МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001

Механико-будущих инженеров

УДК 539.3

© 2001 г. Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ТЕНЗОРНО НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Краевая задача устойчивости процесса деформирования в произвольной тензорно нелинейной изотропной среде замыкается линеаризованной связью между приращениями девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций. Показывается, что эта связь имеет вид, аналогичный определяющим соотношениям тензорно линейного, но анизотропного материала, причем тип анизотропии определяется кинематикой невозмущенного процесса. Вид связи конкретизируется для квазилинейных материалов и тела Шведова–Бингама–Ильюшина, а также в случаях, если невозмущенный процесс представляет собой одномерный сдвиг либо плоское растяжение–сжатие.

1. Рассмотрим несжимаемую изотропную сплошную среду с тензорными (векторными) определяющими соотношениями

$$s_{ij} = A_1(\upsilon_e, I_{\upsilon 3})\upsilon_{ij} + A_2(\upsilon_e, I_{\upsilon 3})\,(\upsilon_{ik}\upsilon_{kj} - \tfrac{1}{3}\upsilon_e^2\delta_{ij}) \tag{1.1}$$

где s_{ij} и υ_{ij} – компоненты в ортогональной декартовой системе координат девиатора напряжений и девиатора скоростей деформаций; A_1 и A_2 – материальные функции, зависящие от инвариантов $\upsilon_e = (\upsilon_{ij}\upsilon_{ij})^{1/2}$ – интенсивности скоростей деформаций и $I_{\upsilon 3} = (\upsilon_{ij}\upsilon_{jk}\upsilon_{ki})^{1/3}$ – кубического инварианта.

Как известно [1], соотношения (1.1) описывают наиболее общую нелинейную изотропную функцию в трехмерном пространстве, связывающую два симметричных девиатора второго ранга. Обратная к ней тензор-функция имеет вид

$$\upsilon_{ij} = B_1(\sigma_e, I_{s3})s_{ij} + B_2(\sigma, I_{s3})\,(s_{ik}s_{kj} - \tfrac{1}{3}\sigma_e^2\delta_{ij}) \tag{1.2}$$

где B_1 и B_2 – материальные функции, зависящие от интенсивности напряжений $\sigma_e = (s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ и кубического инварианта $I_{s3} = (s_{ij}s_{jk}s_{ki})^{1/3}$. Эти функции связаны с A_1 и A_2 [2]:

$$B_1 = \frac{1}{\Delta}(-6A_1^2 + \upsilon_e^2 A_2^2), \quad B_2 = \frac{6A_2}{\Delta} \tag{1.3}$$

$$\Delta = -6A_1^3 + 3\upsilon_e^2 A_1 A_2^2 + 2I_{\upsilon 3}^2 A_2^3$$

Наличие скалярного потенциала W такого, что $s_{ij} = \partial W/\partial\upsilon_{ij}$ накладывает ограничение на функции A_1 и A_2:

$$\upsilon_e \frac{\partial A_1}{\partial I_{\upsilon 3}} = I_{\upsilon 3}^2 \frac{\partial A_2}{\partial \upsilon_e} \tag{1.4}$$

Связи инвариантов тензоров s_{ij} и υ_{ij}, получающиеся из (1.1), (1.2) и теоремы Гамильтона–Келли

$$\sigma_e^2 = \upsilon_e^2 A_1^2 + 2I_{\upsilon 3}^3 A_1 A_2 + \tfrac{1}{6}\upsilon_e^4 A_2^2 \tag{1.5}$$

$$I_{s3}^3 = I_{\upsilon 3}^3 A_1^3 + \tfrac{1}{2}\upsilon_e^4 A_1^2 A_2 + \tfrac{1}{2}\upsilon_e^2 I_{\upsilon 3}^3 A_1 A_2^2 - \tfrac{1}{36}\upsilon_e^6 A_2^3 + \tfrac{1}{3} I_{\upsilon 3}^6 A_2^3 \tag{1.6}$$

