МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001

УДК 531.39

© 2001 г. Г.Г. ДЕНИСОВ

К ВОПРОСУ О ДАВЛЕНИИ ВОЛН НА ПРЕГРАДУ В СЛУЧАЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Интерес к воздействию волн на отражающее их препятствие возник очень давно и связан с предположением о том, что волны любой физической природы при взаимодействии с какой-либо преградой оказывают на нее не равное нулю среднее давление, подобно давлению электромагнитных волн на отражающую их поверхность. Одной из первых работ в этой области была работа Рэлея [1], в которой рассмотрена простейшая механическая модель, описывающая это явление, содержащая массу, прикрепленную к совершающей колебания струне, пропущенной сквозь отверстия в кольце, имеющем возможность перемещаться вертикально. Было определено среднее давление на кольцо в зависимости от параметров модели, амплитуды и частоты колебаний и сделаны некоторые общие выводы о воздействии вибраций. В другой работе Рэлея [2] вслед за работой Пойнтинга [3] было сделано предположение, что если при отражении пакета волн от некоторого препятствия, на него произведено среднее давление, то это возможно лишь при наличии импульса у этих волн. Именно это подтверждается на примере продольных плоских волн в жидкости (или газе) [2].

Совершенно иная картина наблюдается в случае поперечных колебаний одномерных упругих систем (балка, струна). При распространении поперечных волн каждая частица в первом приближении колеблется перпендикулярно направлению движения волны и в принципе не вносит вклад в ее импульс.

Во втором приближении частицы при волновом процессе колеблются и поперек и вдоль струны, но импульс и в этом случае не появляется в силу отсутствия поступательного движения вдоль упругой системы. Однако давление на препятствие, взаимодействующее с поперечными вибрациями и волнами при определенных условиях возникает [1, 4, 5], что находится в противоречии с утверждением Пойнтинга и Рэлея. Разрешение этой парадоксальной ситуации в работах появившихся в последнее время [5–8] предлагается через введение волнового импульса, изменением которого при взаимодействии с препятствием и объясняется появление давления, названного также волновым. Волновые импульс и давление используются в упомянутых работах как в случае поперечных так и продольных волн. Указанные волновые характеристики присущи только распределенным системам, они квадратичны по амплитуде и обладают следующими основными свойствами: импульс всегда направлен в сторону движения волн, давление всегда положительно, т.е. препятствие всегда отталкивается набегающей волной. Волновой импульс имеется и у линейных волн, т.е. в случае, когда каждая частица среды колеблется синусоидально в отсутствие поступательного движения и в принципе не создается классического импульса ни у поперечной, ни у продольной волны.

Исходя из того, что уравнения движения распределенных систем выведены из уравнений Ньютона, можно заключить о достаточности обычных классических импульса и давления для объяснения соответствующих результатов анализа волновых процессов. Заметим, что в известных курсах теории сплошных сред волновые импульс и давление даже не упоминаются [9, 10]. В связи со сказанным следует искать разрешения противоречия в рамках классической механики.

Оказалось, что для продольных и поперечных волн решение поставленной задачи различно. В случае продольных волн давление на отражающее препятствие связано с наличием импульса у набегающей волны и подтверждается точка зрения Рэлея и Пойнтинга [2, 3], причем наличие импульса сопровождается обязательным переносом массы (перемещением центра масс части среды, занятой волной),

обусловленным начальными условиями и нелинейными свойствами среды и уравнений [11, 12]. Для продольных колебаний показано, что волна при отражении от препятствия может производить на него как положительное, так и отрицательное среднее давление, и что волновой импульс не содержит физической сущности.

В случае поперечных колебаний предположение Пойнтинга и Рэлея выполняется не всегда, т.к. давление поперечных волн на взаимодействующее с ними препятствие возможно и в случае отсутствия импульса у набегающего пакета волн. Решению названных противоречий посвящена данная работа.

Рассмотрим простую механическую систему, состоящую из тележки, свободно без трения перемещающейся вдоль горизонтальной плоскости, и закрепленной на ее краях натянутой струны (фиг. 1). В некотором месте имеется кольцевой ограничитель с отверстием, равным диаметру струны, задающий неизменным ее вертикальное положение и жестко скрепленный с корпусом тележки. Будут рассматриваться как поперечные, так и продольные колебания струны с учетом квадратичных членов по амплитуде колебаний, т.к. интересующие характеристики давления и импульса не могут быть достаточно представлены только линейной частью.

