МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001

УДК 539.3 : 534.1

© 2001 г. А.Г. БАГДОЕВ, С.Г. СААКЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН МОДУЛЯЦИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ОСРЕДНЕННОЙ ЗАДАЧИ

В [1] рассмотрена линейная задача о колебаниях магнитоупругой пластины в поперечном магнитном поле в рамках теории Кирхгофа. Получено решение для малой электропроводности как на основании гипотезы магнитоупругости, так и без нее. В [2] указанная задача решена в предположении, что проекция индуцированного магнитного поля на нормаль к пластине (невозмущенной) линейно зависит от нормальной координаты. Путем сложных вычислений получено простое линейное дисперсионное соотношение, которое в случае малой или большой электропроводности переходит в известные решения. В [3] дано линейное решение для конечной толщины плиты. В [4.5] решены нелинейные задачи устойчивости волн модуляции в продольном магнитном поле. Перечисленные задачи изучены на основании классической теории пластин. В настоящей статье исследуются двумерные волны модуляции конечнопроводящей пластины в магнитном поле на основе совместного решения уравнений теории упругости и индукции магнитного поля. Сначала рассмотрена пространственная линейная задача магнитоупругости, в поперечном поле, для которой выведено дисперсионное соотношение. Из него в упругом случае получается известное решение. Для малых толщины пластины и скорости Альфвена получено простое дисперсионное соотношение.

Затем изучается осредненная по толщине пластины задача в линейной и нелинейной постановке.

Получено также в пространственной и осредненной задаче дисперсионное уравнение в продольном магнитном поле. Изучены условия устойчивости нелинейных волн.

1. Пространственная линейная задача для поперечного поля. Пусть невозмущенное магнитное поле H_0 направлено по оси z, нормальной к пластинке, оси x и y выбраны в ее срединной плоскости, ось x совпадает с направлением распространения волны.

Обозначим через u_x, u_y, u_z компоненты перемещений по осям, через $\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ полное магнитное поле, причем для индуцированного магнитного поля $h_x = H_0 H_x'$, $h_y = H_0 H_y'$, $h_z = H_0 H_z'$. Хотя рассматривается трехмерная задача, но в силу изотропии волновых свойств пластины можно рассмотреть решение в переменных x, z и полагать для квазимонохроматической волны

$$u_x = \tfrac{1}{2} U_x(z) e^{i\tau} + k.c., \quad u_z = \tfrac{1}{2} U_z(z) e^{i\tau} + k.c$$
$$H_x' = \tfrac{1}{2} H_x(z) e^{i\tau} + k.c., \quad H_z' = \tfrac{1}{2} H_z(z) e^{i\tau} + k.c., \quad \tau = kx - \omega t \tag{1.1}$$

В окончательном уравнении дисперсии для трехмерной задачи следует заменять $\tau = \alpha x + \beta y - \omega t$, $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Уравнения движения и индукции магнитоупругой среды в линейной задаче имеют вид [1, 6]:

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{d^2U_x}{dz^2} - k^2U_x + \frac{\omega^2}{a^2}U_x + \zeta ik\frac{dU_z}{dz} = -\frac{a_1^2}{a^2}\left(\frac{dH_x}{dz} - ikH_z\right) \tag{1.2}$$

$$\zeta ik\frac{dU_x}{dz} + \frac{d^2U_z}{dz^2} - \frac{b^2}{a^2}k^2U_z + \frac{\omega^2}{a^2}U_z = 0 \tag{1.3}$$

$$-i\omega H_x + \frac{k^2}{\sigma\mu_0}H_x - \frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{d^2H_x}{dz^2} = -i\omega\frac{dU_x}{dz} \tag{1.4}$$

$$-i\omega H_z + \frac{k^2}{\sigma\mu_0}H_z - \frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{d^2H_z}{dz^2} = -\omega kU_x \tag{1.5}$$

где $a_1^2 = \mu_0 H_0^2/\rho$, $\zeta = 1 - b^2/a^2$, μ_0 – магнитная постоянная, σ – электропроводность, a и b – скорости продольных и поперечных упругих волн, ρ – плотность.

