

УДК 539.3

© 2001 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, М. БАХ, Д.А. ПОЖАРСКИЙ

**К ТРЕХМЕРНЫМ КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ С ТРЕНИЕМ  
 ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА**

Приводятся формулы, позволяющие рассчитать полностью вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерном упругом клине, на одной грани которого действует нормальная и касательная (перпендикулярно ребру) нагрузка, а другая грань находится в условиях жесткой или скользящей заделки. Соответствующие краевые задачи ранее [1] были сведены к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. В [2] даны аналогичные формулы для свободной от напряжений грани клина. На основе полученных решений рассматриваются (в квазистатической постановке) контактные задачи о движении штампа по грани упругого клина в направлении, перпендикулярном ребру клина. Штамп сильно вытянутый вдоль ребра эллиптический параболоид, поэтому можно приближенно считать, что силы трения коллинеарны направлению движения. Исследуется влияние коэффициента трения Кулона и угла клина на распределение контактного давления, зависимость между вдавливающей силой и осадкой штампа, а также на форму поверхности (нормальное перемещение) вокруг области контакта. Для этого используется метод Галанова – Ньютона (нелинейных граничных интегральных уравнений) [3, 4], применявшийся в [2] для решения аналогичной контактной задачи для случая свободной от напряжений грани клина. Трехмерная контактная задача с трением для полупространства в схожей постановке исследовалась [5] при помощи метода последовательных приближений. Здесь, как частный случай клина, рассмотрена симметричная контактная задача с трением для двух штампов на полупространстве, соответствующая четвертьпространству при скользящей заделке (контактная задача для клина при скользящей заделке эквивалентна симметричной контактной задаче для двух штампов на разных гранях клина с вдвое большим углом раствора).

**1. Краевые задачи для клина.** В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  рассмотрим трехмерный упругий клин  $\{0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \alpha, |z| < \infty\}$  с упругими характеристиками  $G$  (модуль сдвига) и  $\nu$  (коэффициент Пуассона). Ось  $z$  направим по ребру клина так, чтобы система координат была правой. Пусть на грани  $\varphi = \alpha$  действует нормальная нагрузка интенсивности  $q(r, z)$ , распределенная по конечной области  $\Omega$ , и касательная нагрузка, перпендикулярная ребру клина, распределенная в той же области и пропорциональная нормальной с коэффициентом пропорциональности  $\mu$ . Грань  $\varphi = 0$  либо жестко закреплена (задача 1), или лежит без трения на недеформируемом основании (скользящая заделка, задача 2). Граничные условия запишем в виде

$$\varphi = \alpha: \sigma_\varphi = -q(r, z), \tau_{r\varphi} = -\mu q(r, z) \quad (r, z) \in \Omega$$

$$\sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r, z) \notin \Omega; \tau_{\varphi z} = 0 \tag{1.1}$$

$$\varphi = 0: (1) \ u_r = u_\varphi = u_z = 0; (2) \ u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$$

Кроме того, на бесконечности напряжения в клине исчезают. Выразим перемещения в цилиндрических координатах через три гармонические функции Папковича – Нейбера  $\Phi_n = \Phi_n(r, \varphi, z)$  ( $n = 0, 1, 2$ ) по формулам (1.2) [2], а напряжения затем – при помощи закона Гука.

Решение краевых задач (1.1) представим суперпозицией четных и нечетных по  $z$  решений, рассматривая сонаправленные и противоположные нагрузки на грани  $\varphi = \alpha$ . Гармонические функции  $\Phi_n$  будем разыскивать в форме  $\sin$ - или  $\cos$ -интеграла Фурье по  $z$  и комплексного интеграла Конторовича – Лебедева [1]. Применяя известную технику [6], решение задач (1.1) найдем в виде (1.2) [2], где (переходим к вещественным интегралам Конторовича – Лебедева, содержащим вещественную модифицированную функцию Бесселя  $K_{it}(r)$  ( $n = 0, 1, 2$ )):

$$\Phi_n(r, \varphi, z) = -\frac{1}{\pi^3} \int_{\Omega} \frac{q(x, y)}{G} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi\tau) [A_n(\tau, \beta x) \text{ch}(\varphi\tau) + B_n(\tau, \beta x) \text{sh}(\varphi\tau)] K_{it}(\beta r) \cos(\beta(z-y)) d\tau d\beta d\Omega \quad (1.2)$$

