**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001**

УДК 531.383

© 2001 г. В.Ф. ЖУРАВЛЁВ

ОБ УХОДЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО СДВИГА В ИНФОРМАЦИОННОМ КАНАЛЕ

Управление стоячей волной в кварцевом полусферическом резонаторе, представляющем собой чувствительный элемент волнового твердотельного гироскопа [1], осуществляется посредством подачи напряжения на систему электродов, образующих совместно с резонатором систему электрических конденсаторов. Управление этими напряжениями осуществляется с помощью сигналов, снимаемых с другой системы электродов (информационные электроды). Влияние электродов управления и информационных электродов на динамику резонатора было изучено в [2]. В настоящей заметке изучается влияние рассогласования по фазе между перемещениями резонатора и электрическими сигналами, информирующими об этих перемещениях.

Динамическая модель основной формы колебаний электромеханической системы, представляющей собой полусферический резонатор с электродами управления и электродами съема информации, представлена в [2] в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{w}_1 + kw_1 - \frac{1}{2dC_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^2\cos 2\vartheta_i = 0\\
& m\ddot{w}_2 + kw_2 - \frac{1}{2dC_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^2\sin 2\vartheta_i = 0\\
& R\dot{q}_i + \frac{q_i}{C_i} + r\sum_{l=1}^{n} m_{il}\dot{q}_l = V_i
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Поясним обозначения: w_1 и w_2 – обобщенные координаты основной формы, равные радиальному смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга на угол 45° в угловом измерении по экватору; m – приведенная масса основной формы колебаний (масса парциального осциллятора), равная для тонкой полусферической оболочки в приближении Релея 4.8 $\rho h R_c^2$, где ρ – плотность материала резонатора, h – толщина оболочки, R_c – радиус полусферы; k – приведенная жесткость, соответствующая основной форме, $k = m/\omega^2$, где ω – частота колебаний; q_i – заряд на конденсаторе, расположенном под углом ϑ_i к отсчетной оси ($\vartheta_i = 2\pi(i-1)/n$, n – число электродов); C_i – мгновенная емкость этого конденсатора, зависящая от прогиба w_i в месте положения этого конденсатора: $C_i = \varepsilon_0 S(d - w_i)^{-1} = C_0(1 - w_i/d)^{-1}$, где $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ ф/м, S – площадь пластины, d – расстояние между пластинами при $w_i = 0$; R – сопротивление (полагается одинаковым для всех электродов), подводящее к конденсатору напряжение V_i; m_{il} – коэффициенты перекрестных связей между электродами (в следующем ниже анализе этими связями мы будем пренебрегать).

Уравнения (1) относятся как к случаю электродов съема информации, так и к случаю электродов управления. В случае электродов съема информации $n = 8$, а перемещения резонатора w_1 и w_2 представляют собой перемещения в месте расположения электродов с номерами $i = 1{,}2$. В этом случае сопротивление R велико в сравнении с $1/\omega C_0$, а V_i не зависит от номера $V_i = V$.

В случае электродов управления $n = 16$, сопротивление R мало и будет считаться равным нулю. Распределение напряжения по электродам V_i зависит от цели управления.

Перед тем как рассматривать уравнение (1) в режиме управления следует установить закономерности формирования напряжений на электродах съема информации. Для этого рассмотрим третье уравнение системы (1):

$$R\dot{q}_i + \frac{1}{C_0} q_i \left(1 - \frac{w_i}{d}\right) = V \ \ (i = 1, \ \ldots, \ 8) \qquad (2)$$

Смещение резонатора в месте положения i-го электрода выражается формулой

$$w_i = w_1 \cos 2\vartheta_i + w_2 \sin 2\vartheta_i, \quad \vartheta_i = \pi(i-1)/4 \ \ (i = 1, \ \ldots, \ 8)$$

Из восьми электродов существенными являются только два $i = 1$ и $i = 2$. Все электрические процессы на других электродах или тождественны процессам на этих, или отличаются от них только знаком. Поэтому в случае электродов съема информации в дальнейшем вместо $i = 1, \ldots, 8$ будем писать $i = 1{,}2$.