носят название скалярных определяющих соотношений среды. Материальные функции должны быть такими, чтобы из (1.5) следовало $(\upsilon_e < \infty) \to (\sigma_e < \infty)$. Тогда A_1 можно записать в виде ряда

$$A_1(\upsilon_e, I_{\upsilon 3}) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(I_{\upsilon 3})\upsilon_e^n \tag{1.7}$$

Условие потенциальности (1.4) дает выражение для A_2:

$$A_2(\upsilon_e, I_{\upsilon 3}) = \frac{1}{I_{\upsilon 3}^2}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{a_n'(I_{\upsilon 3})}{n+2}\upsilon_e^{n+2} \tag{1.8}$$

с точностью до произвольной функции от $I_{\upsilon 3}$. Общее представление материальных функций в форме кратных степенных рядов по инвариантам содержится в [3]. В [4] рассматривается потенциал изотропной тензор-функции как полином от инвариантов аргумента этой функции. В [2] выясняется характер зависимости коэффициентов a_n $(n \geqslant -1)$ от $I_{\upsilon 3}$ и показывается, что либо a_n вообще не зависит от $I_{\upsilon 3}$, либо $a_n(I_{\upsilon 3}) = O(I_{\upsilon 3}^{3+\varepsilon})$, $\varepsilon \geqslant 0$ при $I_{\upsilon 3} \to 0$.

2. Пусть на некоторый невозмущенный процесс в среде с определяющими соотношениями (1.1), (1.2), параметры которого отмечаются градусом, накладываются возмущения. Линеаризуем тензорно нелинейные соотношения (1.1) или, другими словами, найдем связь между линейными приращениями δs_{ij} и $\delta\upsilon_{ij}$ вблизи невозмущенного состояния s_{ij}° и υ_{ij}°. Получим

$$\delta s_{ij} = \upsilon_{ij}^\circ \delta A_1 + A_1^\circ \delta\upsilon_{ij} + \left(\upsilon_{ik}^\circ \upsilon_{kj}^\circ - \frac{\upsilon_e^{\circ 2}}{3}\delta_{ij}\right)\delta A_2 + \tag{2.1}$$

$$+ A_2^\circ\left(\upsilon_{ik}^\circ \delta\upsilon_{kj} + \upsilon_{jk}^\circ \delta\upsilon_{ki} - \frac{2}{3}\upsilon_{kl}^\circ \delta\upsilon_{kl}\delta_{ij}\right)$$

$$A_\alpha^\circ = A_\alpha(\upsilon_e^\circ, I_{\upsilon 3}^\circ) \quad (\alpha = 1,2) \tag{2.2}$$

$$\delta A_\alpha = \frac{1}{\upsilon_e^\circ}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial \upsilon_e}\right)^\circ \upsilon_{ij}^\circ \delta\upsilon_{ij} + \frac{1}{I_{\upsilon 3}^{\circ 2}}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial I_{\upsilon 3}}\right)^\circ \upsilon_{ik}^\circ \upsilon_{kj}^\circ \delta\upsilon_{ij} \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.3) ряды (1.7), (1.8), будем иметь

$$\delta A_1 = \upsilon_{ij}^\circ \delta\upsilon_{ij} \sum_{n=-1}^{\infty} n a_n(I_{\upsilon 3}^\circ)\upsilon_e^{\circ n-2} + \frac{1}{I_{\upsilon 3}^{\circ 2}}\upsilon_{ik}^\circ \upsilon_{kj}^\circ \delta\upsilon_{ij} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n'(I_{\upsilon 3}^\circ)\upsilon_e^{\circ n} \tag{2.4}$$

$$\delta A_2 = \frac{1}{I_{\upsilon 3}^{\circ 2}}\upsilon_{ij}^\circ \delta\upsilon_{ij} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n'(I_{\upsilon 3}^\circ)\upsilon_e^{\circ n} -$$

$$-\frac{1}{I_{\upsilon 3}^{\circ 4}}\upsilon_{ik}^\circ \upsilon_{kj}^\circ \delta\upsilon_{ij} \sum_{n=-1}^{\infty}\left[\frac{2a_n'(I_{\upsilon 3}^\circ)}{I_{\upsilon 3}^\circ} - a_n''(I_{\upsilon 3}^\circ)\right]\frac{\upsilon_e^{\circ n+2}}{n+2} \tag{2.5}$$

Соотношения (2.1) – (2.3) можно записать в форме $\delta s_{ij} = W_{ijkl}^\circ \delta\upsilon_{kl}$, где W_{ijkl}° – компоненты некоторого тензора четвертого ранга, зависящие лишь от параметров невоз-

мущенного процесса. Таким образом, линеаризованные определяющие соотношения тензорно нелинейного изотропного материала имеют вид, аналогичный определяющим соотношениям тензорно линейного анизотропного материала, причем тип анизотропии определяется кинематикой невозмущенного процесса.