Разыскивая решения в виде [6]:

$$U_z = A_j \operatorname{ch}\nu_j z, \quad U_x = B_j \operatorname{sh}\nu_j z, \quad H_x = C_j \operatorname{ch}\nu_j z, \quad H_z = D_j \operatorname{sh}\nu_j z \tag{1.6}$$

где по повторяющимся индексам суммируется от 1 до 3, можно из (1.2)–(1.6) получить связь всех постоянных через $B_{1,2,3}$ в виде

$$C_{1,2,3} = -\frac{i\omega\nu_{1,2,3}B_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, \quad D_{1,2,3} = -\frac{\omega kB_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, \quad X_{1,2,3} = -i\omega + \frac{k^2}{\sigma\mu_0} - \frac{1}{\sigma\mu_0}\nu_{1,2,3}^2$$

$$\zeta ikB_{1,2,3}\nu_{1,2,3} + \left(\nu_{1,2,3}^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)A_{1,2,3} = 0 \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2}\nu_{1,2,3}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)B_{1,2,3} + \zeta ik\nu_{1,2,3}A_{1,2,3} = -\frac{a_1^2}{a^2}(C_{1,2,3}\nu_{1,2,3} - ikD_{1,2,3})$$

Равенство нулю определителя (1.7) дает уравнения для $\bar{\nu} = \nu_{1,2,3}$:

$$\frac{b^2}{a^2}\bar{\nu}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \zeta^2\frac{k^2\bar{\nu}^2}{\bar{\nu}^2 - b^2k^2/a^2 + \omega^2/a^2} = -\frac{a_1^2}{a^2}\frac{\bar{\nu}^2 - k^2}{1 + i(k^2 - \bar{\nu}^2)/(\omega\sigma\mu_0)} \tag{1.8}$$

Для $\sigma = \infty$ получатся два конечных значения $\bar{\nu}^2 = \nu_{1,2}^2$. А для больших, но конечных, σ прибавится третье значение $\bar{\nu}^2 = \nu_3^2$, которое для $\sigma\omega\mu_0 \gg 1$ будет

$$i\nu_3^2/(\omega\sigma\mu_0) = a_1^2/b^2 + 1 \tag{1.9}$$

Для получения дисперсионного уравнения в общей трехмерной постановке к (1.2)–(1.6) следует прибавить условия при $z = \pm h/2$ на границах пластины и диэлектрика $\sigma_z = \sigma_{xz} = 0$ и условия непрерывности **h** на границах пластины.

При этом вне пластины компоненты магнитного поля h_x, h_z ищутся в виде

$$h_x = \tfrac{1}{2}(C_1'e^{i\theta} + k.c.), \quad h_z = \tfrac{1}{2}(C_z'e^{i\theta} + k.c.), \quad \theta = i\tau \mp kz \tag{1.10}$$

Используя еще условие $\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0$ можно записать указанные граничные усло-

вия в виде

$$C_j \operatorname{ch} \nu_j \frac{h}{2} = -kC_j \nu_j^{-1} \operatorname{sh} \nu_j \frac{h}{2}, \quad B_j \nu_j \operatorname{ch} \nu_j \frac{h}{2} + ikA_j \operatorname{ch} \nu_j \frac{h}{2} = 0$$

$$A_j \nu_j \operatorname{sh} \nu_j \frac{h}{2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} ikB_j \operatorname{sh} \nu_j \frac{h}{2} = 0 \tag{1.11}$$

где по-прежнему суммирование производится по $j = 1, 2, 3$, причем в (1.11) следует подставить (1.7).

Детерминантное уравнение полученной системы дает

$$\begin{vmatrix} \left(1 + \frac{k}{\nu_1} \operatorname{th} \nu_1 \frac{h}{2}\right) \Big/ \chi_1 & \left(1 + \frac{k}{\nu_2} \operatorname{th} \nu_2 \frac{h}{2}\right) \Big/ \chi_2 & \left(1 + \frac{k}{\nu_3} \operatorname{th} \nu_3 \frac{h}{2}\right) \Big/ \chi_3 \\ 1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_3} k^2 \\ \operatorname{th} \nu_1 \frac{h}{2} \Gamma_1 \Big/ \nu_1 & \operatorname{th} \nu_2 \frac{h}{2} \Gamma_2 \Big/ \nu_2 & \operatorname{th} \nu_3 \frac{h}{2} \Gamma_3 \Big/ \nu_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.12}$$

$$\Delta_j = \nu_j^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \chi_j = 1 + i \frac{k^2 - \nu_j^2}{\omega \sigma \mu_0}, \quad \Gamma_j = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\zeta \nu_j^2}{\Delta_j} \tag{1.13}$$

В уравнение (1.12) следует подставить ν_j из (1.8).