Уравнение (2) является линейным, неоднородным дифференциальным уравнением с переменным коэффициентом $w_i(t)$ для нахождения функции $q_i(t)$. Это дифференциальное уравнение допускает точное решение, однако, во избежание громоздких выражений предпочтительно построить приближенное решение, воспользовавшись тем фактом, что сопротивление R велико. Тогда можно искать решение (2) в виде ряда по степеням $1/R$:

$$q_i(t) = a_0(t) + \frac{1}{R} a_1(t) + \frac{1}{R^2} a_2(t) + \ldots$$

Подставив этот ряд в (2) и разделив порядки, получим следующую систему для нахождения $a_0, a_1, \ldots$:

$$\dot{a}_0 = 0, \quad \dot{a}_1 = V - \frac{a_0}{C_0}\left(1 - \frac{w_i}{d}\right), \quad \dot{a}_2 = -\frac{a_1}{C_0}\left(1 - \frac{w_i}{d}\right), \ \ldots \qquad (3)$$

Из первого уравнения этой системы следует $a_0 = \mathrm{const}$. Значение этой константы легко найти из условия отсутствия секулярного члена в решении для $a_1(t)$:

$$a_1 = \left(V - \frac{a_0}{C_0}\right)t + \frac{a_0}{dC_0}\int w_i dt$$

откуда следует $a_0 = VC_0$.

Учитывая, что из первых двух уравнений системы (1) следует

$$\int w_i dt \approx -\frac{1}{\omega^2}\dot{w}_i \ \ (i = 1{,}2)$$

получим

$$a_2 = \frac{V}{dC_0\omega^2} w_i \ \ (i = 1{,}2)$$

Здесь пренебрегается $(w_i/d)^2$ в сравнении с w_i/d.

Следовательно, приближенное решение (2) имеет вид:

$$q_i = VC_0 + \frac{V}{dR}\int w_i dt + \frac{V}{dC_0\omega^2 R^2} w_i \quad (i = 1,2)$$

Снимаемое с электродов напряжение, используемое в дальнейшем для получения информации о повороте основания, а также для формирования команд управления, имеет вид

$$U_i = R\dot{q}_i = \frac{V}{d} w_i + \frac{V}{dC_0\omega^2 R}\dot{w}_i \quad (i = 1,2)$$

Это выражение можно представить так

$$U_i = \frac{V\sqrt{1 + C_0^2\omega^2 R^2}}{dC_0\omega^2 R}(\omega w_i \cos\alpha + \dot{w}_i \sin\alpha) \quad (i = 1,2) \tag{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{C_0\omega R}{\sqrt{1 + C_0^2\omega^2 R^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + C_0^2\omega^2 R^2}}$$

Распространенное представление о характере снимаемой с электродов информации основано на пренебрежении вторым слагаемым в (4) на основании его малости.

Целью дальнейшего анализа является установить, к каким погрешностям приводит такое пренебрежение.

Рассмотрим теперь уравнения (1) с электродами управления. В этом случае $n = 16$, $R = 0$, а V_i надо сформировать так, чтобы в соответствии с [3] первые два уравнения системы (1) приобрели форму:

$$\begin{aligned} m\ddot{w}_1 + kw_1 &= \varepsilon(E_0 - E)\dot{w}_1 + \mu q w_2 + p\dot{w}_2 + f w_1 \\ m\ddot{w}_2 + kw_2 &= \varepsilon(E_0 - E)\dot{w}_2 - \mu q w_1 - p\dot{w}_1 + f w_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Смысл четырех слагаемых в правых частях этой системы следующий: члены, пропорциональные ε, определяют управление амплитудой, пропорциональные μ – управление квадратурой, члены, пропорциональные p, определяют управление прецессией, а члены, пропорциональные f, представляют собой управление частотой.

В этой системе мерой амплитуды является нормированная на массу m удвоенная энергия колебаний

$$E = \omega^2(w_1^2 + w_2^2) + \dot{w}_1^2 + \dot{w}_2^2$$

Квадратура (мера момента количества движения резонатора) имеет вид

$$q = w_1\dot{w}_2 - \dot{w}_1 w_2$$

Для того, чтобы такие правые части в системе (5) получились надо в системе (1) напряжения V_i сформировать следующим образом:

$$\begin{aligned} V_i = {} & \varepsilon(E_0 - E)\left(\dot{w}_1 \cos\frac{\pi}{4}(i-1) + \dot{w}_2 \sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) + \\ & + \mu q\left(w_2 \cos\frac{\pi}{4}(i-1) - w_1 \sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) + p\left(\dot{w}_2 \cos\frac{\pi}{4}(i-1) - w_1 \sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) + \\ & + f\left(w_1 \cos\frac{\pi}{4}(i-1) + w_2 \sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) + V_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь V_0 – опорное напряжение.