При написании уравнений движения будем исходить из того, что потенциальная энергия натянутой упругой нити (струны), закрепленной в точках $-l_1$, l_2 выражается через продольные $u(x, t)$ и поперечные $v(x, t)$ отклонения от равновесных состояний формулой

$$\int_{-l_1}^{l_2} \frac{N}{2}\left(\sqrt{(1+B+u_x)^2+v_x^2}-1\right)^2 dx$$

Тогда плотность функции Лагранжа запишется так

$$L=\frac{1}{2}\rho(1-u_x)(u_t^2+v_t^2)-\frac{N}{2}\left(\sqrt{(1+B+u_x)^2+v_x^2}-1\right)^2$$

где z_t, z_x – частные производные по времени и координате, $B = \partial u_0(x)/\partial x$ – постоянное растяжение струны. ρ, N – плотность невозмущенной струны и сила ее натяжения.

С учетом уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}L_{z_t}+\frac{\partial}{\partial x}L_{z_x}-L_z=0 \quad (z=u,v)$$

уравнения колебаний струны с точностью до квадратичных членов приводятся к виду (например, [14]):

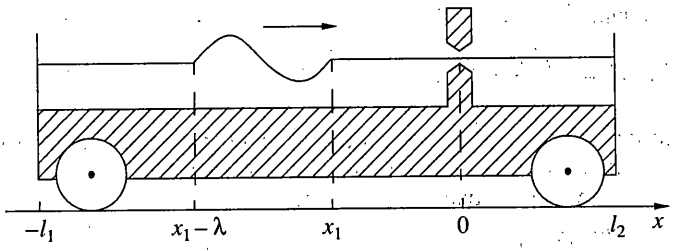
$$v_{tt}-\gamma^2a^2v_{xx}-a^2(1-\gamma^2)^2(v_{xx}u_x+v_xu_{xx})-(u_xv_t)_t=0$$

$$u_{tt}-a^2u_{xx}-a^2(1-\gamma^2)^2v_xv_{xx}-u_xu_{tt}-2u_{xt}u_t=\delta(x)f(t)$$

$$\gamma^2=B/(1+B)$$

Отметим, что в квадратичном приближении поперечные и продольные колебания связаны и скорость распространения γa поперечных волн меньше скорости a продольных. Наличие ограничителя при $x = 0$, будет отражено при изучении поперечных колебаний дополнительным краевым условием, $v(0, t) = 0$, а в уравнении продольных колебаний введением функции $f(t)$, равной сосредоточенной в точке $x = 0$ горизонтальной силе, деленной на плотность струны, возникающей при взаимодействии поперечных волн с ограничителем и имеющей второй порядок малости.

Рассмотрим следующую ситуацию: в начальный момент времени тележка неподвижна, так что $x = -l_1$, $x = l_2$ соответствует закреплению левого и правого конца струны, а $x = 0$ – положению ограничителя. Будем считать, что масса тележки много больше массы струны, при воздействии волн тележка приобретает весьма малую ско-



Фиг. 1

рость, в силу чего места закрепления струны и положение ограничителя можно принять неизмененными. Слева от ограничителя возбуждается цуг поперечных волн протяженностью $n\lambda$ (λ – длина волны), движущийся в сторону ограничителя (на фиг. 1 $n = 1$). По достижении волной ограничителя около него образуются стоячие поперечные волны, время существования которых равно $\lambda n/(\gamma a)$. Затем отраженный цуг поперечных волн движется вдоль струны влево. При взаимодействии с ограничителем в струне возникают и продольные волны, которые могут иметь горизонтальный импульс. Рассмотрим движение цуга волн и их воздействие на тележку, считая колебания малыми и образуя уравнения последовательных приближений.

Полагая $v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots$, $u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$ ($\varepsilon \ll 1$), запишем уравнения первого и второго приближений:

$$v_{1tt} - \gamma^2 a^2 v_{1xx} = 0, \quad u_{1tt} - a^2 u_{1xx} = 0$$

$$v_{2tt} - \gamma^2 a^2 v_{2xx} = a^2(1-\gamma^2)^2 (v_{1x} u_{1x})_x + (u_{1x} v_{1t})_t$$

$$u_{2tt} - a^2 u_{2xx} = \frac{a^2(1-\gamma^2)^2}{2}(v_{1x}^2)_x + u_{1x}u_{1tt} + 2u_{1xt}u_{1t} + \delta(x)f(t)$$

