

УДК 539.3

© 2001 г. В.Г. БАЖЕНОВ, Д.Т. ЧЕКМАРЕВ

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ДИНАМИКИ
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Дается обзор численных методов решения задач нестационарной динамики оболочечных тонкостенных конструкций. Основное внимание уделяется методическим вопросам построения и повышения эффективности численных схем. Рассматриваются вопросы сходимости, устойчивости и основные проблемы, возникающие при численном решении задач данного класса.

1. Введение. Современную историю применения численных методов в механике деформируемого твердого тела можно отсчитывать от создания первых компьютеров. Хотя первые численные методы решения задач механики (метод Бубнова – Галеркина, Рэлея – Ритца, конечноразностные методы) были разработаны ранее, применение вычислительных машин полностью изменило облик вычислительной механики. Наиболее развитие получили методы, отличающиеся алгоритмической простотой. Применение вычислительных методов в задачах механики деформируемого твердого тела развивается одновременно с их развитием в других областях механики и физики, в первую очередь – в задачах механики жидкости и газа, привлекающих внимание крупнейших специалистов вычислительной математики. За последние полвека вычислительная математика пережила период бурного развития и продолжает интенсивно развиваться. Основные достижения вычислительной математики в области решения задач математической физики отражены в учебниках и монографиях [8, 38, 39, 59, 60, 70, 73, 76, 77, 79, 87]. В целом можно считать, что практически любую корректную задачу математической физики можно решить численно, если не учитывать фактора времени. Наиболее актуальной остается проблема эффективности методов, т.е. разработки численных схем, оптимальных по быстродействию. Причина этого – во все возрастающей сложности задач, решаемых численными методами. И хотя рост быстродействия ЭВМ решает многие из проблем, сравнимый с ними эффект дает совершенствование численных методов [26]. В данной работе рассматривается современное состояние численных методов решения одного из сложных классов задач механики деформируемого твердого тела – нестационарной динамики тонкостенных конструкций.

2. Характеристика нестационарных динамических процессов в тонкостенных конструкциях. Расчет тонкостенных оболочечных и стержневых конструкций под действием нестационарных динамических нагрузок – задача, обладающая рядом специфических особенностей [3, 4, 9, 10, 24, 30, 35, 37]. При решении задач нестационарной динамики конструкций необходимо учитывать следующие факторы: сложность геометрии конструкций, что приводит к необходимости использования неравномерных сеток, а в ряде случаев и криволинейных систем координат, существенно услож-

няющих системы уравнений; геометрическая нелинейность (поскольку в процессе деформирования конструкций перемещения как правило нельзя считать малыми); физическая нелинейность, обусловленная переходом к нелинейному деформированию материала; вырождение задач, обусловленное малостью размеров по одной или двум координатам. Отметим, что нелинейность в задачах динамики конструкций носит несколько иной характер, чем, например, в газовой динамике. Так, в стержнях и оболочках практически невозможно возникновение ударных волн по причине малой толщины. В связи с вышеизложенным построение численных схем решения задач данного класса требует серьезного анализа. Неудивительно, что этим вопросам посвящено большое количество работ как в отечественной, так и в зарубежной научной литературе. Отметим также, что многие проблемы построения численных схем метода конечного элемента впервые проявились и в дальнейшем нашли свое решение именно при решении задач, связанных с расчетом тонкостенных конструкций.

3. Постановка задач. Математические модели и уравнения. Задачи нестационарной динамики конструкций допускают следующие постановки: начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных; системы законов сохранения в виде интегральных соотношений; вариационные задачи; системы граничных интегральных уравнений. Поскольку последние не получили широкого распространения при расчете тонкостенных конструкций, далее о них упоминать не будем. В ряде случаев численные схемы строятся не на базе континуальных задач, а на основе непосредственного применения физических законов, как это было с первыми схемами метода конечного элемента. При последнем подходе область разбивается на составные части, а далее уравнения неразрывности и движения этих частей составляются на основе физических соображений (см. исторический обзор в [65]). Пример такого подхода приводится, например, в [51, 71].

При расчете тонкостенных конструкций используются модели сплошных сред и теории оболочек [2, 37, 81]. Учет геометрически нелинейных эффектов производится с использованием нелинейных лагранжевых, эйлеровых или совместных лагранжево-эйлеровых постановок [64]. Учет нелинейного поведения материала при деформировании осуществляется на базе теорий пластичности – деформационных и инкрементальных [48, 50]. Ввиду наличия вырожденной координаты расчеты непосредственно по трехмерной теории зачастую являются неэффективными, что приводит к необходимости выделять процессы по вырожденной координате особо (вводить оболочечные модели), либо использовать сетки, адаптированные к данным задачам (с вытянутыми или сплющенными ячейками). При этом не имеет принципиального значения, вводятся ли гипотезы теории оболочек при выводе уравнений или на этапе построения численной схемы, как это делается в схемах МКЭ [65]. Важен характер принимаемых гипотез. В зависимости от этого приходим к вырожденной или вырождающейся задаче [30].

При дифференциальной записи основных уравнений могут использоваться разные формы. В методе конечных разностей наиболее распространена запись в виде уравнений движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

замыкаемых соотношениями для деформаций через перемещения и определяющими соотношениями между напряжениями и деформациями, а при необходимости и уравнениями термодинамики. В характеристических схемах используются соотношения на характеристиках [52, 53], в схеме Годунова система записывается в дивергентной форме [38].

Вариационная формулировка задач динамики допускает варианты в виде экстремального (стационарного) вариационного принципа для некоторого функционала или в виде вариационного уравнения (принципа виртуальных перемещений, скоростей, ускорений и т.п.). Поскольку для задач динамики единственным экстремальным принципом является принцип Гамильтона (что не всегда удобно для построения численных

схем), в подавляющем числе случаев используется вторая форма записи в виде

$$\int_V F(q_i, p_{ij}, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, \delta q_i, \delta p_{ij}) = 0, \quad p_{ij} = \partial q_i / \partial x_j \quad (3.2)$$

где q_i – варьируемые параметры (в зависимости от выбранного вариационного принципа это могут быть перемещения, скорости, ускорения, напряжения и т.п.). Данная форма записи служит основой для построения широкого класса вариационно-разностных схем и схем метода конечного элемента (см. [1, 33, 70]).

4. Основные численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций. Для приведения континуальной задачи к дискретной используются следующие основные подходы (здесь рассматриваются только те, которые получили более-менее широкое распространение): конечноразностные методы, вариационно-разностные методы, метод конечного элемента. Среди конечноразностных методов отдельно выделим сеточно-характеристические методы и схему распада разрыва С.К. Годунова. Попытаемся дать их краткие характеристики.