Для конечных значений $\omega\sigma\mu_0/k^2$ получается весьма сложная система, которую аналитически можно исследовать лишь для малых a_1/b, $\omega\sigma\mu_0/k^2$.

В случае волн модуляции более интересны большие значения параметра $\omega\sigma\mu_0/k^2$, при которых (1.8) можно решить аналитически. При этом в силу (1.9) можно получить $\chi_3 = -a_1^2 / b^2$. Представляет интерес получить дисперсионное уравнение с учетом слагаемых с $\nu_{1,2}^2 h^2$. При этом для получения обозримых результатов следует считать a_1^2 / b^2 малым, что выполняется в реальных условиях, для которых значения $\nu_{1,2}^2$ все еще сложны. Кроме этого, предположим $a_1^2 / \omega^2 \ll 1$, для которых получаются простые соотношения.

Тогда (1.8) дает

$$\nu_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{a_1^2 k^2}{a^2} - \frac{a_1^4 k^4}{a^2 \omega^2 \zeta} - \frac{a_1^4 k^4}{\omega^2 a^2 \zeta} \tag{1.14}$$

$$\nu_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2} - \frac{a_1^2 k^2}{b^2} + \frac{a_1^2 \omega^2}{b^4} + \frac{a_1^4 k^4}{a^2 \omega^2 \zeta} \tag{1.15}$$

где первые слагаемые соответствуют упругому решению [6]. С учетом членов $\sim k^2 h^2$ для идеальной проводящей среды ($\nu_3 = \infty$) (1.12) можно записать в виде

$$-\frac{b^2}{a_1^2} \left(\frac{\operatorname{th} \nu_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{th} \nu_2 \frac{h}{2}} - N \frac{\nu_1}{\nu_2} \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2}{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2} \right) + \frac{\nu_1}{\nu_2} N \frac{1 + \frac{k}{\nu_1} \operatorname{th} \nu_1 \frac{h}{2}}{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2} - \frac{\operatorname{th} \nu_1 \frac{h}{2} 1 + \frac{k}{\nu_2} \operatorname{th} \nu_2 \frac{h}{2}}{\left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2\right) \operatorname{th} \nu_2 \frac{h}{2}} = 0 \tag{1.16}$$

$N = \Gamma_2 / \Gamma_1$

Для малых a_1, $\nu_{1,2} h$ можно с учетом (1.14), (1.15) разлагая (1.16) по степеням a_1, ω, k, h,

получить дисперсионное уравнение в виде

$$1+\frac{1}{12}\left(\frac{\omega^2}{a^2}-\frac{\omega^2}{b^2}+\frac{a_1^2}{a^2}k^2+\frac{a_1^2}{b^2}k^2\right)h^2-N\frac{1+\Pi_1^{-1}}{1+\Pi_2^{-1}}-\frac{a_1^2}{b^2}\frac{1}{1+\Pi_2^{-1}}(N-1)=0 \qquad (1.17)$$

$$\Pi_1=\frac{\Delta_1}{\zeta k^2}=1+\frac{a_1^3}{a^2\zeta}-\frac{a_1^4k^2}{a^2\omega^2\zeta^2}$$

$$\Pi_2=\frac{\Delta_2}{\zeta k^2}=1-\frac{\omega^2}{b^2k^2}-\frac{a_1^2}{\zeta b^2}+\frac{a_1^2\omega^2}{b^4\zeta k^2}+\frac{a_1^4k^2}{a^2\omega^2\zeta^2}$$

$$N-1=\frac{\omega^2}{2b^2k^2}+\frac{a_1^2}{2b^2\zeta}+\frac{a_1^2}{2a^2\zeta}+\frac{\omega^4}{4b^4k^4}+\frac{\omega^2a_1^2}{4b^2\zeta k^2}-\frac{a_1^4k^2}{a^2\omega^2\zeta^2}$$

Из (1.17) видно, что для малых kh и a_1 частота ω мала.

