = e^{-ie} = \sigma^{-1}, \quad \sigma = \bar{\sigma}^{-1} \quad (7.3)$$

равенствам

$$\bar{\kappa}_0(\bar{\sigma}) = \kappa_0(\sigma), \quad \bar{\kappa}_0(\sigma) = \overline{\kappa_0(\bar{\sigma})}$$

$$\bar{\kappa}(\bar{\sigma}) = \kappa(\sigma), \quad \bar{\kappa}(\sigma) = \overline{\kappa(\bar{\sigma})} \quad (7.4)$$

Примем функции Гурса – Колосова в виде

$$\Phi(\zeta) = \frac{a_{-1}}{\zeta - \kappa(\sigma^\wedge)} + \Phi_k(\zeta), \quad \Psi(\zeta) = \frac{b_{-1}}{\zeta - \kappa(\sigma^\wedge)} + \Psi_k(\zeta) \quad (7.5)$$

где первым слагаемым отвечает приложенная в точке граничного контура  $\zeta^\wedge = \kappa(\sigma^\wedge)$  сосредоточенная сила. Введем также функции

$$\Phi^\vee(\chi) = \Phi[\kappa(\chi)], \quad \Psi^\vee(\chi) = \Psi[\kappa(\chi)]$$

$$\Phi_k^\vee(\chi) = \Phi_k[\kappa(\chi)], \quad \Psi_k^\vee(\chi) = \Psi_k[\kappa(\chi)]$$

с помощью которых, а также (7.2)–(7.5), однородное граничное условие (2.1) записывается в виде

$$\sigma^* \Phi_k^\vee(\sigma) \sigma \kappa'(\sigma) + \overline{\alpha \Psi_k^\vee(\sigma) \sigma \kappa'(\sigma)} = -R \left[ \frac{\sigma^* a_{-1} \sigma \kappa'_0(\sigma)}{\kappa(\sigma) - \kappa(\sigma^\wedge)} + \frac{\alpha \bar{b}_{-1}}{\sigma(\bar{\kappa}(\sigma) - \kappa(\sigma^\wedge))} \right] -$$

$$-R \left[ \frac{\alpha b_{-1} \sigma \kappa'_0(\sigma)}{\kappa(\sigma) - \kappa(\sigma^\wedge)} + \frac{\sigma^* \bar{a}_{-1}}{\sigma(\bar{\kappa}(\sigma) - \kappa(\sigma^\wedge))} \right]$$



Используя предложенный автором [7, 1, 2, 4, 5] альтернативный методу интегралов типа Коши алгебраический метод, приравняем первое слагаемое левой части первому слагаемому правой, а второе – второму. В результате проделанного получаем, уходя с контура вовнутрь области (т.е. заменяя  $\sigma$  на  $\chi$ ): ( $\zeta^\wedge = \kappa(\sigma^\wedge)$ ):

$$\sigma^* \Phi_k^\vee(\chi) = -\frac{R}{\chi \kappa'(\chi)} \left[ \frac{\sigma^* a_{-1} \chi \kappa'_0(\chi)}{\kappa(\chi) - \zeta^\wedge} + \frac{\alpha \bar{b}_{-1}}{\chi(\bar{\kappa}(\chi) - \bar{\zeta}^\wedge)} \right]$$

$$\alpha \Psi_k^\vee(\chi) = -\frac{R}{\chi \kappa'(\chi)} \left[ \frac{\alpha b_{-1} \chi \kappa'_0(\chi)}{\kappa(\chi) - \zeta^\wedge} + \frac{\sigma^* \bar{a}_{-1}}{\chi(\bar{\kappa}(\chi) - \bar{\zeta}^\wedge)} \right]$$

Подстановка полученных выражений в (7.5) дает

$$\sigma^* \Phi^\vee(\chi) = \frac{R}{\chi \kappa'(\chi)} \left[ \frac{\sigma^* a_{-1}}{\kappa(\chi) - \zeta^\wedge} \chi - \frac{\alpha \bar{b}_{-1}}{\bar{\kappa}(\chi) - \bar{\zeta}^\wedge} \frac{1}{\chi} \right]$$

$$\alpha \Psi^\vee(\chi) = \frac{R}{\chi \kappa'(\chi)} \left[ \frac{\alpha b_{-1}}{\kappa(\chi) - \zeta^\wedge} \chi - \frac{\sigma^* \bar{a}_{-1}}{\bar{\kappa}(\chi) - \bar{\zeta}^\wedge} \frac{1}{\chi} \right] \quad (7.6)$$

Остается постараться вернуться на физическую плоскость. Если такой возврат затруднен, можно провести рассмотрение и на плоскости  $\chi$ .