4.1. Сеточно-характеристические методы. Эти методы [52, 53, 55, 57, 61], базируются на записи исходных уравнений в виде соотношений на характеристиках. Интегрирование вдоль характеристик обладает следующим преимуществом: близость областей зависимости дифференциальной и сеточной задач. Они нашли достаточно широкое распространение при решении нестационарных волновых задач динамики массивных тел. В то же время при расчете тонкостенных конструкций применимость этих методов ограничена ввиду малости толщины конструкций и вследствие этого – необходимости учета отражения волн (и характеристик) от свободных поверхностей оболочек. В связи с этим возникают очевидные ограничения как на пространственный, так и на временной шаги интегрирования. Поэтому они нашли лишь ограниченное применение при решении задач этого класса [45, 49, 57]. В этом плане показателен пример монографии [61], авторы которой используют для расчета массивных тел сеточно-характеристическую схему, а при переходе к задачам теории оболочек переключаются на конечно-разностный подход. С другой стороны отметим попытки усовершенствования данного подхода при решении задач теории оболочек на базе модели Тимошенко [45]. Отметим также меньшую алгоритмическую простоту и универсальность данных методов по сравнению с методами конечных разностей и МКЭ (по крайней мере, в многомерном случае). В частности, это касается широкого класса прикладных задач, требующих учета сложной геометрии, неоднородностей материала, геометрической и физической нелинейности и ряда других факторов.

4.2. Схема С.К. Годунова. Данная схема [38] использует дивергентную запись уравнений. Следует отметить, что не все уравнения механики сплошных сред допускают запись в дивергентной форме – например, уравнения Прандтля–Рейсса (см. [75]) и теории оболочек. В таких случаях недивергентные слагаемые обычно переносятся в правую часть уравнений [7]. Важным свойством схемы С.К. Годунова является ее монотонность. Однако она обладает большой схемной вязкостью, которая исчезает лишь при числе Куранта $k = 1$, недостижимом для данной схемы за исключением одномерного случая. Модификации схемы С.К. Годунова, повышающие порядок ее аппроксимации до второго на гладких решениях (схема Лакса – Вендрофа и гибридные схемы) [87] уже не обладают свойством монотонности или имеют смешанный порядок (второй на монотонных решениях и первый – на немонотонных).

Схемы описанных выше классов оправдывают себя при решении задач на очень коротких промежутках времени и интенсивных переходных процессах (задача типа пробития, разрушения при ударе и т.п.). Однако эти задачи составляют лишь небольшую и не очень типичную часть задач динамики тонкостенных конструкций. У большинства задач динамики оболочек при характерных временах процесса порядка десяти и более пробегов волн по толщине, картина волнового процесса отличается рядом специфических черт. Такие процессы носят волновой характер лишь вдоль срединной

поверхности оболочки, а по толщине их можно считать близкими к квазистатическим после многократного отражения волн от свободных поверхностей. При решении таких задач с помощью характеристических схем и схемы С.К. Годунова эта специфика не учитывается. Таким образом, на задачах этого класса они становятся менее пригодными по сравнению с конечно-разностными и конечно-элементными схемами.

4.3. Конечно-разностные методы. Эти методы являются наиболее универсальными и гибкими при решении любых задач математической физики. Вместе с тем они дают в руки исследователя широчайший произвол при своем построении. Следовательно, важнейшей задачей при построении конечно-разностных схем является не расширение, а сужение их класса путем наложения на них различных дополнительных ограничений. Классических критериев качества численных схем (порядок аппроксимации и устойчивость) явно недостаточно. Ниже рассмотрим ряд таких дополнительных требований к разностным схемам. Пока же отметим лишь многолетнюю тенденцию дополнения количественных характеристик (порядок аппроксимации) качественными (консервативность, монотонность и т.д.). Наиболее распространенной для данных схем исходной формой записи является система уравнений движения, дополненная выражениями деформаций через перемещения и определяющими соотношениями. При этом утвердилась определенная конструкция задания величин в узлах и "ячейках", получившая наибольшее распространение после работ М. Уилкинса [83]. В ней имеем дело с разнесенными сетками. По пространству: узлы основной сетки, в которых вычисляются неизвестные перемещения, усилия, скорости и ускорения; "центры ячеек" основной сетки (по сути – узлы дополнительной сетки, смещенной относительно основной на некоторую долю ее шага), в которых вычисляются все величины, являющиеся первыми производными от перемещений (деформаций) или связанными с первыми производными функциональными зависимостями (напряжения и т.п.). По времени: целые шаги, в которых аппроксимируются перемещения, силы и ускорения; полуцелые шаги, в которых аппроксимируются скорости. В итоге получим основную и две смещенные сетки (по пространству и по времени), при этом на основной сетке определены неизвестные и их производные четного порядка, а на смещенных – производные нечетного порядка. Данная конструкция является очень гибкой и удобной по следующим причинам: свойства материала задаются в ячейке совершенно независимо от основной сетки, заменяя "физблок", легко получить материал с любой реологией; она ориентирована в общем случае на неортогональные и даже на неравномерные сетки, что позволяет применять ее в областях сложной формы; схема получается двухслойной по времени. В случае исключения всех неизвестных, кроме перемещений (это возможно, например, для линейно-упругого изотропного материала и приводит к системе уравнений Ламе) схемы, построенные по данному принципу, преобразуются к виду, аналогичному стандартным схемам для волнового уравнения: "крест", классической неявной схеме. Отметим, что при этом операторы аппроксимации вторых производных получаются автоматически как суперпозиции операторов первых производных.

К недостаткам конечно-разностного метода следует отнести проблему граничных условий, содержащих условия на производные. Если концепция конечно-разностного подхода проводится последовательно, то на границе нужно вводить особые операторы. При этом, чтобы сохранить порядок аппроксимации задачи (большинство применяемых схем имеют на равномерной сетке порядок аппроксимации по пространству не ниже второго), эти операторы должны быть весьма сложными. Чтобы обойти данную проблему, при построении конечно-разностных схем все чаще прибегают к интегральным формулировкам задач (интегро-интерполяционный подход [76], вариационно-разностный метод и т.д.).