Для краевой задачи 1 имеем

$$A_0(\tau, \beta x) = 0, \quad A_2(\tau, \beta x) = 0$$

$$B_0(\tau, \beta x) = -\frac{2(1-2\nu)}{\beta \text{ch}(\alpha\tau)} \int_0^{\infty} \frac{W_1(u, \alpha) \Psi_1(u, \beta x) \text{sh}(\pi u/2) du}{\text{ch}(\pi u) + \text{ch}(\pi\tau)}$$

$$A_1(\tau, \beta x) = \tau S_1(\tau, \alpha) C_1(\tau, \beta x) - T_1(\tau, \alpha) C_1^*(\tau, \beta x) + 2\mu\tau K_{it}(\beta x) [\tau(1-2\nu)^{-1} S_1(\tau, \alpha) - R_2(\tau, \alpha)]$$

$$B_1(\tau, \beta x) = -[\kappa R_1(\tau, \alpha) + \tau S_2(\tau, \alpha)] C_1(\tau, \beta x) + T_2(\tau, \alpha) C_1^*(\tau, \beta x) - 2\mu(1-2\nu)^{-1} K_{it}(\beta x) [2(1-\nu)\tau R_1(\tau, \alpha) + (\kappa(1-2\nu) + \tau^2) S_2(\tau, \alpha)]$$

$$B_2(\tau, \beta x) = -\kappa S_1(\tau, \alpha) C_1(\tau, \beta x) + T_3(\tau, \alpha) C_1^*(\tau, \beta x) - 2\mu\kappa K_{it}(\beta x) [\tau(1-2\nu)^{-1} S_1(\tau, \alpha) - R_2(\tau, \alpha)], \quad \kappa = 3-4\nu \quad (1.3)$$

$$C_1(\tau, \beta x) = 4(1-\nu) \frac{W_1(\tau, \alpha)}{\text{ch}(\pi\tau/2)} \Psi_1(\tau, \beta x), \quad \Psi_1(\tau, \beta x) = \Psi_1^*(\tau, \beta x) + F_1(\tau, \beta x)$$

$$C_1^*(\tau, \beta x) = (1-2\nu) \left[ R_3(\tau, \alpha) C_1(\tau, \beta x) + S_3(\tau, \alpha) \int_0^{\infty} \frac{C_1(u, \beta x) \text{sh}(\pi u) du}{\text{ch}(\pi u) - \text{ch}(\pi\tau)} \right]$$

$$R_1(\tau, \alpha) = \frac{2 \cos \alpha \text{ch}(\alpha\tau)}{h(\tau, \alpha)}, \quad S_1(\tau, \alpha) = \frac{2 \sin \alpha \text{ch}(\alpha\tau)}{h(\tau, \alpha)}$$

$$R_2(\tau, \alpha) = \frac{2 \cos \alpha \text{sh}(\alpha\tau)}{h(\tau, \alpha)}, \quad S_2(\tau, \alpha) = \frac{2 \sin \alpha \text{sh}(\alpha\tau)}{h(\tau, \alpha)}$$

$$R_3(\tau, \alpha) = \frac{2 \cos \alpha \text{ch}(\alpha\tau)}{\text{ch}(2\alpha\tau) + \cos(2\alpha)}, \quad S_3(\tau, \alpha) = \frac{2 \sin \alpha \text{sh}(\alpha\tau)}{\text{ch}(2\alpha\tau) + \cos(2\alpha)}$$

$$h(\tau, \alpha) = \kappa \text{sh}(2\alpha\tau) - \tau \sin(2\alpha)$$

$$T_1(\tau, \alpha) = \frac{\text{sh}(2\alpha\tau)}{h(\tau, \alpha)}, \quad T_2(\tau, \alpha) = \frac{\text{ch}(2\alpha\tau) + \cos(2\alpha)}{h(\tau, \alpha)}, \quad T_3(\tau, \alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{h(\tau, \alpha)}$$

$$W_1(\tau, \alpha) = \frac{2h(\tau, \alpha)}{2\kappa \text{ch}(2\alpha\tau) + 2\tau^2 - 2\tau^2 \cos(2\alpha) + \kappa^2 + 1}$$