Так для плоскости с прямолинейным разрезом ( $-a \leq \dot{x}_1 \leq a$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ ):

$$\chi = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - a^2}}{a}, \quad \frac{1}{\chi} = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - a^2}}{a}, \quad R = \frac{a}{2}$$

$$\kappa(\chi) = \bar{\kappa}(\chi) = \frac{a}{2}(\chi + \chi^{-1}) = \zeta, \quad \chi \kappa'(\chi) = \frac{a}{2}(\chi - \chi^{-1}) = \sqrt{\zeta^2 - a^2}$$

С учетом этого выражения (7.6) принимают вид

$$2\sigma^* \Phi(\zeta) = \left( \frac{\sigma^* a_{-1}}{\zeta - \zeta^\wedge} - \frac{\alpha \bar{b}_{-1}}{\zeta - \bar{\zeta}^\wedge} \right) \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}} + \frac{\sigma^* a_{-1}}{\zeta - \zeta^\wedge} + \frac{\alpha \bar{b}_{-1}}{\zeta - \bar{\zeta}^\wedge}$$

$$2\alpha \Psi(\zeta) = \left( \frac{\alpha b_{-1}}{\zeta - \zeta^\wedge} - \frac{\sigma^* \bar{a}_{-1}}{\zeta - \bar{\zeta}^\wedge} \right) \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}} + \frac{\alpha b_{-1}}{\zeta - \zeta^\wedge} + \frac{\sigma^* \bar{a}_{-1}}{\zeta - \bar{\zeta}^\wedge} \quad (7.7)$$

Получим асимптотику напряжений в окрестности точки приложения сосредоточенной силы  $\zeta^\wedge$  на верхнем берегу разреза. Имеем там (фиг. 5, а):

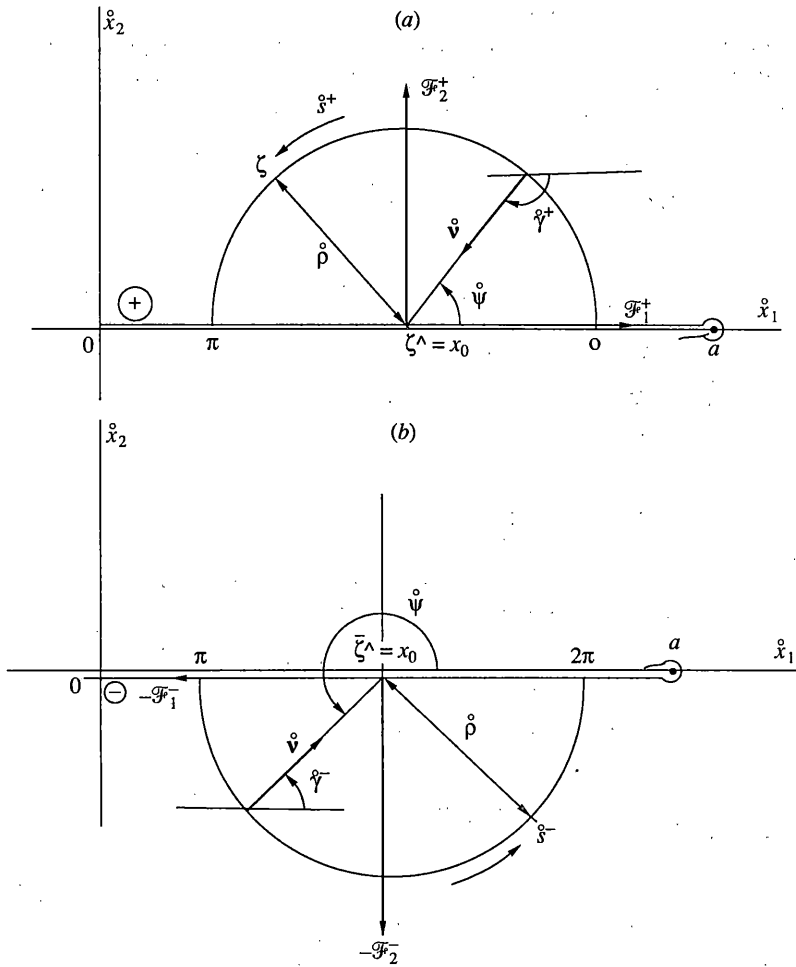
$$\zeta = \dot{x}_1, \quad \zeta^\wedge = x_0, \quad \zeta - \zeta^\wedge = \dot{\rho} e^{i\dot{\Psi}}, \quad \sqrt{\zeta^2 - a^2} = i\sqrt{a^2 - \dot{x}_1^2}$$