Можно показать, что члены порядка ω^2, a_1^2 в (1.17) сокращаются и дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2=\frac{h^2}{3}b^2k^4\zeta-\frac{2a_1^2b^2k^2}{a^2\zeta} \qquad (1.18)$$

Таким образом, получено уравнение для частоты в случае $\sigma=\infty$ и $a_1/\omega \ll 1$.

Обозначим значение ω^2 в (1.18) через $(\omega_1^0)^2$. Для получения мнимой части частоты при больших σ можно в (1.12) удерживать малые основного порядка.

Учитывая, что в основном порядке $\nu_{1,2}$ даются (1.14), (1.15) и при $\sigma \gg 1$ третий столбец в (1.12) имеет значения

$$-\frac{1+k/\nu_3}{\chi a_1^2}b^2,\quad 1-\frac{\zeta k^2}{\theta},\quad -\frac{b^2}{a^2\nu_3},\quad \theta=i\omega\sigma\mu_0,\qquad \chi=-\frac{\zeta k^2-\theta}{\theta}$$

можно вместо (1.16) получить уравнение

$$-\frac{b^2}{a_1^2\chi}\left(1+\frac{k}{\nu_3}\right)\left(\frac{\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}}{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}-N\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{1+\frac{\zeta}{\Delta_1}k^2}{1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2}\right)+$$

$$+\left(1-\frac{\zeta k^2}{\theta}\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}N-\frac{\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}}{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}\right)\frac{1}{1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2}+\frac{\frac{b^2}{a^2}}{\nu_3\Gamma_1}\left(\frac{\nu_1}{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}-\frac{1+\frac{\zeta}{\Delta_1}k^2}{1+\frac{\zeta}{\Delta_2}k^2}\frac{\nu_1}{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}\right)=0$$

Оставляя малые основного порядка, причем $\nu_3\approx\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}$, можно получить при наличии малой диссипации

$$\omega^2=\frac{h^2}{3}b^2k^4\zeta-\frac{2a_1^2k^2}{a^2\zeta}-a_1^2\chi\frac{2}{h}\frac{k^2}{\nu_3} \qquad (1.19)$$

Полагая $\omega=\omega_1^0+i\omega_2^0$, можно получить в основном порядке для $(\omega_1^0)^2$ уравнение (1.18), а для мнимой части будем иметь

$$\omega_2^0=-\frac{a_1^2k^2}{h\omega_1^0\sqrt{2\sigma\mu_0\omega_1^0}} \qquad (1.20)$$

Можно получить простое дисперсионное соотношение также для ограниченных σ и малых a_1.

Вместо (1.14), (1.15) получим

$$\nu_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{k^2 a_1^2}{a^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2\theta}\right) - \frac{a_1^4 k^4}{a^2\omega^2\zeta} \tag{1.21}$$

$$\nu_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2} - \frac{k^2 a_1^2}{b^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{b^2\theta}\right) + \frac{a_1^2\omega^2}{b^4} + \frac{a_1^4 k^4}{a^2\omega^2\zeta} \tag{1.22}$$

Тогда найдем соотношение

$$N\frac{1+\zeta k^2/\Delta_1}{1+\zeta k^2/\Delta_2} = 1 - \frac{\omega^4}{4b^4k^4} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4a^2b^2k^2\zeta} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^4k^2\zeta} \tag{1.23}$$

которое совпадает с рассмотренным выше значением в (1.17).

Окончательное дисперсионное соотношение согласно (1.12) в основном порядке имеет вид

$$\omega^2 = \frac{h^2}{3} b^2 k^4 \zeta - a_1^2 k^2 \frac{b^2 a^{-2} + 1}{\zeta} \tag{1.24}$$

2. Нелинейное дисперсионное уравнение в осредненной постановке. Для получения нелинейного дисперсионного уравнения при произвольных a_1/b и больших σ можно использовать осредненные уравнения изгиба пластин.

Для перемещений выбирается классический подход

$$u_z = u(x,y,t), \quad u_x = -z\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = \frac{1}{2}(Ae^{i\tau} + k.c.) \tag{2.1}$$

В случае конечной электропроводности получается нелинейное уравнение [5]:

$$D\left\{\Delta^2 u + D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3\right\} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Z \tag{2.2}$$

$$D_1 = \frac{4h^2}{45}\tilde{\nu}_1\gamma_2, \quad \tilde{\nu}_1 = \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

где компонента объемной силы за счет магнитного поля [1], осредненная по толщине пластины равна

$$Z = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{K_z + z\left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y}\right)\right\} dz$$

$$K_z = 0, \quad K_x = \frac{1}{\rho}\mu_0 H_0\left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right), \quad K_y = \frac{1}{\rho}\mu_0 H_0\left(\frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial y}\right)$$

Остальные обозначения общепринятые [7].