4.4. Вариационно-разностные методы. Эти методы отличаются от конечно-разностных тем, что в их основе лежит не дифференциальная, а вариационная задача. Близок к данному методу интегро-интерполяционный подход [76]. Под вариационно-разностными часто понимают проекционно-сеточные методы, т.е. метод конечного

элемента. Однако в целом вариационно-разностные методы к ним не сводятся. Будем считать вариационно-разностным любой метод, основанный на сеточной аппроксимации вариационного уравнения вида (3.2) или вариационной задачи для некоторого функционала. При этом построение базисных функций необязательно. Таким образом, не любую вариационно-разностную схему можно считать схемой МКЭ и наоборот. Построение разрешающих соотношений схемы сводится к конечно-разностной аппроксимации вариационного уравнения (3.2) и приравнивания нулю коэффициентов при вариациях узловых перемещений. При этом интеграл представляется в виде суммы интегралов по ячейкам разностной сетки, которые в свою очередь выражаются приближенно через значения перемещений в узлах, принадлежащих ячейке. Данный класс схем существенно уже конечно-разностных. Среди них встречается много хороших схем, что свидетельствует о преимуществах вариационного подхода. Отметим основные достоинства вариационно-разностных методов. Возможность использования неравномерных и нерегулярных сеток. При этом необходимо определить лишь инцидентность узлов и ячеек. Единообразный расчет внутренних и граничных узлов. Меньшие по сравнению с конечно-разностным методом требования к гладкости функций.

Указанные свойства делают вариационно-разностные методы очень удобными для программной реализации. Их можно применять для областей сложной формы. Полученные в результате разностные схемы по форме аналогичны разностной схеме Уилкинса [83] и обладают сходными свойствами. Вместе с тем сам по себе вариационно-разностный метод не является панацеей от всех недостатков. Для высокого качества схем необходимо выполнение ряда дополнительных требований, о чем будет сказано ниже. Еще одним недостатком вариационно-разностных схем является возможность возникновения в них (как и в конечно-разностных схемах) эффекта неустойчивости "песочные часы" [83] при использовании ячеек с числом узлов больше минимально возможного количества (трех в двухмерных задачах, четырех в трехмерных).

4.5. Метод конечного элемента. Метод ведет свое происхождение от методов сил и перемещений в строительной механике, а также от методов Рэлея – Ритца и Бубнова – Галеркина. Отличительной чертой МКЭ по сравнению с конечно-разностными методами является то, что в нем неизвестные функции определены везде в области определения задачи, а не в дискретном наборе точек. При этом в качестве исходных уравнений для МКЭ могут использоваться как дифференциальные уравнения, так и вариационные принципы в зависимости от метода построения разрешающей системы уравнений (коллокации, взвешенных невязок, Рэлея – Ритца – Галеркина). Однако в большинстве случаев в задачах механики используется вариационный подход, что послужило основанием причислить МКЭ к вариационно-разностным методам. Благодаря своей физической наглядности, высокой алгоритмичности и удобству применения в областях сложной формы МКЭ получил широкое распространение, особенно в задачах статики. На его основе построено большое количество удачных численных схем. При этом многие из них имеют высокий порядок аппроксимации (эрмитовы, сирендиоловы и т.п. элементы) и по своей сложности многократно превышают известные конечно-разностные схемы. И только благодаря специфике подхода МКЭ они достаточно просто реализуются, в том числе и на неравномерных и нерегулярных сетках. Еще одним достоинством МКЭ является простота введения ограничений на вид неизвестных функций, наложения кинематических связей и т.п. (например, введение гипотез теории оболочек) непосредственно в дискретной модели независимо от исходных уравнений. Таким образом, МКЭ является удобным инструментом математического моделирования, а не просто одним из численных методов.

Применительно к задачам динамики конструкций у МКЭ в общем те же проблемы, что и у конечно-разностных и вариационно-разностных методов. Это в первую очередь проблема малого параметра или вырождения задачи. Подробно эта проблема обсуждается в [40]. Ряд проблем возникает при решении динамических задач. Послед-

довательный конечноэлементный подход должен относиться ко всей пространственно-временной области переменных. Реально же в абсолютном большинстве случаев используются неизвестные функции, непрерывные по пространству и дискретные по времени. Таким образом, по временной координате имеем дело не с конечноэлементной, а с конечноразностной аппроксимацией. К тому же, если эта аппроксимация согласована с пространственной конечноэлементной, можно получить только неявные схемы в силу заполненности матрицы масс. Для построения явных конечноэлементных схем приходится при аппроксимации ускорений переходить к несогласованным диагональным матрицам масс, вносящим определенные противоречия в конечноэлементный подход. Еще одной проблемой в случае использования явных схем является их устойчивость. Если использовать явные схемы высокого порядка точности, ограничения на временной шаг и гладкость функций будут чрезесчур жесткими. Поэтому в динамических задачах в сочетании с явными схемами приходится ограничиваться простейшими – линейными и билинейными конечноэлементами, особенно для нелинейных задач. Это же замечание справедливо и для неявных схем при использовании итерационных процедур решения полученных систем уравнений [59].

Сделаем еще два общих замечания, касающихся численных схем всех видов. Первое из них касается порядка точности. Наибольшее распространение в задачах динамики конструкций (и во многих других) получили схемы второго порядка точности. В газовой динамике распространены схемы первого порядка или гибридные схемы [38, 87], обладающие свойством монотонности. Это в первую очередь связано с возникновением в этих задачах ударных волн и необходимостью слаживания численных решений. Поскольку возникновение ударных волн в тонкостенных конструкциях невозможно, то решения задач с гладкими начальными и граничными данными остаются гладкими и содержат только изначально существующие разрывы. Поэтому проблема монотонности отходит на второй план. Вырождение задач расчета тонкостенных конструкций (см. ниже) требует применения разностных схем не ниже второго порядка аппроксимации, поскольку даже многие схемы второго порядка являются условно аппроксимирующими [18–20, 30]. Применение схем более высокого порядка необоснованно по следующим причинам. Повышение порядка схем выше второго по временной координате (а пространство и время в гиперболических системах равноправны) приводит к существенному усложнению схем и проблемам с их устойчивостью. Наиболее часто используемые модели оболочек Кирхгофа – Лява и Тимошенко также имеют второй порядок точности относительно толщины оболочки и при использовании шага сетки порядка толщины нет смысла применять более точную схему их реализации [62]. Отметим также, что класс задач с гладкими решениями, довольно узок [59]. Таким образом, построение схем с высоким (выше второго) порядком аппроксимации хотя и привлекательно, но не нашло до настоящего времени широкого практического применения.