Для краевой задачи 2 имеем

$$A_1(\tau, \beta x) = 0, \quad B_0(\tau, \beta x) = 0, \quad B_2(\tau, \beta x) = 0$$

$$A_0(\tau, \beta x) = -\frac{2(1-2\nu)}{\beta \operatorname{sh}(\alpha\tau)} \int_0^\infty \frac{W_2(u, \alpha) \Psi_2(u, \beta x) \operatorname{sh}(\pi u / 2) du}{\operatorname{ch}(\pi u) + \operatorname{ch}(\pi\tau)}$$

$$B_1(\tau, \beta x) = R_4(\tau, \alpha) C_2(\tau, \beta x) - 2\mu K_{it}(\beta x) \left[ \frac{\tau R_4(\tau, \alpha)}{1-2\nu} + S_4(\tau) \right]$$

$$A_2(\tau, \beta) = S_4(\tau, \alpha) C_2(\tau, \beta x) - 2\mu K_{it}(\beta x) \left[ \frac{\tau S_4(\tau, \alpha)}{1-2\nu} - R_4(\tau) \right] \quad (1.4)$$

$$C_2(\tau, \beta x) = -4(1-\nu) \frac{W_2(\tau, \alpha)}{\operatorname{ch}(\pi\tau/2)} \Psi_2(\tau, \beta x), \quad \Psi_2(\tau, \beta x) = \Psi_2^*(\tau, \beta x) + F_2(\tau, \beta x)$$

$$R_4(\tau, \alpha) = \frac{2 \cos \alpha \operatorname{sh}(\alpha\tau)}{\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - \cos(2\alpha)}, \quad S_4(\tau, \alpha) = \frac{2 \sin \alpha \operatorname{ch}(\alpha\tau)}{\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - \cos(2\alpha)}$$

$$W_2(u, \alpha) = \frac{\operatorname{ch}(2\alpha u) - \cos(2\alpha)}{\operatorname{sh}(2\alpha u) + u \sin(2\alpha)}$$

Возникающие в формулах (1.3), (1.4) функции  $\Psi_m^*(\tau, \beta x)$  ( $m=1,2$ ) находятся из интегральных уравнений Фредгольма второго рода ( $0 \leq \tau < \infty$  при фиксированном значении  $\beta x$ ):

$$\Psi_m^*(\tau, \beta x) = (1-2\nu) \int_0^\infty L_m(\tau, u) [\Psi_m^*(u, \beta x) + F_m(u, \beta x)] du \quad (1.5)$$

$$L_m(\tau, u) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W_m(u, \alpha) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\pi t) g_m(t, \alpha) dt}{[\operatorname{ch}(\pi t) + \operatorname{ch}(\pi\tau)][\operatorname{ch}(\pi t) + \operatorname{ch}(\pi u)]}$$

$$F_m(\tau, \beta x) = \left[ 1 - \frac{\mu f_m(\tau, \alpha)}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \right] \operatorname{ch} \left( \frac{\pi\tau}{2} \right) K_{it}(\beta x) +$$

$$+ \frac{\mu}{2(1-\nu)} \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \int_0^\infty h_m(t, \alpha) K_{it}(\beta x) \frac{\operatorname{sh}(\pi t) dt}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi\tau)}$$

где для задачи 1 ( $m=1$ ):

$$f_1(\tau, \alpha) = \frac{\tau}{W_1(\tau, \alpha)} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)\tau \sin^2 \alpha}{h(\tau, \alpha)}$$

$$h_1(\tau, \alpha) = \frac{\kappa(1-2\nu)(\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - 1) - 2\tau^2 \sin^2 \alpha}{h(\tau, \alpha)}$$

$$g_1(\tau, \alpha) = -\frac{\sin^2(2\alpha) \operatorname{th}(\alpha\tau)}{\operatorname{ch}(2\alpha\tau) + \cos(4\alpha)} + \{ \sin^2 \alpha [g_3(\tau)(2g_4(\tau) - \tau g_5(\tau)) -$$

$$- g_6(\tau)(2g_5(\tau) + \tau g_4(\tau))] - 2(1-\nu) \sin \alpha [g_3(\tau)(\sin(3\alpha) - \sin \alpha \operatorname{ch}(2\alpha\tau)) -$$