$$\dot{\gamma}^+ = \dot{\Psi} - \pi, \quad e^{i\dot{\gamma}^+} = -e^{i\dot{\Psi}}, \quad e^{-i\dot{\gamma}^+} = -e^{-i\dot{\Psi}}, \quad d\dot{s} = \dot{\rho} d\dot{\Psi} \quad (7.8)$$

Отсюда и из (7.7) получаем асимптотические выражения

$$2\sigma^* \Phi(\zeta) \sim \sigma^* a_{-1} \left( 1 - i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) \frac{e^{-i\dot{\Psi}}}{\dot{\rho}}$$

$$2\alpha \Psi(\zeta) \sim \alpha b_{-1} \left( 1 - i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) \frac{e^{-i\dot{\Psi}}}{\dot{\rho}} \quad (7.9)$$



Фиг. 5

Отметим, что в (7.7) использовались лишь слагаемые, содержащие  $\zeta^{\wedge}$ , поскольку точка  $\bar{\zeta}^{\wedge}$  относится к другому (нижнему) берегу разреза. Подстановка полученных асимптотических выражений в первое из выражений (2.3) дает с учетом (7.8):

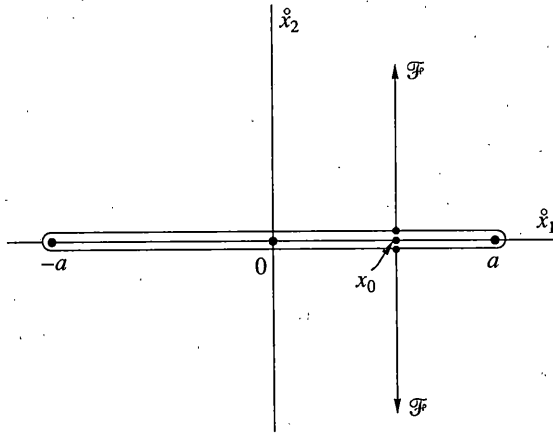
$$-\frac{2(\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2)^+}{\pi} \sim \sigma^* a_{-1} \left( 1 - i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) + \alpha \bar{b}_{-1} \left( 1 + i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) \quad (7.10)$$

На нижнем берегу разреза (фиг. 5, в):

$$\begin{aligned} \zeta = \dot{x}_1, \quad \bar{\zeta}^{\wedge} = x_0, \quad \zeta - \bar{\zeta}^{\wedge} = \rho e^{i\dot{\psi}}, \quad \sqrt{\zeta^2 - a^2} = -i\sqrt{a^2 - x_0^2} \\ \dot{\gamma}^- = \dot{\psi}, \quad e^{i\dot{\gamma}^-} = e^{i\dot{\psi}}, \quad e^{-i\dot{\gamma}^-} = e^{-i\dot{\psi}}, \quad d\dot{s} = \rho d\dot{\psi} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Рассматривая теперь в (7.7) члены с  $\bar{\zeta}^{\wedge}$ , находим аналогично проделанному выше

$$\frac{2(\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2)^-}{\pi} \sim \sigma^* a_{-1} \left( 1 + i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) + \alpha \bar{b}_{-1} \left( 1 - i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) \quad (7.12)$$