Рассмотрим далее некоторые часто встречающиеся типы определяющих соотношений (1.1), (1.2).

(а) Тензорно линейная (квазилинейная) среда. В этом случае девиатор напряжений и тензор скоростей деформаций, входящие в соотношения (1.1) и (1.2), соосны, т.е. $A_2 \equiv 0, B_2 \equiv 0$ и согласно (1.4) $A_1 = A_1(\upsilon_e), B_1 = (B_1(\sigma_e)$. Линеаризованная связь (2.1) упрощается

$$\delta s_{ij} = A_1^\circ \delta\upsilon_{ij} + \frac{1}{\upsilon_e^\circ}\left(\frac{dA_1}{d\upsilon_e}\right)^\circ \upsilon_{ij}^\circ \upsilon_{kl}^\circ \delta\upsilon_{kl} \tag{2.6}$$

или в рядах

$$\delta s_{ij} = \upsilon_{ij}^\circ \upsilon_{kl}^\circ \delta\upsilon_{kl} \sum_{n=-1}^{\infty} n a_n \upsilon_e^{\circ n-2} + \delta\upsilon_{ij} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \upsilon_e^{\circ n} \tag{2.7}$$

причем коэффициенты a_n постоянны. Если $a_{-1} = 0$, то среда является нелинейно вязкой или неньютоновской жидкостью, если $a_{-1} > 0$, то вязкопластическим телом с пределом текучести a_{-1}.

(в) Вязкопластическая модель Шведова–Бингама–Ильюшина. В данном случае $A_2 \equiv 0$, $A_1(\upsilon_e^\circ) = \sigma_s / \upsilon_e^\circ + 2\mu$, где σ_s – предел текучести, μ – динамическая вязкость. Из (2.6) имеем

$$\delta s_{ij} = \left(\frac{\sigma_s}{\upsilon_e^\circ} + 2\mu\right)\delta\upsilon_{ij} - \frac{\sigma_s}{\upsilon_e^{\circ 3}} \upsilon_{ij}^\circ \upsilon_{kl}^\circ \delta\upsilon_{kl} \tag{2.8}$$

(с) Ньютоновская жидкость. По сравнению с предыдущим случаем $\sigma_s = 0$. Получающаяся среда – ньютоновская вязкая жидкость – единственная физически линейная модель, т.е. линейная в операторном смысле, среди всех, задаваемых в (1.1). В силу ее физической линейности

$$\delta s_{ij} = 2\mu\delta\upsilon_{ij} \tag{2.9}$$

Подставим теперь формулы Стокса

$$\upsilon_{ij}^\circ = \tfrac{1}{2}(\upsilon_{i,j}^\circ + \upsilon_{j,i}^\circ), \quad \delta\upsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\delta\upsilon_{i,j} + \delta\upsilon_{j,i}) \tag{2.10}$$

в равенства (2.1), (2.6), (2.8), (2.9), а те в линеаризованные уравнения движения. С учетом несжимаемости придем к замкнутой системе четырех линейных уравнений относительно возмущений скоростей $\delta\upsilon_{ij}$ и возмущения давления δp:

$$-\delta p_{,i} + \delta s_{ij,j}(\mathbf{v}^\circ, \delta\mathbf{v}) + \rho\delta F_i = \rho(\partial\delta\upsilon_i / \partial t + \upsilon_{i,j}^\circ \delta\upsilon_j + \upsilon_j^\circ \delta\upsilon_{i,j}) \tag{2.11}$$

$$\delta\upsilon_{i,i} = 0 \tag{2.12}$$

В (2.11) δF_i – компоненты возможной вариации массовых сил. Дополняя систему (2.11), (2.12) граничными и начальными условиями, получим линеаризованную начально-краевую задачу устойчивости пространственного течения с полем скоростей $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x}, t)$ нелинейной среды относительно малых пространственных возмущений, накладываемых на поле $\mathbf{v}^\circ$.