$$- g_6(\tau) \cos \alpha \operatorname{sh}(2\alpha\tau)] \} / g_7(\tau) \quad (1.6)$$

$$g_3(\tau) = \kappa \operatorname{sh}(2\alpha\tau) \cos(2\alpha) - \tau \sin(2\alpha), \quad g_4(\tau) = \cos(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) - \operatorname{ch}(2\alpha\tau)$$

$$g_5(\tau) = \sin(2\alpha) \operatorname{th}(\alpha\tau) [1 + \cos(2\alpha)], \quad g_6(\tau) = [\kappa \operatorname{ch}(2\alpha\tau) - 1] \sin(2\alpha)$$

$$g_7(\tau) = [g_3^2(\tau) + g_6^2(\tau)] [\operatorname{sh}^2(\alpha\tau) + \cos^2(2\alpha)]$$

а для задачи 2 ( $m = 2$ ):

$$\begin{aligned}
 f_2(\tau, \alpha) &= \frac{\tau}{W_2(\tau, \alpha)} + \frac{2(1-\nu)(1-2\nu)\sin^2 \alpha}{\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - \cos(2\alpha)} \\
 h_2(\tau, \alpha) &= \frac{\kappa(1-2\nu)\operatorname{sh}(2\alpha\tau) - \tau \sin(2\alpha)}{\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - \cos(2\alpha)} \\
 g_2(\tau, \alpha) &= \frac{\sin^2(2\alpha)\operatorname{cth}(\alpha\tau)}{\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - \cos(2\alpha)}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Анализ интегральных уравнений Фредгольма (1.5) проведен в [1, 6]. Для их численного решения используем метод коллокации по гауссовским узлам. Сингулярные интегралы в выражении для функций  $F_m(\tau, \beta x)$  ( $m = 1, 2$ ) рассчитываются также, как аналогичные интегралы в [2]. Можно проверить, что интегралы в формуле (1.2) сходятся при всех  $\varphi \in [0, \alpha]$ .

На основе решений (1.2)–(1.7) и формул (1.2) [2] найдем нормальное перемещение на грани  $\varphi = \alpha$  в виде

$$u_\varphi(r, \alpha, z) = -\frac{4}{\pi^3} \int_{\Omega} \frac{q(x, y)}{\theta} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W(u, \alpha, \beta x) K_{iu}(\beta r) \cos(\beta(z-y)) dt d\beta d\Omega \tag{1.8}$$

$$W(u, \alpha, \beta x) = W_m(u, \alpha) \Psi_m^*(u, \beta x) + \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} K_{iu}(\beta x) [W_m(u, \alpha) - \mu f_m^*(u, \alpha)] +$$

$$+ \frac{\mu}{2(1-\nu)} \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} W_m(u, \alpha) \int_0^\infty \frac{h_m(t, \alpha) K_{it}(\beta x) \operatorname{sh}(\pi t)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} dt$$

$$f_m^*(u, \alpha) = \frac{W_m(u, \alpha) f_m(u, \alpha) - u}{2(1-\nu)(1-2\nu)}, \quad \theta = \frac{C}{1-\nu}$$

Здесь и ниже  $m = 1$  отвечает задаче 1, а  $m = 2$  – задаче 2. В силу выбора системы координат  $u_\varphi < 0$ .

Расчеты по формулам (1.8) при конкретизации нагрузки  $q(r, z)$  показывают, что для задачи 1 зависимость  $-u_\varphi$  от  $\alpha$  монотонная: чем меньше угол клина, тем меньше  $-u_\varphi$ . Монотонной является соответствующая зависимость и для клина, грань  $\varphi = 0$  которого свободна от напряжений [2]: чем меньше угол клина, тем больше  $-u_\varphi$ . Для задачи 2 зависимость  $-u_\varphi$  от  $\alpha$  не является монотонной. Например, для сосредоточенной нагрузки  $q(r, z) = P\delta(r-x)\delta(z)$ , где  $\delta(r)$  – функция Дирака, при  $\nu = 1/2$  и  $\mu = 0$  формула (1.8) для задачи 2 принимает вид

$$u_\varphi(r, \alpha, z) = -\frac{P}{\pi^3 G} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) W_2(u, \alpha) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \cos(\beta z) dt d\beta \tag{1.9}$$

