

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. С.Н. КУКУДЖАНОВ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ ДЕЙСТВИЕМ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ И НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

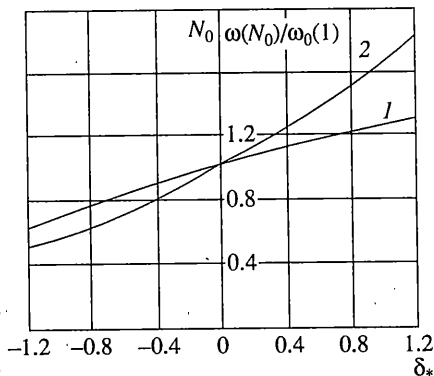
Исследуются собственные колебания оболочек вращения, близких по форме к цилиндрическим, находящихся под предварительным действием крутящих моментов M , приложенных к торцам оболочки и нормального давления q (внешнего или внутреннего) равномерно распределенного по всей оболочке. Рассматриваются оболочки средней длины, у которых форма образующей срединной поверхности описывается параболической функцией. На основании теории пологих оболочек получено разрешающее уравнение колебания. Приведенное уравнение отличается от известного [1] дополнительным членом, который может иметь такой же порядок, как и другие учтенные члены. Рассмотрены оболочки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. При этом, подобно цилиндрическим оболочкам, рассматривались только главные граничные условия. Основное внимание уделялось низшим частотам, практически наиболее важным. Приведенное решение для определения частотных и критических характеристик является достаточно хорошим приближением решения, соответствующему свободному операнию.

Приведены формулы и универсальные кривые, выражающие зависимость наименьшей частоты и формы волнообразования от величин как предварительных напряжений, так и амплитуды отклонения оболочки от цилиндра. Показано, что при наличии предварительных нормальных и касательных напряжений отклонения оболочки от цилиндрической формы (порядка толщины) могут существенным образом изменить низшие частоты и форму волнообразования соответствующей предварительно напряженной цилиндрической оболочки.

Рассматривается оболочка, у которой срединная поверхность образована вращением квадратной параболы вокруг оси z прямоугольной системы координат x, y, z с началом посередине отрезка оси вращения. Радиус поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством $R = r + \delta_0 [1 - \xi^2 (r/l)^2]$, где r – радиус торцевого сечения; δ_0 – максимальное отклонение (при $\delta_0 > 0$ оболочка выпуклая, при $\delta_0 < 0$ – вогнутая), $L = 2l$ – длина оболочки; $\xi = z/r$. Считается, что δ_0^2 / r^2 , δ_0^2 / l^2 – пренебрежимо малы в сравнении с единицей.

Предполагается, что докритическое состояние – безмоментное. Учитывая близость R к r , можно показать, что нормальные и сдвигающие усилия принимают соответственно вид $T_2^0 \approx -qr$, $S^0 \approx M / 2\pi r^2$.

За основные уравнения принимались уравнения, соответствующие теории пологих оболочек [2]. Для рассматриваемых оболочек средней длины [3] формы колебаний, соответствующие низшим частотам, сопровождаются слабовыраженным волнообразованием в продольном направлении в сравнении с окружным, поэтому имеет



Фиг. 1

место соотношение $\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \gg \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$ ($f = w, \psi$), где w, ψ – соответственно функции радиального перемещения и напряжения. В результате система уравнений теории пологих оболочек приводится к следующему уравнению:

$$\varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 4\delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - t_2^0 \frac{\partial^0 w}{\partial \varphi^6} - 2s^0 \frac{\partial^0 w}{\partial \xi \partial \varphi^5} + \Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon = h^2 / 12r^2(1 - \nu^2), \quad \delta = \delta_0 r / l, \quad t_2^0 = T_2^0 / Eh$$

$$s^0 = S^0 / (Eh), \quad \Omega = \rho r^2 / E \quad (2)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки; φ – угловая координата. Дополнительный членом в этом уравнении, в сравнении с уравнением, полученным в [1], является четвертый член, который, в силу приведенного выше неравенства, будет одного порядка с третьим членом этого уравнения.