3. В случае одномерного сдвига в плоскости (x_1x_2) с профилем υ°:

$$\upsilon_i^\circ = \upsilon^\circ(x_2)\delta_{1i}, \quad \upsilon_{ij}^\circ = \frac{\upsilon^{\circ\prime}}{2}(\delta_{1i}\delta_{2j} + \delta_{1j}\delta_{2i}), \quad \upsilon_e^\circ = \frac{|\upsilon^{\circ\prime}|}{\sqrt{2}}, \quad I_{\upsilon 3}^\circ \equiv 0 \tag{3.1}$$

Подставляя кинематику (3.1) в соотношения (2.1)–(2.3), получим

$$\delta s_{\alpha\alpha} = A_1^\circ \delta\upsilon_{\alpha\alpha} + \frac{\upsilon^{\circ\prime}}{3} A_2^\circ \delta\upsilon_{12} + \frac{(\upsilon^{\circ\prime})^2}{12}\delta A_2 \quad (\alpha = 1,2)$$

$$\delta s_{33} = A_1^\circ \delta\upsilon_{33} - \frac{2\upsilon^{\circ\prime}}{3} A_2^\circ \delta\upsilon_{12} - \frac{(\upsilon^{\circ\prime})^2}{6}\delta A_2 \tag{3.2}$$

$$\delta s_{12} = A_1^\circ \delta\upsilon_{12} + \frac{\upsilon^{\circ\prime}}{2}\delta A_1 + \frac{\upsilon^{\circ\prime}}{2} A_2^\circ(\delta\upsilon_{11} + \delta\upsilon_{22})$$

$$\delta s_{13} = A_1^\circ \delta\upsilon_{13} + \frac{\upsilon^{\circ\prime}}{2} A_2^\circ \delta\upsilon_{23}, \quad \delta s_{23} = A_1^\circ \delta\upsilon_{23} + \frac{\upsilon^{\circ\prime}}{2} A_2^\circ \delta\upsilon_{13}$$

$$A_\alpha^\circ = A_\alpha(|\upsilon^{\circ\prime}|/\sqrt{2}, 0) \tag{3.3}$$

$$\delta A_\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial \upsilon_e}\right)^\circ \operatorname{sign}\upsilon^{\circ\prime}\,\delta\upsilon_{12} + \frac{(\upsilon^{\circ\prime})^2}{4} l_\alpha(\delta\upsilon_{11} + \delta\upsilon_{22})$$

$$l_\alpha = \lim_{I_{\upsilon 3}\to 0}\left(\frac{1}{I_{\upsilon 3}^2}\frac{\partial A_\alpha}{\partial I_{\upsilon 3}}\right) \tag{3.4}$$

Для тензорно линейной среды из соотношений (3.2) – (3.4), как и из (2.6), следует

$$\delta s_{\alpha\beta} = A_1^\circ \delta\upsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha;\beta) \neq \{(1;2),(2;1)\}$$

$$\delta s_{12} = \left[A_1^\circ + \frac{|\upsilon^{\circ\prime}|}{\sqrt{2}}\left(\frac{dA_1}{d\upsilon_e}\right)^\circ\right]\delta\upsilon_{12} \tag{3.5}$$

Анализ с помощью интегральных оценок обобщенной задачи Орра–Зоммерфельда, описывающей устойчивость сдвига тензорно линейного материала относительно плоской (в плоскости сдвига) картины возмущений, дается в [5].