Поскольку

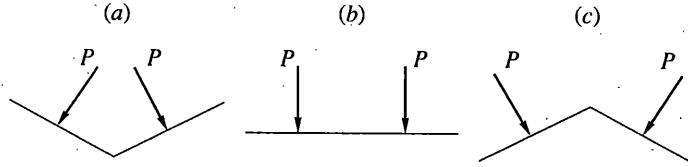
$$\frac{d}{d\alpha} W_2(u, \alpha) = \frac{2 \sin(2\alpha)(1+u^2) \operatorname{sh}(2\alpha u)}{[\operatorname{sh}(2\alpha u) + u \sin(2\alpha)]^2} \tag{1.10}$$

критическими точками служат точки  $\alpha = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Исследование на экстремум показывает, что в точках  $\alpha = \pi/2$  и  $\alpha = 3\pi/2$  перемещение  $-u_\varphi$  имеет локальные максимумы при фиксированных  $r$  и  $z$ , а в точке  $\alpha = \pi$  – локальный минимум; абсолютный максимум на отрезке  $\alpha \in [0, 2\pi]$  достигается при  $\alpha = \pi/2$ . Этот максимум больше, чем соответствующее значение в задаче 1, но вблизи ребра примерно на 20% меньше, чем в задаче для клина со свободной от напряжений гранью [6, с. 159] при тех

же значениях параметров. Наиболее простой вид формула (1.9) принимает при  $r = z = 0$ :

$$u_{\varphi}(0, \alpha, 0) = -\frac{P}{Gx} \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2\alpha + \sin(2\alpha)}, \quad u_{\varphi}(0, \pi/2, 0) = -\frac{2P}{\pi Gx} \quad (1.11)$$

При выводе (1.11) использованы равенство  $K_{iu}(0) = \pi\delta(u)$  и формула 2.16.2.1 из [7]. Заметим, что задача 2 эквивалентна симметричной задаче об одинаковых нагрузках, приложенных к обеим граням клина вдвое больше угла раствора. Экстремальное значение  $-u_{\varphi}$  при  $\alpha = \pi/2$  в задаче 2 иллюстрируется на фиг. 1: наибольшим будет перемещение в случае *b*.



Фиг. 1

Для упругого четвертьпространства при скользящей заделке и  $q(r, z) = P\delta(r-x)\delta(z-y)$  все интегралы в выражении (1.8) для  $u_{\varphi}$  удастся точно вычислить, используя те же формулы, что и при вычислении интегралов (1.6) в [2]. В итоге получаем

$$u_{\varphi}(r, \pi/2, z) = -\frac{1}{2\pi\theta} \left[ \frac{1}{R_-} + \frac{1}{R_+} + \frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \left( \frac{x-r}{R_-^2} + \frac{x+r}{R_+^2} \right) \right] \quad (1.12)$$

$$R_{\pm} = [(r \pm x)^2 + (z-y)^2]$$

что совпадает с известными решениями Буссинеска и Черрути [8] при симметричном нагружении упругого полупространства.

**2. Контактные задачи для клина.** Рассмотрим квазистатические контактные задачи 1 (жесткая заделка одной грани) и 2 (скользящая заделка одной грани), когда жесткий штамп, первоначально внедренный в грань упругого клина, начинает достаточно медленно двигаться вдоль этой грани (без перекоса) в направлении, перпендикулярном ребру клина. У штампу приложена нормальная сила  $P$  и касательная сила  $\mu P$ . Штамп – сильно вытянутый вдоль ребра эллиптический параболоид, поэтому можно приближенно считать, что силы трения коллинеарны направлению движения (и направлены против движения). Задачи симметричны по координате  $z$ .