Таким образом, нахождение форм колебаний рассматриваемых оболочек сводится к определению ненулевых решений уравнения (1) при краевых условиях

$$w(l/r, \varphi) = w(-l/r, \varphi) = 0 \quad (3)$$

Решение будем искать в виде ряда

$$w = \sin(\omega t + p) \sum_{mn} \cos \lambda_m \xi [A_{mn} \sin n(\varphi - \gamma \xi) + B_{mn} \cos n(\varphi - \gamma \xi)] \quad (4)$$

$$\lambda_m = m\pi r / 2l \quad (m = 2p + r, \quad p = 0, 1, 2, \dots)$$

В разложении (4) члены вида $C_{mn} \sin \lambda_m \xi \sin n(\varphi - \gamma \xi)$ и $D_{mn} \sin \lambda_m \xi \cos n(\varphi - \gamma \xi)$ отсутствуют в связи с граничными условиями (3). Представим выражение (4) в следующем виде:

$$w = \sin(\omega t + p) \sum_{mn} 0.5 A_{mn} (\sin[n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + \sin[n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi]) + 0.5 B_{mn} (\cos[n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + \cos[n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi]) \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получаем

$$\sum_{mn} \{A_{mn} F(n, -m) \sin[n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + A_{mn} F(n, m) \sin[n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi] + \dots\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& + B_{mn}F(n, -m) \cos[n(\varphi - \gamma\xi) - \lambda_m \xi] + B_{mn}F(n, m) \cos[n(\varphi - \gamma\xi) + \lambda_m \xi] = 0 \\
& F(n, \pm m) = \varepsilon n^8 + \mu_{\pm}^4 + 4\delta \mu_{\pm}^2 n^2 + 4\delta^2 n^4 + 2s^0 \mu_{\pm} n^5 - t^0 n^6 - \Omega \omega^2 n^4 \\
& \mu_{\pm} = -n\gamma \pm \lambda_m, \quad t^0 = qr / Eh
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{aligned}
A_{mn}[F(n, -m) + F(n, m)] = 0, \quad A_{mn}[F(n, -m) - F(n, m)] = 0 \\
B_{mn}[F(n, -m) + F(n, m)] = 0, \quad B_{mn}[F(n, -m) - F(n, m)] = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, для существования нетривиального решения уравнения (1) при краевых условиях (3) необходимо и достаточно, чтобы нашлись целые m и n , удовлетворяющие условиям

$$F(n, m) = 0, \quad F(n, -m) = 0 \tag{8}$$

Соотношения (8) представляют собой следующие равенства:

$$\Omega \omega^2 = \varepsilon n^2 + \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right)^4 + 4\delta \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + 4\delta^2 + 2s^0 \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right) - t^0 n^2 \tag{9}$$

$$\Omega \omega^2 = \varepsilon n^8 + \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right)^4 + 4\delta \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + 4\delta^2 + 2s^0 \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right) - t^0 n^2 \tag{10}$$

Отсюда нетрудно показать, что наименьшему значению частоты ω в зависимости от m соответствует $m = 1$, поэтому в дальнейшем полагаем $m = 1$. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\rho &= \lambda_1 \varepsilon_*^{-1/4} / n, \quad \theta = \gamma \varepsilon_*^{-1/4}, \quad \delta_* = \delta \varepsilon_*^{-1/2}, \quad \Omega_* = \Omega \varepsilon_*^{-1} / \pi^2 \\
\lambda_1 &= \pi r / L, \quad S = s^0 / s_*, \quad T = t^0 / t_* \\
\varepsilon_* &= hr / L^2 (1 - \nu^2)^{1/2}, \quad s_* = 0.74 (1 - \nu^2)^{-5/8} (h/r)^{5/4} (r/L)^{1/2}, \\
t_* &= 0.855 (1 - \nu^2)^{-3/4} (h/r)^{3/2} r / L
\end{aligned} \tag{11}$$

Тогда из равенства (9), (10) получаем следующие уравнения:

$$\Omega_* \omega^2 = \frac{\pi^2}{12} \rho^{-4} + \frac{1}{\pi^2} [(\rho^4 + 2\theta^4 \rho^2 - 3\theta^4) + 4\delta_* (-\theta^2 + \rho^2) + 4\delta^2] + 0.855 T \rho^{-2} \tag{12}$$

$$\theta^3 + 3p\theta + 2q = 0, \quad p = 1/3(\rho^2 + 2\delta_*), \quad q = 0.185\pi^2 \rho^{-2} S \tag{13}$$