Подставляя в систему (1) $q_i = V_i C_i$ ($i = 1, \ldots, 16$), где V_i выражается формулой (6) и осуществляя суммирование, находим

$$m\ddot{w}_1 + kw_1 = \frac{n}{2d} C_0 V_0 [\varepsilon(E_0 - E)\dot{w}_1 + \mu q w_2 + p\dot{w}_2 + f w_1] \tag{7}$$

$$m\ddot{w}_1 + kw_1 = \frac{n}{2d} C_0 V_0 [\varepsilon(E_0 - E)\dot{w}_2 - \mu q w_1 - p\dot{w}_1 + f w_2]$$

Таким образом, с точностью до общего множителя $nC_0V_0/2d$ получился искомый вид уравнений (5). Однако, для того, чтобы сформировать управление (6) необходимо, располагая напряжениями (4), найти перемещения w_i. Это можно сделать так. Продифференцируем по времени выражение (4):

$$\dot{U}_i = \frac{V}{d\omega}(\omega w_i \cos\alpha + \dot{w}_i \sin\alpha) \quad (i = 1,2)$$

(в выражении (4) считается $C_0^2\omega^2 R^2 \gg 1$).

Подставив сюда $\ddot{w}_i \cong -\omega^2 w_i$, получаем вместе с уравнением (4) систему:

$$U_i = \frac{V}{d\omega}(\omega w_i \cos\alpha + \dot{w}_i \sin\alpha) \quad (i = 1,2) \tag{8}$$

$$\dot{U}_i = \frac{V}{d}(-\omega w_i \sin\alpha + \dot{w}_i \cos\alpha)$$

Эту систему можно разрешить относительно w_i, $\dot{w}_i$:

$$w_i = \frac{d}{V\omega}(\omega U_i \cos\alpha - \dot{U}_i \sin\alpha) \quad (i = 1,2) \tag{9}$$

$$\dot{w}_i = \frac{d}{V}(\omega U_i \sin\alpha + \dot{U}_i \cos\alpha)$$

Выражения (9) следует подставить в (8) при формировании управления, или, что то же самое, в (7).

Перед тем как это сделать заметим следующее. Преобразование (8) представляет собой ортогональную группу с параметром α и с оператором D:

$$D = \frac{V}{d}\left[\frac{1}{\omega}\left(\dot{w}_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \dot{w}_2 \frac{\partial}{\partial w_2}\right) - \omega\left(w_1 \frac{\partial}{\partial \dot{w}_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial \dot{w}_2}\right)\right]$$

Нетрудно проверить, что удвоенная энергия E, квадратура q, а также и угол φ:

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{2(\omega^2 w_1 w_2 + \dot{w}_1 \dot{w}_2)}{\omega^2(w_1^2 - w_2^2) + \dot{w}_1^2 - \dot{w}_2^2} \tag{10}$$

исчерпывают все конечные инварианты этой группы, то есть:

$$DE = 0, \quad Dq = 0, \quad D\operatorname{tg} 4\varphi = 0$$

Это означает, что при вычислении энергии (амплитуды), квадратуры и угла φ можно игнорировать наличие фазового сдвига α в информационном канале, т.е. можно считать, что:

$$E = \omega^2(U_1^2 + U_2^2) + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2, \quad q = U_1\dot{U}_2 - \dot{U}_1 U_2$$

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{2(\omega^2 U_1 U_2 + \dot{U}_1 \dot{U}_2)}{\omega^2(U_1^2 - U_2^2) + \dot{U}_1^2 - \dot{U}_2^2} \tag{11}$$

(возникший в выражениях для E и q множитель d^2/V^2 включается в определение коэффициентов ε и μ).

Если представить снимаемые напряжения U_1 и U_2 в форме: $U_1 = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t$, $U_2 = A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t$, то выражения (11) можно записать в эквивалентной форме

$$E = \omega^2(A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2),\quad q = \omega(A_1B_2 - A_2B_1),\quad \operatorname{tg}4\varphi = \frac{2(A_1A_2 + B_1B_2)}{A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2}$$

Отмеченный факт сильно облегчает вычисление управления (6), поскольку от фазового сдвига α оказываются независящими важнейшие нелинейные функции фазовых переменных, однако, игнорирование этого сдвига полностью приводит к искажению смысла управления, т.е. к ошибкам.