Фиг. 6

Из системы двух уравнений (7.10), (7.12) и (7.9) находим

$$a_{-1} = \frac{(\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2)^-}{\sigma^* \pi}, \quad \bar{b}_{-1} = -\frac{(\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2)^+}{\alpha \pi}$$

$$\Phi(\zeta) \sim \frac{(\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2)^-}{2\pi\sigma^*} \left( 1 - i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) \frac{e^{-i\dot{\psi}}}{\dot{\rho}}$$

$$\Psi(\zeta) \sim -\frac{(\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2)^+}{2\pi\alpha} \left( 1 - i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) \frac{e^{-i\dot{\psi}}}{\dot{\rho}} \quad (7.13)$$

Подстановка полученных выражений в (2.2) приводит к асимптотическим значениям комплексных условных напряжений:

$$\dot{\Sigma}_1 \equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} \sim \frac{\sqrt{\mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_2^2}}{\pi} \left| 1 + i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right| \frac{1}{\dot{\rho}}$$

$$\dot{\Sigma}_2 \equiv \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i2\dot{\sigma}_{12} \sim -\frac{(\mathcal{F}_1 - i\mathcal{F}_2)^- (\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2)^+ (1 + ix_0 / \sqrt{a^2 - x_0^2})^2}{\pi \sqrt{\mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_2^2} |1 + ix_0 / \sqrt{a^2 - x_0^2}|} \frac{1}{\dot{\rho}} \quad (7.14)$$

Наиболее интересен случай расклинивающей пары, при которой (см. фиг. 6):

$$\mathcal{F}_1^+ = \mathcal{F}_1^- = 0, \quad \mathcal{F}_2^- = -\mathcal{F}_2^+ = \mathcal{F}.$$

Пусть при этом

$$1 + i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} = \left| 1 + i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right| e^{i \arg \left( 1 + i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right)}$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\psi} + \arg \left( 1 + \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right)$$

С учетом этого получаем их (7.14) в локальной полярной системе координат, определяемой углом поворота  $\varepsilon$ :

$$\dot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\mathcal{F}}{\pi} \left| 1 + i \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right| \frac{1}{\rho}, \quad \dot{\sigma}_{r\dot{r}} = \dot{\sigma}_{r\varepsilon} = 0 \quad (7.15)$$

8. Для рассмотрения случая общей (геометрической и физической) нелинейности в задаче о сосредоточенной силе на краю полуплоскости используем зависимости п. 2. Полагая в соотношениях (2.10)–(2.12):

$$\begin{aligned} \xi(\zeta, \lambda) &= C(\lambda)\zeta^{-1/2}, \quad \eta(\zeta, \lambda) = B(\lambda)\ln \zeta + \eta_0(\zeta, \lambda) \\ \chi[\Omega, \lambda] &= \sum_{n \neq 1} A_{2n}(\lambda)\Omega^{2n} \end{aligned} \quad (8.1)$$

где  $C(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $A_{2n}^{(\lambda)}$  – произвольные функции, последовательно находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{1}{\zeta} [C(\lambda)^2 A_2(\lambda) + \omega(\dot{r}^2, \lambda)] \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{1}{\bar{\zeta}} [\overline{B(\lambda)} + \omega(\dot{r}^2, \lambda) + \overline{\zeta \eta'_0(\zeta, \lambda)}] \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &= \frac{2E}{1+\nu} \frac{1}{\zeta} \{-\lambda[C(\lambda)^2 A_2(\lambda) + \omega(\dot{r}^2, \lambda)] + C(\lambda)^2\} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 &= \frac{2E}{1+\nu} \frac{\lambda}{\bar{\zeta}} \{\overline{B(\lambda)} + \omega(\dot{r}^2, \lambda) + \overline{\zeta \eta'_0(\zeta, \lambda)}\} \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_1 &= \frac{2E}{1+\nu} \frac{1}{\dot{r}} [-\lambda |C(\lambda)^2 A_2(\lambda) + \omega(\dot{r}^2, \lambda)| + |C(\lambda)^2|] \\ \dot{\Sigma}_2 &= \frac{2E}{1+\nu} \frac{\overline{C(\lambda)}}{C(\lambda)} \left( \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\bar{\zeta}} [\overline{B(\lambda)} + \omega(\dot{r}^2, \lambda) + \overline{\zeta \eta'_0(\zeta, \lambda)}] \\ \dot{\sigma}_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 + \frac{|C(\lambda)^2|}{\dot{r}} \right] \end{aligned} \quad (8.4)$$