Еще одной общей проблемой для численных методов всех вышеперечисленных классов зачастую является отсутствие возможности их теоретического сравнительного анализа с единой точки зрения. В первую очередь это касается схем, базирующихся на разных постановках задач – вариационной и дифференциальной. Так, существует разрыв между теориями разностных схем и метода конечного элемента. Причины этого иногда объективны, поскольку теория разностных схем в отличие от МКЭ оперирует практически только с задачами на регулярных сетках. Но в случае применения регулярных и особенно равномерных конечноэлементных сеток разрыв между этими теориями может быть преодолен [46, 85], и схемы МКР и МКЭ после преобразования могут быть исследованы единными методами. В целом решение задачи эквивалентных преобразований численных схем позволило бы гораздо более осознанно подходить к их отбору, оценивая аппроксимацию различных форм записи исходных задач [77]. Но ее решение связано с установлением сеточных аналогов ряда формул и теорем математического анализа. На настоящий момент в этом направле-

нии можно отметить только отдельные успехи: разностные аналоги формул интегрирования по частям и Грина [20, 54, 59, 70], формулы повторного дифференцирования [20, 66, 67], ряд других соотношений [66, 67].

5. Проблемы, возникающие при численном решении задач динамики тонкостенных конструкций. Проблемы можно классифицировать по источнику их возникновения и степени общности: статические (т.е. имеющие место уже при решении задач статики) и собственно динамические; линейные и нелинейные; общие для всех задач механики сплошных сред и специфические для задач динамики тонкостенных конструкций. Рассмотрим их в порядке убывания важности и специфичности для задач динамики оболочек.

5.1. Проблема вырождения задачи. Данная проблема относится как к динамическим, так и к статическим задачам. Задачи теории оболочек относятся к вырожденным (теория Кирхгофа – Лява) или вырождающимся (теория типа Тимошенко и неклассические теории) [30]. Первые из них – формально параболического типа (фактически – уравнения типа колебаний), вторые – гиперболического с малым параметром. Если рассмотреть свободные изгибные колебания пластин типа Тимошенко и Кирхгофа – Лява, то асимптотически при стремлении длины волны к бесконечности или толщины оболочки к нулю при фиксированной длине волны обе теории совпадают. Ту же асимптотику имеет и решение, полученное для тонкого упругого слоя на основе трехмерной теории [63]. Проследим процесс вырождения на одномерных уравнениях теории пластин типа Тимошенко [81]. Запишем систему в безразмерном виде

$$a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{12a}{\eta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad a = \frac{k^2(1-v)}{2} \quad (5.1)$$

Здесь w – поперечное перемещение, ψ – угол поворота, η – толщина пластинки, k^2 – коэффициент в теории оболочек типа Тимошенко, v – коэффициент Пуассона. Подставляя в систему решение в виде монохроматической волны $w = A \sin(\alpha x + \omega t)$, $\psi = B \cos(\alpha x + \omega t)$, получаем для собственной частоты два решения, соответствующие изгибным и сдвиговым волнам:

$$\omega^2(\lambda) = \frac{6a}{\eta^2} + \frac{a+1}{L^2} \pi^2 \pm \sqrt{\left(\frac{6a}{\eta^2} + \frac{a+1}{L^2} \pi^2 \right)^2 - \frac{4a}{L^4} \pi^4} \quad (5.2)$$

(здесь сделана замена $\alpha = \pi/L$, где L – длина полуволны). Обратим внимание, что для волн большей амплитуды частота, являющаяся меньшим по модулю корнем биквадратного уравнения, получается в виде разности двух близких величин и при этом имеет порядок η/L . Поэтому нужно с особой тщательностью подходить к построению численных схем, чтобы в них погрешности порядка $(h/\eta)^2$ не привели к фатальным последствиям. Ранние работы по численному решению задач теории оболочек с использованием модели Тимошенко [32, 41, 68] дают пример неудачной конечноразностной схемы

$$a \left[\frac{1}{h^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) + \frac{1}{2h} (\psi_{i+1}^j - \psi_{i-1}^j) \right] = \frac{1}{\tau^2} (w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}) \\ \frac{1}{h^2} (\psi_{i+1}^j - 2\psi_i^j + \psi_{i-1}^j) - \frac{12a}{\eta^2} \left[\frac{1}{2h} (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j) + \psi_i^j \right] = \frac{1}{\tau^2} (\psi_i^{j+1} - 2\psi_i^j + \psi_i^{j-1}) \quad (5.3)$$

Анализ схемы (5.3), проведенный в [19] приводит к выводу, что данная схема дает приемлемую точность (независимо от характера решения) лишь при малом (меньше толщины) шаге пространственной сетки, поскольку она содержит погрешности порядка квадрата отношения шага сетки к толщине пластины и, следовательно, сходится только при стремлении этого параметра сеточной задачи к нулю. Реально же

допустимая величина этого отношения порядка 0.3, при этом погрешность по низшим собственным частотам равна примерно 5%. Другим примером неудачной схемы для данной задачи является схема метода конечного элемента с линейной аппроксимацией, которая после преобразования к конечноразностной форме имеет вид [84]:

$$a \left[\frac{1}{h^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) + \frac{1}{2h} (\Psi_{i+1}^j - \Psi_{i-1}^j) \right] = \frac{1}{\tau^2} (w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}) \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{h^2} (\Psi_{i+1}^j - 2\Psi_i^j + \Psi_{i-1}^j) - \frac{12a}{\eta^2} \left[\frac{1}{2h} (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j) + \frac{1}{4} (\Psi_{i+1}^j + 2\Psi_i^j + \Psi_{i-1}^j) \right] -$$

$$-\frac{12}{\eta^2} \frac{1}{12} (\Psi_{i+1}^j - 2\Psi_i^j + \Psi_{i-1}^j) = \frac{1}{\tau^2} (\Psi_i^{j+1} - 2\Psi_i^j + \Psi_i^{j-1})$$

и обладающая аналогичным недостатком. Примером удачной численной схемы для данной задачи является схема [22], построенная вариационно-разностным методом

$$a \left[\frac{1}{h^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) + \frac{1}{2h} (\Psi_{i+1}^j - \Psi_{i-1}^j) \right] = \frac{1}{\tau^2} (w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}) \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{h^2} (\Psi_{i+1}^j - 2\Psi_i^j + \Psi_{i-1}^j) - \frac{12a}{\eta^2} \left[\frac{1}{2h} (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j) + \frac{1}{4} (\Psi_{i+1}^j + 2\Psi_i^j + \Psi_{i-1}^j) \right] =$$

$$= \frac{1}{\tau^2} (\Psi_i^{j+1} - 2\Psi_i^j + \Psi_i^{j-1})$$

Отметим, что все приведенные схемы имеют второй порядок точности и отличаются лишь аппроксимацией одного слагаемого.

Данная особенность не является присущей исключительно модели Тимошенко. При использовании для данной задачи других математических моделей (например, уравнений теории упругости в сочетании с вытянутыми вдоль срединной поверхности оболочки ячейками) также могут получаться неудачные численные схемы. Применение же мелких пространственных сеток (с шагом меньше толщины оболочки) для данных задач является неэффективным, поскольку реальные практически значимые длины волн в них в несколько раз превышают толщину оболочки.