Для вязкопластической модели Шведова–Бингама–Ильюшина из (3.5), как и из (2.8), получим

$$\delta s_{\alpha\beta} = \left(\frac{\sqrt{2}\sigma_s}{|\upsilon^{\circ\prime}|} + 2\mu\right)\delta\upsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha;\beta) \neq \{(1;2),(2;1)\} \tag{3.6}$$

$$\delta s_{12} = 2\mu\delta\upsilon_{12}$$

4. В случае двумерного растяжения–сжатия в плоскости (x_1x_2) с интенсивностью $c(t)$:

$$\upsilon_i^\circ = c(\delta_{1i}x_1 - \delta_{2i}x_2), \quad \upsilon_{ij}^\circ = c(\delta_{1i}\delta_{1j} - \delta_{2i}\delta_{2j})$$

$$\upsilon_e^\circ = \sqrt{2}\,|c|, \quad I_{\upsilon 3}^\circ \equiv 0 \tag{4.1}$$

Подставим кинематику (4.1) в линеаризованные соотношения (2.1)–(2.3), в результате получим

$$\delta s_{11} = A_1^\circ \delta\upsilon_{11} + c\delta A_1 + \frac{2c}{3}A_2^\circ(2\delta\upsilon_{11} + \delta\upsilon_{22}) + \frac{c^2}{3}\delta A_2$$

$$\delta s_{22} = A_1^\circ \delta\upsilon_{22} - c\delta A_1 - \frac{2c}{3}A_2^\circ(\delta\upsilon_{11} + 2\delta\upsilon_{22}) + \frac{c^2}{3}\delta A_2 \tag{4.2}$$

$$\delta s_{33} = A_1^\circ \delta v_{33} - \frac{2c}{3} A_2^\circ (\delta v_{11} - \delta v_{22}) - \frac{2c^2}{3} \delta A_2, \quad \delta s_{12} = A_1^\circ \delta v_{12}$$

$$\delta s_{13} = (A_1^\circ + cA_2^\circ)\delta v_{13}, \quad \delta s_{23} = (A_1^\circ - cA_2^\circ)\delta v_{23}$$

$$A_\alpha^\circ = A_\alpha(\sqrt{2}\,|c|, 0) \tag{4.3}$$

$$\delta A_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial v_e} \right)^\circ \operatorname{sign} c (\delta v_{11} - \delta v_{22}) + l_\alpha c^2 (\delta v_{11} + \delta v_{22}) \tag{4.4}$$

В случае тензорной линейности материала из (4.2)–(4.4) или из (2.6) имеем

$$\delta s_{\alpha\beta} = A_1^\circ \delta v_{\alpha\beta} \quad (\alpha;\beta) \neq \{(1;1),(2;2)\} \tag{4.5}$$

$$\delta s_{11;22} = A_1^\circ \delta v_{11;12} \pm \frac{|c|}{\sqrt{2}} \left(\frac{dA_1}{dv_e} \right)^\circ (\delta v_{11} - \delta v_{22})$$

Для модели Шведова–Бингама–Ильюшина соотношения (4.5) упрощаются и принимают вид

$$\delta s_{\alpha\beta} = \left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{2}\,|c|} + 2\mu \right) \delta v_{\alpha\beta} \quad (\alpha;\beta) \neq \{(1;1),(2;2)\} \tag{4.6}$$

$$\delta s_{11;22} = \frac{\sigma_s}{2\sqrt{2}\,|c|} (\delta v_{11} + \delta v_{22}) + 2\mu \delta v_{11;22}$$

Задача устойчивости двумерного растяжения–сжатия вязкопластической полосы всесторонне исследована в [6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
2. *Георгиевский Д.В.* Изотропные нелинейные тензор-функции в теории определяющих соотношений // Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и ее приложения". Т. 83. М.: ВИНИТИ, 2001.
3. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.
4. *Lainé E., Vallée C., Fortuné D.* Nonlinear isotropic constitutive laws: choise of the three invariants, convex potentials and constitutive inequalities // Intern. J. Engng. Sci. 1999. V. 37. № 15. P. 1927–1941.
5. *Георгиевский Д.В,* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 176 с.
6. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика, 1940. Вып. 39. С. 3–81.
7. *Кеппен И.В., Родионов С.Ю.* Растяжение – сжатие полосы из нелинейного вязкопластического материала // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 97–105.

Москва

Поступила в редакцию
6.05.2001