Используем полученные выше решения краевых задач (1.1). Удовлетворяя граничному условию контакта тел  $u_{\varphi}(r, \alpha, z) = -[\delta - f(r, z)]$  ( $(r, z) \in \Omega$ ), где  $\delta$  – осадка штампа,  $f(r, z) = (r-a)^2/(2R_1) + z^2/(2R_2)$  – форма основания штампа ( $R_1 \ll R_2$ ), относительно неизвестного нормального контактного давления  $\sigma_{\varphi}(r, \alpha/2, z) = -q(r, z)$  в неизвестной области контакта  $(r, z) \in \Omega$  получим интегральное уравнение (см. формулу (1.8)):

$$\int_{\Omega} q(x, y) K(x, y, r, z) d\Omega_{xy} = g(r, z), \quad g(r, z) = 2\pi\theta[\delta - f(r, z)] \quad (2.1)$$

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R_-} - \mu \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{r-x}{R_-^2} + K_*(x, y, r, z)$$

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W_*(u, \alpha, \beta x) K_{iu}(\beta r) \cos(\beta(z-y)) d\beta du$$

$$W_*(u, \alpha, \beta x) = 2W_m(u, \alpha) \Psi_m^*(u, \beta x) + 2 \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} K'_{iu}(\beta x) \times$$

$$\times [W_m(u, \alpha) - \operatorname{cth}(\pi u) - \mu f_m^*(u, \alpha)] + \frac{\mu}{2(1-\nu)} \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \left\{ 2W_m(u)h_m(t) - \right. \\ \left. -(1-2\nu) \left[ \operatorname{cth} \frac{\pi u}{2} \operatorname{th} \frac{\pi t}{2} + \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2} \right] \right\} \frac{K_{it}(\beta x) \operatorname{sh}(\pi t)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} dt$$

Для улучшения сходимости интегралов в ядре интегрального уравнения (2.1) при помощи формул (1.6) из [2] явно выделена особая часть, соответствующая упругому полупространству [5] (частному случаю клина со свободной от напряжений гранью). Когда коэффициент трения Кулона  $\mu > 0$ , штамп начинает двигаться от ребра клина, при  $\mu < 0$  — к ребру.

Для решения интегрального уравнения (2.1) при условии  $q(r, z) = 0$ ,  $(r, z) \in \partial\Omega$ , применим метод нелинейных граничных интегральных уравнений [2–4], позволяющий одновременно определить нормальное контактное давление, область контакта, а также форму упругой поверхности (нормальное перемещение) вокруг области контакта. Можно показать, что при реальных значениях коэффициента трения ( $|\mu| \leq 0,2$ ) интегральный оператор, порожденный ядром уравнения (2.1) строго положителен и вполне непрерывен. Поэтому известные результаты [3, 4], касающиеся существования, единственности и метода построения решения целиком переносятся на случай уравнения (2.1).

Интегральное уравнение (2.1) эквивалентно нелинейному интегральному уравнению в прямоугольнике  $S$ , априори содержащем область контакта  $\Omega$  (см. (1.4) [4]):

$$Tv = 0, \quad (r, z) \in S, \quad Tv \equiv v^- + Kv^+ - g \quad (2.2)$$

$$v = v(r, z), \quad v^+ = \sup\{v, 0\}, \quad v^- = \inf\{v, 0\}, \quad g = g(r, z)$$

$$Kv^+ = \int_S K(x, y, r, z) v^+(x, y) dS_{xy} \quad (2.3)$$

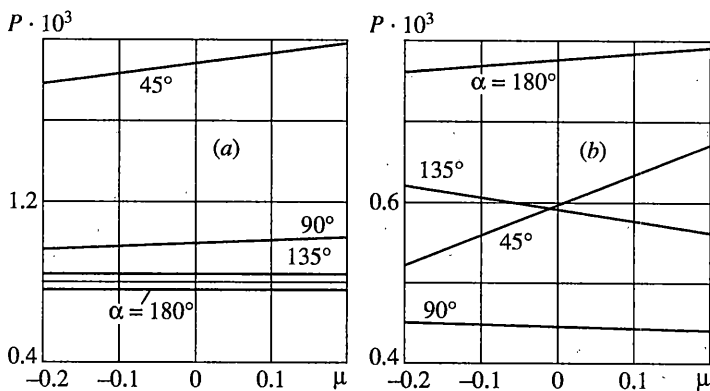
Нелинейное уравнение (2.2) решается модифицированным методом Ньютона. В силу симметрии рассматривается лишь верхняя половина прямоугольника  $S$ , которая покрывается равномерной сеткой из  $N_1 \times N_2 = N$  узлов, где  $N_1$  и  $N_2$  — количество узлов по осям  $r$  и  $z$  соответственно. В тех узлах, где функция  $v$  положительна, она равна контактному давлению, и этим определяется область контакта. В остальных узлах прямоугольной сетки имеем  $v \leq 0$  и можно найти нормальное перемещение клина (форму упругой поверхности) по формуле