Для определения $h_{x,y,z}$ необходимо пользоваться уравнением индукции

$$\frac{\partial h_x}{\partial t} = -H_0\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta_0 h_x, \quad \frac{\partial h_y}{\partial t} = -H_0\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta_0 h_y$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = -H_0\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta_0 h_z \tag{2.3}$$

причем $\upsilon_{x,y,z} = \partial u_{x,y,z}/\partial t$, Δ_0 – трехмерный оператор Лапласа.

Для компонент магнитного поля в одномерной постановке согласно (2.1) получим

$$h_x = \tfrac{1}{2}(C + C'_{1,2}\,\mathrm{ch}\,\lambda_1 z)e^{i\tau} + k.c.$$

$$h_z = \tfrac{1}{2}(Gz + C'_3\,\mathrm{sh}\,\lambda_1 z)e^{i\tau} + k.c., \quad \lambda_1(k^2 - i\omega\sigma\mu_0)^{1/2} \tag{2.4}$$

Тогда получим

$$C = \frac{1}{\Lambda}k\omega H_0 A, \quad G = -\frac{i}{\Lambda}\omega k^2 H_0 A, \quad \Lambda = i\omega - \frac{1}{\sigma\mu_0}k^2 \tag{2.5}$$

Для определения $C'_{1,2,6}$, C'_3 надо использовать непрерывность магнитного поля при $z = \pm 0.5h$.

Окончательно дисперсионное уравнение имеет вид

$$Dk^4\left(1 + \frac{D_2}{4}k^4\,|A|^2\right) - \rho h\omega^2 =$$

$$= -i\mu_0 H_0^2 k^2\left(\frac{k^3h^3}{12} + 2\frac{\lambda_1^2 - k^2}{\lambda_1^3}\frac{\lambda_1\frac{h}{2}\mathrm{ch}\,\lambda\frac{h}{2} - \mathrm{sh}\,\lambda_1\frac{h}{2}}{\mathrm{ch}\,\lambda_1\frac{h}{2} + \frac{k}{\lambda_1\,\mathrm{sh}\,\lambda_1 h/2}}\right)\frac{\omega}{i\omega - \frac{k^2}{\sigma\mu_0}}$$

$$D_2 = D_1 e^{2\omega_2^0 t}$$

В случае больших σ и λ_1 можно считать $\mathrm{th}\,\lambda_1 h/2 \approx 1$ и полагая

$$\omega = \omega_1^0 + i\omega_2^0 + \partial\omega a^2/\partial a^2, \quad a = |A| \tag{2.7}$$

получим из (2.6):

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{1}{\rho h}(Dk^4 + \mu_0 H_0^2 k^2 h), \quad \omega_2^0 = -\frac{\mu_0 H_0^2 k^2}{\sqrt{2\sigma\mu_0}\,\rho h(\omega_1^0)^{3/2}} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial a^2} = D_3 + iD_4, \quad D_3 = \frac{DD_1 e^{2\omega_2^0 t}k^8}{8\rho h\omega_1^0}, \quad D_4 = -D_3\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} \tag{2.9}$$

Выражение $(\omega_1^0)^2$ совпадает с [2]. Сравнение (2.8) с (1.18) показывает, что осредненное решение ω_1^0 отличается от пространственного решения, а формула (2.8), дающая ω_2^0, совпадает с (1.20).

Таким образом, получены значения ω_1^0, ω_2^0 по трехмерной теории (1.18), (1.20) и по осредненной теории (2.7), (2.8), а также значение нелинейного коэффициента (2.9).