Начальные и краевые условия для уравнений первого приближения

$$v_1(x,0) = A\sin kx, \quad v_{1t}(x,0) = -\gamma a A\cos kx, \quad u_1(x,0) = 0, \quad u_{1t}(x,0) = 0$$

$$v_1(-l_1,t) = v_1(0,t) = v_1(l_2,t) = 0, \quad u_1(-l_1,t) = u_1(l_2,t) = 0$$

Функции $v_1(x, 0)$, $v_{1t}(x, 0)$ не равны нулю только в интервале $-x_1 - \lambda n < x < -x_1$, причем $\sin kx_1 = 0$.

При данных условиях продольные волны в первом порядке не возбуждаются $u_1(x, t) = 0$, а образуется бегущее вправо поперечное возмущение $v_1(x, t) = A \sin k(x - a\gamma t)$, $t < t_1 = x_1/(\gamma a)$ с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$, периодом колебаний $T = \lambda/(\gamma a)$, находящееся в области $-x_1 - \lambda n \leqslant x - \gamma a t \leqslant -x_1$. Принимая в дальнейшем t_1 за начало нового отсчета времени, запишем решение в виде

$$v_1(x,t) = A\sin k(x - a\gamma t) + A\sin k(x + a\gamma t)$$

Из-за наличия ограничителя $v_1(x, t) = 0$ при $x \geqslant 0$, и при всех x, кроме интервалов $-n\lambda < x - a\gamma t < 0$, $0 < x + a\gamma t < n\lambda$. При перекрытии этих интервалов, когда $0 < a\gamma t < n\lambda$ существует стоячая волна, примыкающая слева к ограничителю, в виде $v_1(x, t) = 2A \sin kx \cos ka\gamma t$.

Рассмотрим решение уравнений второго приближения. При нулевых начальных условиях поперечные колебания $v_2(x, t) = 0$ в силу $u_1(x, t) = 0$. Правую часть уравнения для продольных колебаний $u_2(x, t)$ можно трактовать как действие на струну распределенных сил, обусловленных поперечными колебаниями $v_1(x, t)$, и сосредоточенной

горизонтальной силы:

$$f(t) = -\frac{N}{2\rho} v_{1x}^2(0,t) = -\frac{\gamma^2 a^2}{2} v_{1x}^2(0,t)$$

Значение горизонтальной силы взято здесь в частном случае известного выражения [4, 6], когда ограничитель неподвижен относительно струны.

Запишем вид решения по формуле Даламбера [13]:

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-at+a\tau}^{x+at-\tau} \left\{ \frac{a^2(1-\gamma^2)^2}{2} [v_{1\xi}^2(\xi,\tau)]_\xi - \frac{\gamma^2 a^2}{2} \delta(\xi) v_{1\xi}^2(0,\tau) \right\} d\xi d\tau$$

Введем обозначение $u_2(x,t) = u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$, где первое слагаемое обусловлено распределенными силами, а второе – сосредоточенной силой. Слагаемое $u_2^{(1)}$ имеет сложную громоздкую структуру, обусловленную видом $v_1(x, t)$ и изменяющейся областью ее определения. Запишем это решение в случае $v_1 = A \sin k(x - a\gamma t)$, т.е. при $t < 0$:

$$u_2^{(1)} = \frac{(1-\gamma^2)A^2 k}{16} \{-2\sin 2k(x - a\gamma t) + (1+\gamma)\sin 2k(x - at) + (1-\gamma)\sin 2k(x + at)\}$$

Решение характеризуется вынужденной волной (первое слагаемое имеет ту же область определения и скорость распространения γa, что и $v_1(x, t)$) и двумя цугами свободных волн, бегущих в противоположных направлениях со скоростью a и отличных от нуля при $-n\lambda < x \mp at < 0$. Длина возбужденных волн равна $\lambda/2$. Интегрированием по области определения можно убедиться, что $\int \rho u_{2t}^{(1)}(x,t)dx = 0$, т.е. эта часть возбужденных волн не имеет импульса.

Подобный вид будет иметь решение при $a\gamma t > n\lambda$, когда сформировалась обратная волна $v_1(x, t) = A \sin k(x + a\gamma t)$. Более сложным будет решение при $0 < a\gamma t < n\lambda$, однако все волны, составляющие решение $u_2^{(1)}(x,t)$, не имеют импульса.