Так как дискриминант уравнения (13) $D = q^2 + p^3 > 0$, то имеем один действительный корень

$$\begin{aligned}
\theta &= \left(\sqrt{3.562\rho^{-4}S^2 + (\rho^2 + 2\delta_*)^3 / 27 + 1.826\rho^{-2}S}\right)^{1/3} - \\
&- \left(\sqrt{3.562\rho^{-4}S^2 + (\rho^2 + 2\delta_*)^3 / 27 - 1.826\rho^{-2}S}\right)^{1/3}
\end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая, что для незагруженной цилиндрической оболочки средней длины наименьшая частота ω_0 определяется известным равенством

$$\Omega \omega_0^2 = 2\lambda_1 \varepsilon_*^{1/2}, \quad \rho_0 = \pi / \sqrt[4]{12} \quad (n_0^2 = \lambda_1 \varepsilon_*^{-1/4}) \tag{15}$$

можно представить $\Omega_* \omega^2$ в следующем виде:

$$\Omega_* \omega^2 = \omega^2 / \sqrt[3]{3} \omega_0^2(\rho_0) \tag{16}$$

Кроме того, введем новую переменную N , определяемую выражением $N = \pi 12^{-1/4} \rho^{-2}$ ($N=1$ при $\rho = \rho_0$). Тогда равенства (12), (13) можно записывать в следующей безразмерной форме:

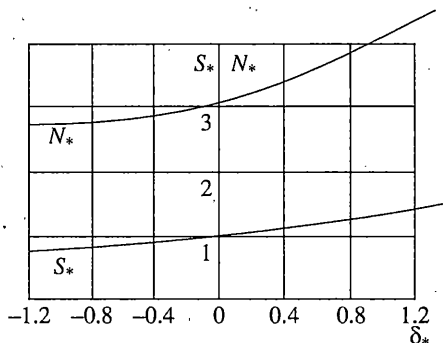
$$\omega^2(N)/\omega_0^2(1) = \frac{1}{2}[N^2 + N^{-2} + 1.185\theta^2 N^{-1} - 1.053\theta^4 + \delta_*(2.37N^{-1} - 1.404\theta^2) + 1.404\delta_*^2 - 1.755TN], \quad \omega_0^2(1) = 2\Omega^{-1}\lambda_1\varepsilon^{-1/2} \quad (17)$$

$$\theta = \frac{(\sqrt{1.17S^2N^2 + (1.688N^{-1} + 2\delta_*)^3/27} + 1.083SN)^{1/3} - (\sqrt{1.17S^2N^2 + (1.688N^{-1} + 2\delta_*)^3/27} - 1.082SN)^{1/3}}{3} \quad (18)$$

Отсюда при $S = 0$ получаем $\theta = 0$, а из равенства (17) – выражение для определения частот свободно опертой оболочки, находящейся под действием нормального давления:

$$\omega^2(N)/\omega_0^2(1) = \frac{1}{2}[N^2 + N^{-2} + 2.37\delta_*N^{-1} + 1.404\delta_*^2 - 1.755TN] \quad (19)$$

Отсюда при $\delta = 0$ получим известную формулу для определения частот цилиндрической оболочки средней длины [3]. Выражение (19) исследовалось в [4], где приведены формулы и кривые для определения значений N_0 , реализующих наименьшую частоту, а также соответствующих $\omega(N_0)/\omega_0(1)$ в зависимости от δ_* и T . Результаты расчета при $T = 0$ приведены на фиг. 1, где кривая 1 соответствует N_0 , а кривая 2 – значениям $\omega(N_2)/\omega_0(1)$ в зависимости от δ_* .