В выписанных соотношениях из суммы (8.1) выделено слагаемое, отвечающее значению  $n = 1$ . Кроме того будем считать  $n < 1$ , так что

$$\omega(\dot{r}^2, \lambda) = \frac{\dot{r}^2}{C(\lambda)^2} \sum_{n < 1} A_{2n}(\lambda) |C(\lambda)|^{4n} \dot{r}^{-2n} \quad (8.5)$$

Подстановка выражений (8.3) в однородное уравнение равновесия (2.13) дает с учетом (4.2) на границе полуплоскости:

$$\lambda \dot{x}_1 \eta'(\dot{x}_1, \lambda) + 2\lambda \omega(\dot{x}_1^2, \lambda) - C(\lambda)^2 (1 - \lambda A_2(\lambda)) + \lambda \overline{B(\lambda)} = 0$$

Уходя с границы вовнутрь области (т.е. заменяя  $\dot{x}_1$  на  $\bar{\zeta}$ ), находим

$$\overline{\lambda \zeta \eta'_0(\zeta, \lambda)} = -2\lambda \omega(\bar{\zeta}^2, \lambda) + C(\lambda)^2 (1 - \lambda A_2(\lambda)) - \lambda \overline{B(\lambda)} \quad (8.6)$$

Подстановка полученного выражения в (8.3) дает

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = \frac{2E}{1+\nu} \frac{1}{\zeta} [\lambda\omega(r^2, \lambda) - 2\lambda\omega(\bar{\zeta}^2, \lambda) + C(\lambda)^2(1 - 2A_\lambda(\lambda))] \quad (8.7)$$

Подставляя далее выражения (8.3) и (8.7) в условие (2.11), получаем с учетом (4.5) и фиг. 2:

$$\frac{\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2}{\pi} = -\frac{2E}{1+\nu} [C(\lambda)^2(1 - \lambda A_2(\lambda)) - 2\lambda\omega(r^2 e^{-i2\theta}, \lambda)] \quad (8.8)$$

Согласно (8.5)  $\lim_{r \rightarrow 0} \omega(r^2 e^{-i2\theta}, \lambda) = 0$ . С учетом этого получаем, устремляя  $r$  к 0:

$$C(\lambda)^2 = \frac{\mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2}{\pi} \frac{1+\nu}{2E} \frac{1}{\lambda A_2(\lambda) - 1} \quad (8.9)$$

Преобразуем выражения (8.4)–(8.5), полагая в них

$$A_{2n}^\vee(\lambda) = A_{2n} |C(\lambda)|^{4(n-1)} \\ \omega^\vee(r^2, \lambda) = \frac{\omega(r^2, \lambda)}{C(\lambda)^2} = \sum_{n < 1} A_{2n}^\vee(\lambda) r^{2(n-1)} \quad (8.10)$$

При этом находим с учетом (8.9) следующие выражения для комплексных условных напряжений:

$$\begin{aligned} \mathring{\Sigma}_1 &\equiv \mathring{\sigma}_{11} + \mathring{\sigma}_{22} = \frac{\sqrt{\mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_2^2}}{\pi r} \frac{[1 - \lambda |A_2(\lambda) + \omega^\vee(r^2, \lambda)]}{|\lambda A_2(\lambda) - 1|} \\ \mathring{\Sigma}_2 &\equiv \mathring{\sigma}_{11} - \mathring{\sigma}_{22} + i2\mathring{\sigma}_{12} = \frac{\sqrt{\mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_2^2}}{\pi r} \frac{[\lambda^{-1} - A_2(\lambda) + \omega^\vee(r^2, \lambda) - 2\omega^\vee(\bar{\zeta}^2, \lambda)]}{|\lambda A_2(\lambda) - 1|} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Конкретизируя здесь постоянные  $A_{2n}(\lambda)$ ,  $A_2(\lambda)$ , находим из (8.11) условные напряжения. При этом согласно соотношениям (2.9) и (8.1) им отвечает упругий потенциал, структура которого определяется из параметрических уравнений (параметр  $\Omega$ ):

$$\Psi' \left( 2 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|, \lambda \right) = \Omega, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| = \sum_{n \leq 1} A_{2n}(\lambda) \Omega^{2n-1} \quad (8.12)$$