Приведем теперь решение, обусловленное наличием горизонтальной сосредоточенной силы

$$u_2^{(2)}(x,t) = \frac{-1}{2a}\int_0^t \int_{x-at+a\tau}^{x+at-a\tau} 2\gamma^2 a^2 A^2 k^2 \cos^2 ka\gamma\tau\delta(\xi) d\xi d\tau =$$

$$= -\frac{\gamma^2 a A^2 k^2}{2}\int_0^1 (1+\cos 2ka\gamma\tau)[\eta(x + at - a\tau) - \eta(x - at + a\tau)]d\tau$$

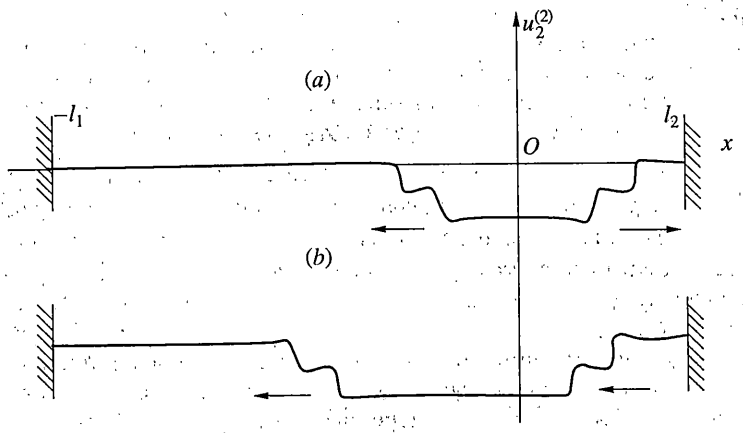
Учитывая свойство единичной функции $\eta(z) = 1$; 0 при $z > 0$; $z < 0$ и конечное время действия силы со стороны ограничителя $0 \leqslant t \leqslant Tn$, будем иметь

$$u_2^{(2)} = -\frac{1}{2}\gamma^2 A^2 k^2 \left\{ at + x + \frac{1}{2k\gamma}\sin 2k\gamma(x + at) + anT + at - x - \frac{1}{2k\gamma}\sin 2k\gamma(x - at) \right\}$$

Это решение представлено суммой обратной и прямой волн, бегущих от ограничителя (функции от $x + at$ и от $x - at$), находящихся при $t > nT$ в интервалах $-at < x < -anT$ и $at - anT < x < at$. Между этими волнами находится расширяющаяся область $|x| < a(t - nT)$ постоянных значений $u_2^{(2)} = -\frac{1}{2}\gamma A^2 k^2 n\lambda$ (фиг. 2, *а*). Как следует из решения импульсы прямой и обратной волн отрицательны и равны. Общий импульс продольных волн с учетом областей определения равен

$$G = \int_{-at}^{at} \rho u_{2t}^{(2)}(x,t)dx = -\rho\gamma a A^2 k^2 \lambda n$$

Он зависит от плотности струны, скорости распространения γa, длины цуга $n\lambda$,



Фиг. 2

квадрата амплитуды и волнового числа A^2k^2 поперечных волн, набегающих на ограничитель, и совпадает с суммарным действием горизонтальной силы на струну со стороны ограничителя, выражаемым интегралом $-\int\limits_0^{nT} \frac{N}{2} v_{1x}^2(0,t)dt$.

Такая же по величине сила, но с обратным знаком действует на жестко связанный с тележкой ограничитель и она приобретает импульс $-G$. Следовательно, набежавшая на ограничитель и отраженная от него поперечная волна привела к образованию разбегающихся продольных волн с общим импульсом G, а тележка обрела при этом импульс $-G$. Последим теперь за движением части продольной волны $u_2^{(2)}(x - a\,t)$, бегущей от ограничителя вправо при условии $l_2 \ll l_1$. Эта волна с импульсом $1/2G$ достигнет правой стенки при $t = l_2/a$ и после отражения движется влево с импульсом $-1/2G$, передав тележке импульс G, и тележка остановится. Итак, при $t < 0$ прямая поперечная волна $v_1(x - a\gamma t)$ порождает продольные волны второго приближения, не обладающие импульсом. При $0 \leqslant t < n\lambda/(\gamma a)$ происходит взаимодействие поперечной волны с ограничителем с возникновением продольных волн $u_2^{(2)}(x \pm a\,t)$, бегущих от ограничителя с общим импульсом $+G$, тележка обретает импульс $-G$. При $t \geqslant l_2/a$ продольная волна $u_2^{(2)}(x - a\,t)$ достигает правой стенки и, отразившись от нее, бежит влево с импульсом $-1/2G$, передав тележке импульс $+G$. В результате тележка остановится, а образовавшиеся две продольные волны, бегут влево с суммарным нулевым импульсом (фиг. 2, *в*). Во время каждой из описанных фаз, импульс системы тележка и струна равен нулю. Очевидно, что при $l_2 \to 0$ промежуток времени между началом воздействия поперечной волны через ограничитель на тележку и противоположным воздействием продольной волны на нее в точке $x = l_2$ стремится к нулю. При $l_2 = 0$ горизонтальное усилие на тележку исчезает и она при отражении поперечных волн остается неподвижной.