Этот эффект неоднократно описан под разными названиями в различных работах, особенно по методу конечного элемента. Для устранения указанного недостатка использовались: сокращенное интегрирование [92], способ двойной аппроксимации [30], другие подходы [18–20, 61, 78]. Данная проблема в МКЭ подробно обсуждается в [40]. Близко к ней лежит проблема линейного треугольного оболочечного элемента, неудачные опыты с которым по сути привели к отказу от его использования. Подробный анализ причин недостатков схем на треугольных ячейках приведен в [20]. В целом, резюмируя вышесказанное по данной проблеме, отметим следующее. Задачи динамики тонкостенных конструкций являются вырожденными или вырождающимися, т.е. содержащими малый параметр – толщину. В последнем случае низшие и важнейшие частоты длинноволновых процессов получаются как разность близких больших величин. Поэтому малые относительные погрешности этих больших величин могут приводить к большим относительным погрешностям их разности. В связи с этим при построении численных схем следует либо добиваться высокого порядка точности (выше второго по пространственным координатам) и при этом влияние этих малых погрешностей будет действитель но мало, либо для схем второго порядка точности очень тщательно следить за согласованностью погрешностей разных членов уравнений. Все рассмотренные выше приемы посвящены последнему. В итоге же неудачные схемы отличаются от удачных отсутствием равномерной сходимости по параметру сеточной задачи h/η , где h – шаг сетки по пространственным координатам,

η – толщина оболочки. Реально эти недостатки проявляются при использовании сдвиговой модели оболочки для $h/\eta > 0.3$. При использовании трехмерной теории неудачные схемы будут работать плохо на сетках с параметром $h_{\max}/h_{\min} > 5$. Проведем сравнение удачных и неудачных схем с точки зрения эффективности. Увеличение шага пространственной сетки в 2 раза позволяет на двумерной задаче уменьшить число пространственных узлов в 4 раза, во столько же раз уменьшается число операций на одном временном шаге. Если реально для широкого класса задач удается без заметной потери точности и трудоемкости вычислений увеличить шаг в 5–10 раз, то эффект очевиден.

5.2. Динамические проблемы. Рассмотрим трудности, возникающие исключительно при решении динамических задач. Во-первых, исследователь должен сделать выбор между явными и неявными схемами. Общеизвестно, что у явных схем временной шаг определяется устойчивостью схемы, а у неявных абсолютно устойчивых – точностью. Заметим, что при решении систем итерационными методами в неявных схемах могут возникать ограничения на временной шаг, близкие к условию Куранта – Фридрихса – Леви (К–Ф–Л) [39]. При этом нужно учитывать, что трудоемкость неявных схем на шаге по времени больше. Для основательного сравнительного анализа двух подходов рассмотрим устойчивость явных схем решения волнового уравнения, задач теории упругости и теории оболочек на примере простейшей, но эффективной и распространенной схемы "крест".

Рассмотрим систему уравнений гиперболического типа, записанную в операторном виде

$$Lu = \partial^2 u / \partial t^2 \quad (5.6)$$

Здесь $u = u(x, t)$ – известная функция, $x \in \Omega \subset R^n$, $t \in [0, +\infty)$, L – линейный эллиптический оператор в Ω . Также рассмотрим соответствующие системе (5.6) полуdiscретную систему

$$L_h u = \partial^2 u / \partial t^2 \quad (5.7)$$

и дискретную систему (схему "крест"):

$$L_h u = D_h u \quad (5.8)$$

Здесь L_h – сеточный оператор, аппроксимирующий оператор L и действующий в пределах одного временного слоя, D_h – оператор второй разностной производной по времени

$$(D_h u)_j^k = \frac{1}{\tau^2} (u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1})$$

где $u_j^k = u(x_j, t^k)$ – сеточная функция, j – мультииндекс.

Пусть собственные числа λ оператора L_h ограничены: $\lambda \leq \beta(L_h)$, тогда разностная схема (5.8) будет устойчива при условии [59]:

$$\tau \leq 2 / \sqrt{\beta(L_h)} \quad (5.9)$$

Условие устойчивости схемы (5.8) можно получить также из полудискретной системы (5.7). Подставляя в нее решения в виде $e^{i\omega t} \cdot \varphi(j)$ (где $\varphi(j)$ – собственные функции оператора L_h , i – мнимая единица), получим набор собственных частот $\omega(\varphi)$. Из (5.9) следует другая форма записи условия устойчивости схемы (5.8):

$$\tau \leq 2 / \omega_{\max} \quad (5.10)$$

Условия (5.9), (5.10) являются необходимыми и достаточными. Также они связывают спектр сеточной задачи с ее временным шагом.

Другим необходимым условием устойчивости явной схемы "крест" является известное условие К–Ф–Л, одной из возможных формулировок которого является следующее утверждение: за один шаг волна не должна проходить более одной ячейки разностной сетки. Исследования устойчивости разностных схем типа "крест" для многомерного волнового уравнения, плоской и трехмерной задач теории упругости показывают, что данное условие, как правило, является и достаточным при его правильной геометрической интерпретации. Справедливы следующие оценки (см. [18, 21, 59]). Двумерное волновое уравнение с оператором Лапласа на пятиточечном шаблоне (на ортогональной сетке):

$$\tau \leq \frac{h_1 h_2}{c \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad (5.11)$$

То же на девятиточечном шаблоне:

$$\tau \leq \min(h_1, h_2)/c \quad (5.12)$$

Плоская задача теории упругости (параллелограммные ячейки):

$$\tau \leq \min(h_1, h_2)/c \quad (5.13)$$

Плоская задача теория упругости (треугольные ячейки):

$$\tau \leq \min(h_1, h_2, h_3)/c \quad (5.14)$$

Трехмерное волновое уравнение (семиточечный шаблон, ортогональная сетка):

$$\tau \leq \frac{h_1 h_2 h_3}{c \sqrt{h_1^2 h_2^2 + h_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2}} \quad (5.15)$$

То же, 27-точечный шаблон:

$$\tau \leq \min(h_1, h_2, h_3)/c \quad (5.16)$$

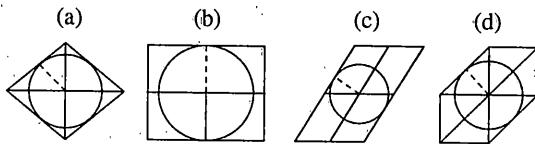
В (5.14) h_1, h_2, h_3 – высоты треугольной ячейки, в (5.13) h_1, h_2 – высоты параллелограммной ячейки, в остальных формулах h_1, h_2, h_3 – шаги ортогональной разностной сетки.