9. Используя зависимости *n*. 3, рассмотрим антиплоскую деформацию. В линейном случае примем

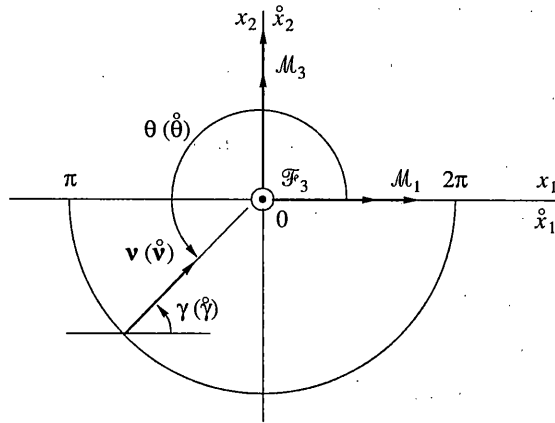
$$\Psi(\zeta) = \frac{b_{-1}}{\zeta} + \frac{b_{-2}}{\zeta^2} + \Psi_k(\zeta) \quad (9.1)$$

Подставляя это выражение в однородное граничное условие (3.2), получаем с учетом (4.2) и фиг. 7:

$$\Psi_k(x_1) - \overline{\Psi_k(x_1)} = -\frac{i2 \operatorname{Im} b_{-1}}{x_1} - \frac{i2 \operatorname{Im} b_{-2}}{x_1^2}$$

Этому условию удовлетворяет выражение

$$\Psi_k(\zeta) = -\frac{i \operatorname{Im} b_{-1}}{\zeta} - \frac{i \operatorname{Im} b_{-2}}{\zeta^2}$$



Фиг. 7

так что согласно (9.1)

$$\Psi(\zeta) = \frac{\operatorname{Re} b_{-1}}{\zeta} + \frac{\operatorname{Re} b_{-2}}{\zeta^2} \quad (9.2)$$

Подстановка этого выражения в (3.6) дает с учетом соотношений (4.5) и фиг. 7:

$$\mathcal{F}_3 = -\pi\mu \operatorname{Re} b_{-1}, \quad M_1 + iM_2 = \frac{\mu}{2} [-i2rb_{-1} + \pi \operatorname{Re} b_{-2}]$$

После предельного перехода при  $r \rightarrow 0$  получаем отсюда

$$\operatorname{Re} b_{-2} = \frac{2M_1}{\pi\mu}, \quad M_2 = 0, \quad \operatorname{Re} b_{-1} = -\frac{\mathcal{F}_3}{\pi\mu}$$

так что

$$\mu\Psi(\zeta) = -\frac{\mathcal{F}_3}{\pi\zeta} + \frac{2M_1}{\pi\zeta^2} \quad (9.3)$$

Отсюда и из (3.1) находим, переходя к локальным полярным координатам:

$$\sigma_{32} = -\frac{\mathcal{F}_3}{\pi r} + \frac{2M_1}{\pi r^2} \cos \theta, \quad \sigma_{3\theta} = \frac{2M_1}{\pi r^2} \sin \theta \quad (9.4)$$

10. Для неогукковского материала в той же задаче используем выражения (9.1) и (3.2), те же, что и в линейной задаче. Там что сразу можно принять полученные из них соотношения (9.3)

$$\mu\Psi(\zeta) = -\frac{\mathcal{F}_3}{\pi r} e^{-i\hat{\phi}} + \frac{2M_1}{\pi r^2} e^{-i2\hat{\phi}} \quad (10.1)$$