Таким образом, выявилось существенное различие в виде препятствий, находящихся на пути поперечных волн. Если это препятствие ограничивает только поперечные смещения струны, то взаимодействие с ним набегающих поперечных волн приводит к их отражению, появлению во втором порядке продольных волн, обладающих импульсом, и движению с противоположным импульсом массы, скрепленной с ограничителем. При этом между струной и ограничителем возникает горизонтальное усилие. Если же ограничиваются как поперечные, так и продольные смещения струны ($l_2 = 0$), то поперечная волна, отражаясь от препятствия, не оказывает на него давле-

ния. Подчеркнем, что и в первом и во втором случае набегающая волна импульса не имеет. Заметим в заключение, что при решении рассмотренной задачи с использованием понятия волнового импульса отмеченное различие в поведении системы струна и тележка при различных краевых условиях не обнаруживается. Так, для поперечной волны $v = A \sin k(x \mp a\gamma t)$ плотность волнового импульса равна [5]: $-\rho v_x v_t = \pm \rho A^2 k^2 a\gamma \cos^2 k(x \mp a\gamma t)$ и для цуга набегающих волн волновой импульс равен $G = {}^1/_2 \rho A^2 k^2 a\gamma n\lambda$. При отражении от ограничителя интегральное воздействие на него будет равно $2G$ вне зависимости от краевых условий, налагаемых на продольные смещения. Не обнаруживаются также все нюансы в динамике рассмотренной системы, зависящие от величины l_2 и обусловленные возникновением во втором порядке продольных волн.

Принципиальная ошибка при решении задач с применением волновых импульса и давления (квадратичных по амплитуде характеристик возмущения), состоит в неучете продольных волн того же порядка. Поперечная безимпульсная волна, взаимодействуя с ограничителем, давит на него, доставляя ему импульс, при этом возбуждаются продольные волны в струне с импульсом противоположного знака. Здесь уместна аналогия с механической системой из двух сближающихся шаров в случае косого удара. До удара каждый шар не имел составляющей импульса ортогональной линии их сближения, а после удара такие составляющие появляются при равенстве нулю их суммы.

Автор приносит благодарность И.В. Веселитскому за участие в работе на начальном этапе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00061).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reyleigh.* On the pressure of vibrations // Phil. Mag. 1902. V. 3. P. 338–346.
2. *Reyleigh.* On the momentum and pressure of gasseous of vibrations and on the connexiom with virial theorem // Phil Mag. 1905. V. 10. P. 364–374.
3. *Poynting T. H.* Radiation pressure // Phil. Mag. 1905. V. 9. P. 393–407.
4. *Николаи Е.Л.* К вопросу о давлении вибраций // Изв. СПб политехн. ин-та. 1912. Т. 18. Вып. 1. С. 49–60.
5. *Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863–866.
6. *Весницкий А.И., Уткин Г.А.* Движение тела вдоль струны под действием сил волнового давления // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 278–280.
7. *Уткин Г.А.* Постановка задач динамики упругих систем с движущимися по ним объектами // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С. 4–14.
8. *Весницкий А.И., Метрикин А.В.* Переходное излучение в механике // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 10. С. 1043–1068.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
10. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
11. *Денисов Г.Г.* О волновом импульсе и усилиях, возникающих на границе одномерной упругой системы // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 42–51.
12. *Денисов Г.Г.* К вопросу об импульсе волны, радиационном давлении и других величинах в случае плоских движений идеального газа // ПММ. Т. 63. Вып. 3. С. 390–402.
13. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.
14. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971. 224 с.

Н. Новгород

Поступила в редакцию
8.07.1999