Фиг. 2

Далее рассматривается случай действия одного кручения $S \neq 0, T = 0$. Из формул (17) и (18) при $\omega = 0, T = 0$ (см. [5, 6]) получаем критические касательные напряжения S_* и соответствующие значения N_* , при которых реализуются эти критические условия. При $\delta = 0$ получаем известную формулу критического касательного напряжения для цилиндрической оболочки [3]. На фиг. 2 приведены критические значения S_* и соответствующие N_* в зависимости от δ_* (см. [5]). Подставляя равенство (18) в формулу (17), получаем выражение для определения безразмерной частоты как функции одной безразмерной переменной N и двух безразмерных параметров: δ_*, S . Определяя наименьшее значение $\omega^2(N)/\omega_0^2(1)$ в зависимости от N при фиксированных значениях δ_*, S , получаем соответствующую наименьшую частоту. На фиг. 3 приведены графики изменения значений N , при которых реализуется наименьшая частота, в зависимости от S при фиксированных значениях δ_* : $-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.8, 1.2$ (соответствующие кривые обозначены: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$). На фиг. 4 приведены кривые

изменения безразмерной наименьшей частоты в зависимости от безразмерного предварительного напряжения S для перечисленных значений δ_* (соответствующие кривые обозначены теми же цифрами). При этом по оси ординат отложено отношение $\omega/\omega_0(1)$ ($\omega_0(1)$ – наименьшая частота незагруженной цилиндрической оболочки, определяемая вторым равенством (17)), а по оси абсцисс – $S = s/s_*$ (s_* – критическое касательное напряжение для цилиндрической оболочки), определяемые равенством (12).

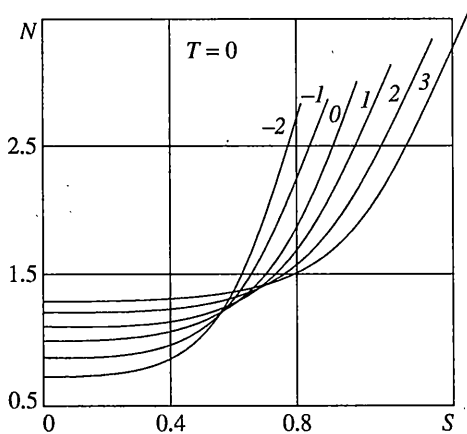
На основании фиг. 3 нетрудно заметить, что при изменении крутящего момента от нуля до его критического значения, т.е. когда S изменяется в интервале $0 \leq S \leq S_*$, значение N , при котором реализуется минимальная частота, находится в интервале $N_0 \leq N \leq N_*$, где N_0 – значение N , при котором реализуется наименьшая частота незагруженной оболочки; N_* – критическое значение N , при котором происходит потеря устойчивости. В частности, для цилиндрической оболочки ($\delta = 0$), имеем $0 \leq S \leq 1$, $1 \leq N \leq 3.02$.

В случае совместного действия кручения и давления ($S \neq 0$, $T \neq 0$) аналогично предыдущему, подставляя (18) в формулу (17), получаем выражения для определения частоты как функции одной переменной N и трех безразмерных параметров: δ_* , S , T .

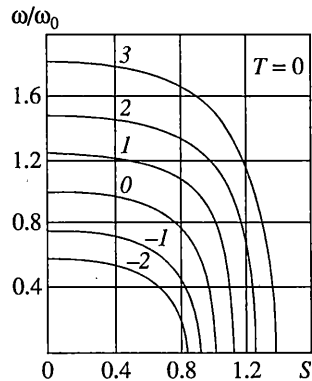
Определяя наименьшее значение $\omega^2(N)/\omega_0^2(1)$ в зависимости от N при фиксированных значениях δ_* , S , T , получаем соответствующую наименьшую частоту. На фиг. 5 для $T = 0.4$ (внешнего давления $q > 0$) и $T = -0.4$ (внутреннего давления $q < 0$), приведены кривые изменения безразмерной наименьшей частоты в зависимости от S для перечисленных выше значений δ_* (соответствующие кривые также обозначены: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$). На фиг. 6 приведены графики изменения N , при котором реализуется наименьшая частота в зависимости от S (при $T = 0.4$) для перечисленных выше значений δ_* (соответствующие кривые обозначены: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$). Отметим, что приведенные выше уравнения справедливы для значений внутреннего давления, не превышающих величину внешнего критического давления ($0 \leq |T| \leq T_*$) [4].