На фиг. 1 представлены шаблоны некоторых разностных схем, оценки которых приведены. Здесь же показаны в виде окружностей границы областей зависимости исходных дифференциальных задач при максимально допустимом временном шаге. Случаи $a-d$ соответствуют задачам с оценками (5.11)–(5.14) соответственно. Штриховыми линиями показаны геометрические величины, входящие в формулы оценок устойчивости. Заметим, что во второй и третьей задачах в зависимости от аппроксимации производных ограничения на временной шаг могут быть более жесткими. В целом же можно отметить, что схемы, как правило, устойчивы при выполнении условия К–Ф–Л, где в качестве линейного размера берется наименьший из характерных размеров ячейки разностной сетки. Это подтверждают приведенные примеры.

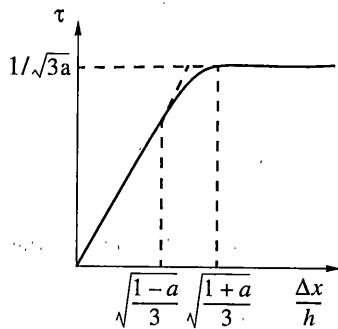
Рассмотрим оценку устойчивости рассмотренной выше схемы (5.5) решения одномерной задачи теории оболочек. Она имеет вид [18]:

$$\tau \leq \begin{cases} \Delta x, & \Delta x/h \leq \sqrt{1/3a - 1/3} \\ h/\sqrt{3a}, & \Delta x/h \geq \sqrt{1/3a + 1/3} \\ 2/\omega_{\max}, & \Delta x/h \in (\sqrt{1/3a - 1/3}, \sqrt{1/3a + 1/3}) \end{cases} \quad (5.17)$$

где ω_{\max} – максимальная собственная частота полудискретной системы, имеющая в этом диапазоне параметров достаточно сложный аналитический вид [18]. График предельных значений временного шага приведен на фиг. 2. Из (5.17) и приведенного графика следует, что условие устойчивости приближенно (с погрешностью не более



Фиг. 1



Фиг. 2

5%) состоит в выполнении неравенства $\tau \leq \min(\Delta x, h/\sqrt{3}a)$, а если учесть, что параметр a для реальных материалов близок к $1/3$, то фактически получаем условие, близкое к условию К–Ф–Л для двумерной ячейки $\tau \leq \min(\Delta x, h)$. Таким образом, условие К–Ф–Л практически во всех рассмотренных случаях является не только необходимым, но и достаточным.

Поскольку временной шаг неявных схем определяется точностью, обратим внимание на спектр задачи. Выбор временного шага (так же, как и пространственного) естественным образом обрезает сверху спектр частот и снизу – длины волн по пространству. Поэтому, если важны коротковолновые процессы, шаг нужно брать мелким, а в этом случае эффективнее явные схемы. Если не важны – эффективнее неявные схемы.

Как правило, спектр задачи связан со временем процесса. Коротковолновые процессы – это процессы ударные, импульсные, содержащие крутые фронты. Как правило, они и кратковременные, если учитывать диссиацию энергии. В длительных процессах коротковолновая составляющая обычно несущественна. Отсюда можно сделать вывод, что явные схемы предпочтительнее неявных для кратковременных процессов, и конкурентоспособны с ними в некотором промежуточном диапазоне. Для длительных (более периода по основной форме) колебательных процессов с гладкими решениями следует отдать предпочтение неявным схемам.

Отметим связь геометрии конструкций с эффективностью явных или неявных схем. Наличие у конструкций различных мелких геометрических особенностей (отверстий, выточек, жестких включений и т.п.) требует более точного описания напряженно-деформированного состояния в их окрестности, а соответственно и более мелкой сетки. В этом случае эффективность явных схем падает в связи с условием К–Ф–Л. Задачи со сложной геометрией являются жесткими [72], поскольку необходимо учитывать разномасштабные по пространству (соответственно и по времени) процессы. В целом, чем проще геометрия, тем выше эффективность явных схем по сравнению с неявными.

Еще один аспект при выборе явных или неявных схем – физическая нелинейность. При пластическом деформировании материала в сочетании с неявными схемами неизбежно приходим к необходимости решения на каждом временном слое нелинейной системы уравнений, а следовательно к итерационному процессу. К тому же, воз-

можность упругих разгрузок накладывает некоторые ограничения на временной шаг. Следовательно, при решении физически нелинейных задач сравнительная эффективность явных схем возрастает.

Подводя итог, отметим необходимость учета всех вышеперечисленных факторов при выборе явной или неявной схемы.

5.3. Способы повышения эффективности численных методов, использующих явные схемы. При решении большинства задач для тонких оболочек достаточная точность достигается при использовании пространственного шага сетки вдоль срединной поверхности порядка толщины оболочки. Если применяется трехмерная теория упругости, выгодно использовать ячейки, сплюснутые по толщине. В том и другом случаях условия устойчивости явных схем становятся чрезесчур обременительными. Этот факт был отмечен давно, и рядом авторов предпринимались попытки тем или иным способом увеличить временной шаг, в целом оставаясь в рамках явного подхода [5, 17–19, 29, 36, 45, 47, 86, 89]. Все они так или иначе основаны на противоречии между спецификой волновых процессов в оболочках и явными схемами. Суть его в том, что первыми численную устойчивость теряют формы колебаний, направленные перпендикулярно срединной поверхности оболочки, т.е. те, для которых волновая динамика фактически отсутствует. Предлагались следующие подходы: с выделением высокочастотных форм – работа [45], в которой рассмотрена сеточно-характеристическая схема с выделением колебаний по толщине оболочки; с подавлением высокочастотных колебаний – работы [17–19].

Проанализируем данные подходы с точки зрения спектра задачи. Пусть собственные частоты полудискретной системы уравнений, соответствующей разностной схеме, находятся в пределах $\omega \in [0, \theta_1]$, где θ_1 определяется главным образом размерами ячейки разностной сетки. Оценка временного шага схемы при этом определяется условием устойчивости (5.10). Предположим, что существенная для данной задачи часть спектра находится в пределах $[0, \theta_0]$, где $\theta_0 < \theta_1$. Последнее неравенство является абсолютно необходимым, так как в противном случае разностная задача перестаёт аппроксимировать дифференциальную. Регуляризация разностной схемы состоит в том, чтобы искусственно понизить максимальную собственную частоту полудискретной системы до некоторой величины $\theta^* \in [\theta_0, \theta_1]$, что в свою очередь позволит вести устойчивый счет с шагом по времени $\tau^* = 2/\theta^*$, в θ_1/θ^* раз большим, чем у исходной разностной схемы. Тем самым эффективность численной методики соответственно повышается в θ_1/θ^* раз. Пределы повышения эффективности путем регуляризации разностной схемы определяются отношением θ_1 к θ_0 . По сути все вышеуказанные подходы к повышению эффективности схем сводятся либо к исключению части спектра из задачи и отдельной обработки высокочастотных форм колебаний [45], либо к понижению частот у этих форм до нужного уровня θ^* . В любом случае влияние регуляризации на длинноволновые процессы должно быть незначительно. Исходя из соотношения временных шагов схем с регуляризацией и без нее, эти подходы позволяют реально получить выигрыш во времени расчета в несколько раз.