Ограничиваясь рассмотрением асимптотики напряжений в окрестности приложения сосредоточенных воздействий, последовательно находим из соотношений (3.4) для первого слагаемого в (10.1):

$$\cos \omega \sim \frac{\lambda + \lambda^{-1/2}}{2\mathcal{F}_3 / \pi\mu r}$$

$$\dot{\Sigma}_1 \equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} \sim \frac{\mathcal{F}_3}{2\pi r}$$

$$\overset{\circ}{\Sigma}_2 \equiv \overset{\circ}{\sigma}_{11} - \overset{\circ}{\sigma}_{22} + i2\overset{\circ}{\sigma}_{12} \sim \frac{\mathcal{F}_3}{2\pi r} e^{i2\theta}$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{33} \sim -\lambda^{-3/2} \frac{\mathcal{F}_3}{2\pi r}$$

$$\overset{\circ}{\Sigma}_3 \equiv \overset{\circ}{\sigma}_{13} + i\overset{\circ}{\sigma}_{23} \sim -\frac{\mu(\lambda + \lambda^{-1/2})}{2} e^{i\theta}$$

Отсюда имеем после перехода к локальным полярным координатам:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr} \sim \frac{\mathcal{F}_3}{2\pi r}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{33} \sim -\lambda^{-3/2} \frac{\mathcal{F}_3}{2\pi r}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{r\theta} \sim \overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta} \sim 0$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{3r} \sim -\frac{\lambda + \lambda^{-1/2}}{2} \mu, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{3\theta} \sim 0 \quad (10.2)$$

Аналогично выводятся выражения для асимптотики условных напряжений, отвечающих второму слагаемому в (10.1):

$$\left\| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\sigma}_{rr} \\ \overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta} \\ \overset{\circ}{\sigma}_{r\theta} \\ \overset{\circ}{\sigma}_{33} \end{array} \right\| \sim \frac{M_1}{\pi r^2} \left\| \begin{array}{c} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \\ -\lambda^{-3/2} \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\sigma}_{3r} \\ \overset{\circ}{\sigma}_{3\theta} \end{array} \right\| \sim \frac{\mu(\lambda + \lambda^{-1/2})}{2} \left\| \begin{array}{c} \cos \theta \\ \sin \theta \end{array} \right\| \quad (10.3)$$

**11.** В заключение статьи сделаем следующие замечания:

Выявленная автором нелинейная статико-геометрическая аналогия [4, 5, 8, 9] позволяет получать из приведенных выше решения для дислокаций Вольтерры, расположенных на границе области (типа ступеньки для краевой дислокации).

Изложенное в п. 7 снимает пробел (сосредоточенная сила на контуре области) в предложенном автором простом алгебраическом методе решения краевых задач (альтернативном методу интегралов типа Коши) [7, 1, 2, 4, 5].

Все рассмотренные случаи задачи Фламана решаются единообразно: использованием выражений вида (4.1) и (9.1) с последующим удовлетворением условию свободы граничного контура от распределенной нагрузки. Тем самым снимается связанная со способами осуществления предельных переходов некоторая субъективность рассмотрения проблемы.

Наконец, и это наиболее важно, уже сопоставление полученных в статье соотношений показывает, что нелинейный подход приводит к качественно новым результатам:

Так полученные упомянутым однообразным приемом выражения (4.6) качественно отличаются от найденных с учетом геометрической нелинейности выражений (5.2), (5.3).

При рассмотрении клинового выреза (клина) выражения (6.1) также качественно отличаются от известных зависимостей линейной теории. Сказанное также относится и к случаю сосредоточенного момента в угловой точке.

При сопоставлении выражений (9.4) с (10.2)–(10.3) также усматриваются качественные отличия при антиплоской деформации. Отметим здесь отсутствие момента  $M_2$ .

В задаче о приложении сосредоточенной силы к отверстию общего вида отсутствует сопоставление с линейным аналогом: автору не известно решение соответствующей линейной задачи.

В п. 8 получен довольно широкий класс решений общей (геометрически и физически) нелинейной задачи для малосжимаемого материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Государственная поддержка ведущих научных школ РФ" (проект 96-15-96066) и гранта РФФИ (проект 99-01-00686).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 335 с.
2. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
3. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 254 с.
4. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996. 287 с.
5. Chernykh K.F. Nonlinear Theory of Anisotropic Elasticity. USA. N.Y.: Begell Publishing House, 1998. 248 p.
6. Новожиллов В.В., Черных К.Ф. Об "истинных" мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73–79.
7. Новожиллов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
8. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 2. Приложения. СПб., 1998. 194 с.
9. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 1. Теория. – СПб., 1999. 275 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
23.03.1999