Отметим, что для оболочек вращения средней длины, близких к цилиндрическим, с отрицательной гауссовой кривизной $\delta_0 < 0$ различие между критическим давлением q_* для шарнирного и жесткого закреплений может быть в несколько раз, тогда как для критической нагрузки кручения различия для шарнирного и жесткого закреплений составляют не более 25–30% [6]. С другой стороны, для оболочек положительной кривизны $\delta_0 > 0$ различие между критическими нагрузками кручения при шарнирном и жестком закреплениях менее 10% и уменьшается по мере возрастания δ_0 , причем значения критической нагрузки, определяемой по методу данной работы, лежат между ними [6].

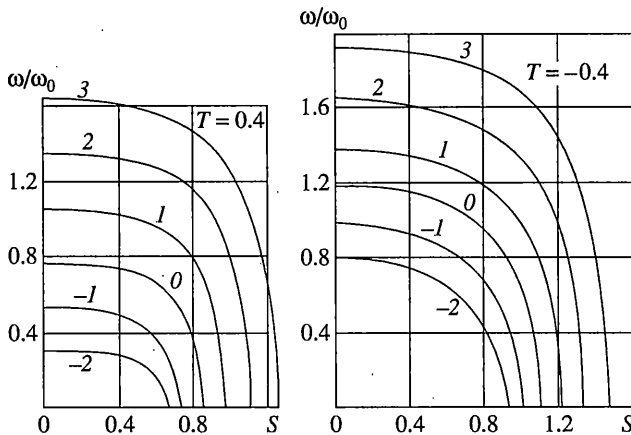
Отметим также, что при стремлении крутящего момента к нулю и действию нормального давления приведенное решение переходит в решение для шарнирного закрепления (так как при $M \rightarrow 0$ следует, что $\gamma \rightarrow 0$) и полученные значения критического нормального давления полностью соответствуют результатам [4, 6], а значения частотных характеристик – результатам [4, 7] (для оболочек как положительной, так и отрицательной кривизны). При действии нормального давления и дополнительном действии крутящего момента, начиная от нулевого значения, это решение начинает отклоняться от решения для шарнирного закрепления в сторону жесткого закрепления и тем сильнее, чем больше значение крутящего момента, причем в предельном случае, когда влияние крутящего момента на наименьшую частоту наибольшее (когда частота и внешнее давление стремятся к нулю), полученная критическая нагрузка кручения находится между критическими нагрузками шарнирного и жесткого закрепления (различие между которыми, как было отмечено выше, находится в практически приемлемом интервале). Следовательно, можно считать, что при совместном действии нормального давления и крутящих моментов только фактор кручения уведит рассматриваемое решение от решения для шарнирного закрепления, но в



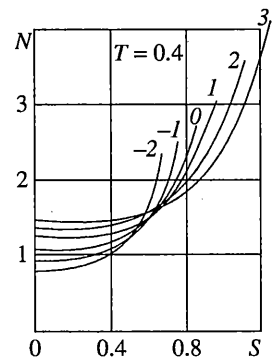
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

практически приемлемом интервале для критических и частотных характеристик (имеется в виду наименьшая частота). Таким образом, наименьшие частоты и критические характеристики, получаемые по данному методу, практически близки в случае шарнирного закрепления.

Полученные кривые являются универсальными кривыми, справедливыми для любой оболочки средней длины, так как геометрические и физические параметры не фигурируют в формулах (17), (18). Приведенные кривые показывают, насколько существенно изменяются наименьшая частота и соответствующая форма волнообразования в зависимости от предварительных напряжений и амплитуды отклонения рассматриваемой оболочки от цилиндрической формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даревский В.М. Устойчивость оболочки, близкой по форме к цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций. М.: МИСИ, 1980. С. 35–45.
2. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз, 1967, 984 с.
4. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 121–126.

5. *Кукуджанов С.Н.* Об устойчивости оболочек вращения, близких к цилиндрическим, при одновременном действии кручения и давления // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 7. С. 56–62.
6. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 319 с.
7. *Молчанов А.И.* Свободные колебания некруговых оболочек, близких к оболочкам нулевой гауссовой кривизны // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1986. № 4. С. 43–45.

Тбилиси

Поступила в редакцию
12.01.2000