Подобное же исследование можно провести для получения линейного дисперсионного уравнения в случае продольного магнитного поля (H_0, 0, 0). В трехмерной постановке для больших σ и малых $a_1^2\omega^{-2}$ можно после длинных вычислений получить

$$\omega^2 = \frac{h^2b^2}{3}k^4\zeta + \frac{2a_1^2k}{h} - \frac{1}{\nu_3 h}\frac{2b^2k^2a_1^2}{a^2}$$

или

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{h^2b^2}{3}k^4\zeta + \frac{2a_1^2k}{h}, \quad \omega_2^0 = -\frac{k^2a_1^2}{h(\omega_1^0)^{3/2}\sqrt{2\sigma\mu_3}}$$

В осредненной постановке можно получить для $(\omega_1^0)^2$, ω_2^0 то же выражение (в противоположность случаю поперечного поля), совпадающее с [5] для ω_1^0 и не совпадающее с [5] для ω_2^0. Во всех этих вариантах последующая нелинейная теория модуляций проходит.

3. Устойчивость волн модуляции. Для исследования на устойчивость волн модуляции необходимо получить уравнение модуляции, используя подход нелинейного дисперсионного соотношения [8, 9].

В (2.16) полагаем

$$\omega \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \alpha \to -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad \beta \to -i\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.1}$$

и запишем решение в виде

$$u = \tfrac{1}{2}(\psi e^{i\tau_0} + \overline{\psi} e^{-i\overline{\tau}_0}), \quad \tau_0 = \alpha x - \omega^0(\alpha)t, \quad |\psi| = |A| \tag{3.2}$$

где черта обозначает комплексно-сопряженное значение.

Поскольку ось x направлена по нормали к невозмущенной волне, то считается $\beta \approx 0$, и в связи с этим поскольку $k = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ полагаем $k \approx \alpha + \beta^2/(2k)$ и $\omega^0 \approx \omega^0(\alpha) + (d\omega^0/dk)(\beta^2/(2k))$.

Используя формулу Лейбница дифференцирования произведения

$$\omega^0\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi e^{i\tau_0}) = \left\{\omega^0(\alpha)\psi - i\frac{d\omega^0}{dk}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{d^2\omega^0}{dk^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}e^{i\tau_0}$$

можно получить

$$i\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\frac{d\omega^0}{dk}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega^0}{dk^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{d\omega_0}{dk}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - (D_3 + iD_4)\psi|\psi|^2 = 0 \tag{3.3}$$

Полученное уравнение модуляций позволяет изучить случаи продольной и поперечной устойчивостей волн модуляции, в недиссипативном случае рассмотренные в [9].

В случае продольной устойчивости $\psi = \psi(x, t)$. Представляя $\psi = \Psi e^{i\varphi}$, где Ψ и φ уже действительные, можно получить как и в [5] систему относительно Ψ и φ. Поступая как в [5], сообщив невозмущенному движению малые возмущения с эйконалом $Kx - \Omega t$ и полагая $\exp(2\omega_2^0 t) \approx 1$, что выполняется при $|\omega_2^0| \leqslant \tfrac{3}{4} D_4 |\Psi_0^2|$, т.е. для больших k или высокочастотных волн, можно получить характеристическое уравнение для волн модуляции:

$$-i\Omega + iK\frac{d\omega_1^0}{dk} = \frac{3}{2}D_4\Psi_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}D_4\Psi_0^2\right)^2 - \Delta_0'} \tag{3.4}$$

$$\Delta_0' = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2}K^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1^0}{dk^2}K^2 + 2D_3\Psi_0^2\right) \tag{3.5}$$

где Ψ_0 – начальная амплитуда.

Условие модуляционной устойчивости имеет вид

$$\Omega = \Omega' + i\Omega'', \quad \Omega'' \leqslant 0 \tag{3.6}$$

Для идеально проводящей среды $\sigma = \infty$, $D_4 = 0$, условие (3.6) имеет место при $\Delta_0' \geqslant 0$.

При наличии диссипации в случае $\gamma_2 < 0$, т.е. для нелинейности типа металлов, ре-

шение также устойчиво, а для $\gamma_2 > 0$, или нелинейности типа жидкости, неустойчиво. В случае $\Delta_0' < 0$ имеет место неустойчивость обоих решений.

При обсуждении поперечной устойчивости полагается $\psi = \psi(y, t)$ и ход рассуждений подобен предыдущему с такими же выводами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физ.-мат. литература, 1996. 286 с.
3. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: НАН Армении, 1992. 124 с.
4. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Нелинейные колебания пластин в продольном магнитном поле // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1982. Т. 35. № 1. С. 16–22.
5. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С. 25–30.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
8. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
9. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.

Ереван

Поступила в редакцию
20.01.2000