Охарактеризуем кратко прочие проблемы решения задач динамики конструкций. Они так или иначе присутствуют и при решении задач других классов: геометрически нелинейные проблемы и, в частности, проблема смещения как жёсткого целого; проблема неустойчивости "песочные часы"; проблема особых точек систем координат.

5.4. Проблемы геометрической нелинейности. Эти проблемы связаны с двумя факторами: наличием больших перемещений и углов поворота и использованием криволинейных систем координат. В совокупности они порождают проблему смещения тела как жёсткого целого, являющуюся индикатором правильности геометрического описания процесса деформирования. Для их решения наиболее естественно применять лагранжев метод решения в общем евклидовом базисе с пошаговой перестройкой геометрии. Применение эйлерова подхода в чистом виде к задачам данного класса едва

ли разумно, а лагранжев подход с использованием нелинейных тензоров деформаций в криволинейных координатах [23] ограничен задачами со средними прогибами и углами поворота. Данные проблемы поднимались в работах [40, 78].

5.5. Проблема неустойчивости "песочные часы" или мод нулевой энергии. Данная проблема возникает в конечно-разностных и вариационно-разностных схемах [83] и связана с неполнотой систем разностных операторов. Она возникает, когда число узлов в ячейке превышает число используемых разностных операторов для аппроксимации производных. Типичные случаи – схема на четырехугольных ячейках в плоском случае (три оператора, четыре узла, одна мода нулевой энергии) и шестиугольная ячейка в трехмерных задачах (четыре оператора, восемь узлов, четыре моды нулевой энергии). При этом в ячейке возникает как-бы свободно перемещающийся кинематический механизм, закрепление которого происходит только в граничных узлах с заданными условиями в перемещениях. Поэтому в некоторых задачах неустойчивость "песочные часы" не возникает (это задачи с граничными условиями в перемещениях и сравнительно небольшим числом узлов сетки). Для подавления этой неустойчивости было предложено использовать искусственную вязкость специального типа [56, 88], повысить порядок аппроксимации по пространственным переменным [91], вводить в расчеты дополнительные треугольные (тетраэдральные) ячейки [14], вычислять моментные составляющие деформаций с помощью аппроксимации линейными функциями [15]. В последнем варианте можно получить дискретные соотношения, аналогичные принятым в шестимодальном варианте теории оболочек типа Тимошенко, и при отсутствии локальных импульсных воздействий решать нелинейные задачи динамики тонкостенных конструкций на сетке с одним слоем конечных элементов по толщине. Такой подход позволяет в рамках единого алгоритма исследовать нестационарное деформирование составных конструкций, включающих массивные тела и оболочки. Другие подходы к устранению эффекта "песочных часов" предлагаются в работах [42, 74, 90].

5.6 Проблема особых точек систем координат. Эта проблема имеет место при использовании криволинейных систем координат, и, в частности, при решении осесимметричных задач вблизи оси вращения. В этом случае якобиан обращается в нуль, уравнения вырождаются и необходимо поставить граничные условия на оси. В результате решения по стандартной методике могут получаться большие искажения решения. Для решения данной проблемы применяются приемы, позволяющие их уменьшить. Вариант такого подхода, связанный с заменой переменных, приведен в [11].

6. Специфика расчета многослойных конструкций и конструкций из композитных материалов. При расчете многослойных конструкций и конструкций из композитных материалов композит обычно заменяется некоторой сплошной средой с усредненными свойствами (как правило, анизотропной), т.е. принимается гипотеза сплошности на мезоуровне. Подходы к такому усреднению свойств описаны в ряде книг [25, 27, 28, 34, 69, 80]. При построении математических моделей многослойных композитных оболочек используются различные комбинации кинематических и статических гипотез, что привело к созданию множества расчетных схем и уравнений. Выделим два основных направления принятия гипотез. Первое – метод эффективного модуля, когда принимается гипотеза о поведении всего пакета слоев в целом, при этом пакет считается однородным с некими усредненными свойствами. Обычно при этом подходе используется и какая-либо теория оболочек. Второе направление – принятие гипотез для каждого отдельного слоя. Один из его вариантов – гипотеза ломаной [43], когда для каждого слоя принимается предположение о постоянстве деформаций поперечного сдвига. Численное решение задач на базе гипотезы эффективного модуля принципиально не отличается от расчета однородных оболочек. Также отметим, что по сравнению с однородными оболочками композитные и многослойные как правило обладают меньшей сдвиговой жесткостью, что благоприятно сказывается на устойчивости разностных схем. Если гипотезы принимаются для каждого отдельного слоя, то возникают проблемы с устойчивостью численных схем, особенно при наличии

тонких жестких слоев, поскольку именно они дают самое сильное ограничение на шаг интегрирования по времени. В последнем случае выгодно применять численные схемы, неявные по толщине оболочки [5, 16, 17, 86], позволяющие существенно повысить временной шаг.

7. Решение контактных задач. Контактные задачи взаимодействия деформируемых тел и конструкций рассматриваются как несвободные вариационные задачи [12], решения которых на контактных поверхностях должны удовлетворять условиям непроникания и равенству сил действия и противодействия контактирующих тел. В задачах соударения оболочек время соударения имеет порядок времени пробега волны сжатия по толщине и для достижения достаточной точности удовлетворения граничных условий необходимо учитывать обжатие оболочки и шаг сетки вдоль образующей брать менее толщины оболочки. Методы, разработанные для расчета контакта массивных тел [31, 44] по этим причинам требуют существенной корректировки. Кроме условия непроникания некоторые авторы [51] используют другие типы граничных условий: введение контактной силы, пропорциональной объему пересечения контактирующих тел или теорию стереомеханического удара. Отметим, что при решении контактных задач динамики оболочек требуется более точное описание геометрии контактирующих оболочек в зоне контакта [12], а область применимости теорий оболочек, не учитывающих волновые процессы по толщине, весьма ограничена.