$$2\pi\theta u_\varphi(r, \alpha, z) = v(r, z) - g(r, z) \quad (2.4)$$

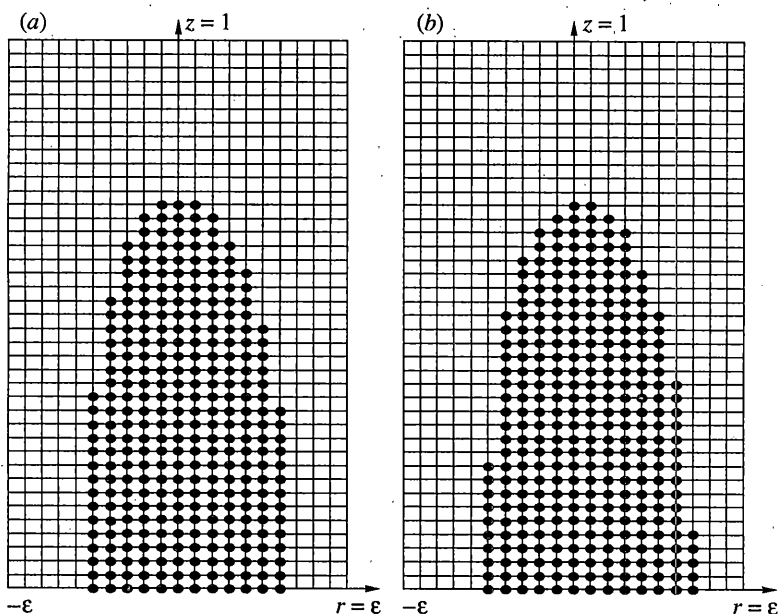
Далее используются безразмерные обозначения (2.1) [4] с заменой  $\theta$  на  $\theta^{-1}$  (штрихи опускаются). Расчеты проводились при  $A = 0,1$ ,  $B = 0,005$ ,  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\nu = 0,3$  ( $\gamma = 0$ ). Приемлемую точность дает уже 81 узел ( $N_1 = N_2 = 9$ ). Например, для задачи Герца для полупространства при указанных выше значениях параметров и  $\delta = 0,004$  численное значение силы  $P \cdot 10^3 = 0,583$ , а теоретическое значение  $P \cdot 10^3 = 0,601$ . При 225 узлах ( $N_1 = N_2 = 15$ ) имеем  $P \cdot 10^3 = 0,592$ . Еще более точное численное значение  $P \cdot 10^3 = 0,602$  получается при 861 узле ( $N_1 = 21$ ,  $N_2 = 41$ ), при этом также точнее считается контактное давление и нормальное перемещение вне области контакта. Численный анализ показывает, что сила  $P$  (при фиксированной осадке) и осадка  $\delta$  (при фиксированной силе) "почти" линейно зависят от коэффициента трения  $\mu$ . Для силы это можно объяснить следующим образом. Интегральное уравнение (2.1) можно записать еще в операторной форме

$$(A_* - \varepsilon_* B_*) q(x, y) = g(r, z), \quad \varepsilon_* = \mu(1-2\nu)/(2-2\nu) \quad (2.5)$$

При достаточно малых  $\varepsilon_*$  решение уравнения (2.5) можно искать в виде ряда по



Фиг. 2

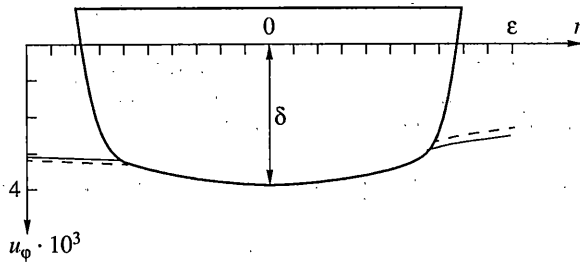


Фиг. 3

степеням этого параметра [5]. Отбрасывая члены порядка  $\varepsilon_*^2$  (при  $\mu = 0.2$  и  $\nu = 0.3$  имеем  $\varepsilon_*^2 \approx 0.003$ ) и интегрируя по области контакта, получим