Для установления этих ошибок подставим (9) в (7). Получим:

$$m\ddot{w}_1 + kw_1 = \frac{n}{2V}C_0V_0[\varepsilon(E_0 - E)\dot{U}_1 + \mu qU_2 + p\dot{U}_2 + fU_1] + \tag{12}$$

$$+\frac{n}{2V}C_0V_0\left[-\varepsilon\omega(E_0 - E)U_1 + \frac{\mu}{\omega}q\dot{U}_2 - p\omega U_2 + \frac{1}{\omega}f\dot{U}_1\right]\sin\alpha$$

$$m\ddot{w}_2 + kw_2 = \frac{n}{2V}C_0V_0[\varepsilon(E_0 - E)\dot{U}_2 - \mu qU_1 - p\dot{U}_1 + fU_2] +$$

$$+\frac{n}{2V}C_0V_0\left[-\varepsilon\omega(E_0 - E)U_2 - \frac{\mu}{\omega}q\dot{U}_1 + p\omega U_1 + \frac{1}{\omega}f\dot{U}_2\right]\sin\alpha$$

Те члены в правых частях, которые пропорциональны $\sin\alpha$, являются дополнительными членами, необходимыми в управлении при правильном учете фазового сдвига α.

Если же эти члены не учитывать, то возникают следующие ошибки.

Управление амплитудой (члены с ε) приводит к уменьшению жесткости k резонатора на величину:

$$\frac{\varepsilon n\omega}{2d}C_0V_0(E_0 - E)\sin\alpha$$

Управление квадратурой (члены с μ) приводит к уходу:

$$\frac{nC_0V_0\mu q}{8\eta md\omega}\sin\alpha \tag{13}$$

Поясним, как получилось такое выражение для ухода. Если учесть скорость вращения основания Ω, то левые части уравнений (5) должны быть дополнены так:

$$m\ddot{w}_1 + 4\eta m\Omega\dot{w}_2 + kw_1 = \ldots \tag{14}$$

$$m\ddot{w}_2 - 4\eta m\Omega\dot{w}_1 + kw_2 = \ldots$$

где η – коэффициент Брайана (см. например [4]). В правых частях (12) точно такую же структуру, как и новые члены в (14) имеют члены, пропорциональные $\mu\sin\alpha$. Приравнивая коэффициенты при $\dot{U}_i$ в этих членах мы и получаем (13).

Отметим еще для полноты описания, что управление прецессией (члены с p) приводит к появлению квадратуры со скоростью ее изменения

$$\frac{n}{2d}C_0V_0\omega p\sin\alpha$$

а управление частотой (члены с f) приводит к диссипации с интенсивностью

$$\frac{n}{2d\omega} C_0 V_0 f \sin\alpha$$

Пример. Оценим порядок ухода по формуле (13). Для этого заметим, что в соответствии с формулой (6) произведение $\mu q w_i$ представляет собой напряжение в вольтах, прикладываемое к электродам с целью управления квадратурой. Положим это напряжение имеет порядок 10 в. Пусть порядок амплитуды колебаний есть 10^{-4} м, тогда $\mu q \sim 10^{-3}$ вм$^{-1}$. Пусть порядок опорного напряжения V_0 есть 100 в. Емкость C_0 оценим так: $C_0 \sim 10^{-12}$ кл^2 / Нм (площадь пластины $\sim 10^{-4}$ м^2, расстояние между пластинами $d \sim 10^{-4}$ м). Приведенная масса $m = 7 \cdot 10^{-3}$ Нс^2/м (при плотности $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ Нс^2/м^4, $h \sim 10^{-3}$ м, $R_c = 3 \cdot 10^{-2}$ м). Число электродов $n = 16$. Наконец, $\sin\alpha \approx C_0 \omega R \sim 10^{-5}$. Формула (14) дает порядок ухода 10^{-3} °/час. Если такая погрешность терпима, то фазовый сдвиг в информационном канале можно полностью игнорировать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lynch D.D.* Vibrating gyro analysis by the method of averaging // Докл. 2-й Санкт-Петербург. междунар. конф. по гироскопич. технике и навигации. СПб.: Научн. Совет РАН по пробл. управл. движ. и навигации., 1995. P. 18–26.
2. *Журавлев В.Ф., Линч Д.Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. № 5. 1995. С. 12–24.
3. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. № 6. 1997. С. 27–35.
4. *Журавлев В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. № 3. 1993. С. 6–19.

Москва

Поступила в редакцию
2.11.2000