$$P(\mu) = P_0(\delta) + P_1(\delta)\mu + O(\mu^2) \quad (2.6)$$

Графики  $P(\mu)$  показаны на фиг. 2, *a* (контактная задача 1) и фиг. 2, *b* (контактная задача 2) для разных углов клина при  $\lambda = 0.25$  (вблизи ребра). Чем острее угол клина, тем больше угол наклона прямой  $P(\mu)$  и само значение силы в контактной задаче 1. В контактной задаче 2 сила минимальна при  $\alpha = 90^\circ$  (легче вдавить два штампа на заданную величину для упругого полупространства); аналогично при заданной силе максимальная осадка штампа также имеет место при  $\alpha = 90^\circ$ . Причина этого – в экстремуме нормального перемещения для краевой задачи 2. Заметим, что в контактной задаче 2 сила  $P$  может как убывать, так и возрастать с ростом  $\mu$ , в зависимости от угла клина.



Фиг. 4

Трение существенно влияет на эксцентриситет нормальной силы (и на момент), обеспечивающий движение штампа без перекоса. Вдали от ребра контактное давление больше на той стороне области контакта, куда движется штамп. Вблизи ребра упругого четвертьпространства для контактной задачи 1 давление больше на ближней к ребру стороне области контакта, причем площадь этой части области возрастает; для контактной задачи 2 при тех же условиях, наоборот, давление меньше на ближней к ребру половине области контакта. Верхние половины прямоугольника  $S$  (861 узел) для контактной задачи 2 при  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\lambda = \epsilon = 0.15$  и  $\delta = 0.004$  показаны на фиг. 3, *a* ( $\mu = -0.2$ ) и фиг. 3, *b* ( $\mu = 0.2$ ). Темными точками отмечены узлы в области контакта. Левая (жирная) сторона прямоугольника совпадает с ребром клина или с осью симметрии эквивалентной симметричной задачи для двух штампов на полупространстве. Ось  $z$  теперь сдвинута на  $a$  вправо и проходит через точку первоначального контакта (см. (2.1) [4]). Когда два штампа на полупространстве удаляются друг от друга и от оси симметрии, область контакта немного смещается в сторону движения (фиг. 3, *b*)

Вдали от ребра клина упругая поверхность впереди движущегося штампа выше, чем позади. Вблизи ребра клина для контактной задачи 1 упругая поверхность между ребром и областью контакта выше, чем с противоположной стороны от области контакта. Отнесенное к большей полудлине размерного прямоугольника  $S$  нормальное перемещение  $u_n$  на оси  $r$  слева и справа от области контакта для задачи 2 при  $N = 861$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\lambda = \epsilon = 0.15$  и  $\delta = 0.004$  показано на фиг. 4 сплошной линией для  $\mu = -0.2$  и штриховой для  $\mu = 0.2$ . Ось  $u_n$  совпадает с ребром клина или осью симметрии эквивалентной задачи для двух штампов. Независимо от  $\mu$  упругая поверхность ниже между двумя близко расположенными штампами на полупространстве. Трение здесь оказывает лишь вторичное влияние по сравнению с влиянием расстояния между штампами (значением  $\lambda$ ): если штампы удаляются друг от друга ( $\mu = 0.2$ ), то поверхность между ними будет еще более низкой.

Работа поддержана Федеральной целевой программой "Интеграция", грантом РФФИ (99-15-96012), Фондом Гумбольдта и грантом DEG-SEB 404 (Германия).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–62.
2. Пожарский Д.А. О трехмерной контактной задаче для упругого клина при учете сил трения // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 151–159.
3. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
4. Пожарский Д.А. О пространственной контактной задаче для упругого клина с неизвестной областью контакта // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 812–818.



5. Галин Л.А., Горячева И.Г. Пространственная контактная задача о движении штампа с трением // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1016–1022.
6. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
8. Hahn H.G. Elastizitätstheorie. Stuttgart: Teubner, 1985. = Хан Х.Г. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.

Москва, Штутгарт

Поступила в редакцию  
3.05.2001