8. Пакеты прикладных программ. Решение в промышленных масштабах задач расчета реальных конструкций, имеющих прикладное значение, невозможно без создания специализированных пакетов прикладных программ. Реально в настоящее время можно говорить о следующих универсальных пакетах программ, предназначенные для решения задач нестационарной динамики оболочечных конструкций. Это американские пакеты ADINA, DINA2D, DINA3D и пакеты Динамика-2 и Динамика-3, разработанные в НИИ механики при Нижегородском университете. Отечественные пакеты уступают американским интерфейсом по причине отсутствия отечественных препроцессоров достаточно высокого уровня. Рассмотрим класс задач, решаемых с помощью пакета Динамика-2 [13] (аналогичные возможности имеет DINA2D): динамическое поведение многослойных конструкций при импульсных и тепловых воздействиях; динамическое поведение оболочечных конструкций под действием ударных волн в жидкости, газе, грунтовых средах; стационарное деформирование сосудов с жидкостью при внешних и внутренних взрывных воздействиях; удар и проникание жестких и деформируемых тел и конструкций в жидкость и грунт; соударение деформируемых тел и (или) оболочек. Имеющиеся у программного комплекса препроцессор и постпроцессор позволяют осуществлять ввод информации и вывод с использованием графических средств.

9. Заключение. В заключении отметим, что в данном обзоре представлена лишь малая часть литературы по численному решению задач нестационарной динамики конструкций. Авторы стремились отразить лишь основные тенденции и проблемы конструирования методик численного решения задач данного класса. Большая библиография по рассмотренной теме имеется в опубликованных книгах и обзорах последних (и более ранних) лет [6, 24, 51, 61, 82].

Авторы выражают благодарность Н.А. Абросимову и А.И. Кибецу за полезные обсуждения и консультации по теме данной работы.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (поддержка ведущих научных школ России) № 96-15-98156 и гранта РФФИ № 99-01-00132.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.
2. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Исследование упругопластических процессов деформирования пластин и оболочек вращения при импульсном нагружении в неклассической постановке // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 1. С. 73–79.

3. Айнола Л.Я. Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек // Изв.АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. № 3. С. 337–344.
4. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. № 1. С. 3–63.
5. Анисимов С.А. Векторное расщепление плоской динамической задачи теории упругости в областях из произвольных четырехугольников // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. Вып. 75. С. 17–26.
6. Аннин Б.Д. Механика деформируемого твердого тела в СО РАН в 1988–1997 годы // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 4. С. 28–45.
7. Афанасьев С.Б., Козлов Е.А. Алгоритм решения двумерных волновых упругопластических задач методом Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация пластичности. Горький: Горьк. ун-т, 1987. Вып. 36. С. 91–100.
8. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
9. Баженов В.Г. Численное исследование нестационарных процессов деформации упругопластических оболочек // Проблемы прочности. 1984. № 11. С. 51–54.
10. Баженов В.Г. Численное моделирование нестационарных задач динамики упругопластических конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. М.: Товарищ. науч. изд. КМК, 1995. вып. 53. С. 17–30.
11. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Ломунов В.К. Модифицированный вариационно-разностный метод решения осесимметричных задач динамики упругопластических конструкций с заполнителем // Тр. 17-й Международн. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Казань, 1996. С. 172–178.
12. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Петров М.В. Численное решение задач нестационарного взаимодействия упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: изд-во Горьк. ун-та, 1984. Вып. 28. С. 54–59.
13. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Кочетков А.В., Крылов С.В., Ломунов В.К. Пакет прикладных программ "Динамика-2" // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация исследований. Горький: изд-во Горьк. ун-та, 1987. Вып. 36. С. 4–13.
14. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 20–26.
15. Баженов В.Г., Кибец А.И., Тулинцев О.В. Применение моментной схемы МКЭ для анализа нелинейных трехмерных задач динамики массивных и оболочных элементов конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Нижний Новгород: изд-во Нижегор. ун-та, 1991. Вып. 47. С. 46–53.
16. Баженов В.Г., Прокопенко М.Б. Численное решение осесимметричных нелинейных нестационарных задач динамики составных упругопластических конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. Нижний Новгород: изд-во Нижегород. ун-та, 1991. Вып. 49. С. 55–63.
17. Баженов В.Г., Соловьев В.П. Численное моделирование нестационарных осесимметричных волновых процессов в многослойных композитных пластинах и оболочках вращения // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. Горький: изд-во Горьк. ун-та, 1989. Вып. 43. С. 80–88.
18. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек // Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. 159 с.
19. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. О конечно-разностном решении волновых уравнений теории оболочек типа Тимошенко // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: изд-во Горьк. ун-та, 1981. Вып. 19. С. 41–50.
20. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Об индексной коммутативности численного дифференцирования // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 5. С. 662–674.
21. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы "крест" решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек // Прикладные проб-

- лемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Горький: изд-во Горьк. ун-та. 1984. Вып. 28. С. 15–22.
22. Баженов В.Г., Шинкаренко А.П. Вариационно-разностный метод решения двумерных задач динамики упругопластических оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Горький. изд-во Горьк. ун-та. 1976. Вып. 3. С. 61–69.
 23. Баженов В.Г., Шинкаренко А.П. Упругопластическое деформирование составных оболочных конструкций при импульсных воздействиях // Проблемы прочности. 1981. № 3. С. 25–29.
 24. Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А. Динамические задачи нелинейной теории оболочек. Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука, Физматлит, 1998. 463 с.
 25. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Ракардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
 26. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
 27. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
 28. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
 29. Богульский И.О. Об одной схеме расщепления решения двумерной задачи динамики твердого тела. Красноярск. 1989. С. 38. Деп. в ВИНИТИ 21.03.89. № 1816–B89.
 30. Болдычев В.П. Повышение эффективности метода конечных элементов при решении вырождающихся задач // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1983. Вып. 42. С. 38–48.
 31. Бойко В.М., Гулидов А.И., Папырин А.И., Фомин В.Н., Шитов Ю.А. Экспериментально-теоретическое исследование отскока коротких стержней от твердой преграды // ПМТФ. 1982. № 5. С. 129–133.
 32. Борисенко В.И., Клокова А.И. Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе // Прикл. механика. 1966. Т. 2. № 10. С. 29–35.
 33. Василюз К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
 34. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
 35. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 15. С. 69–148.
 36. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Численное решение задач динамического упругопластического деформирования тел вращения на основе локальной аппроксимации линейными полиномами // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы 7-й Всесоюз. конф., Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 233–247.
 37. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
 38. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
 39. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
 40. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: Физ.-техн. ин-т, 1990. 269 с.
 41. Гордиенко Б.А. О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей // Изв. АН СССР. МТТ, 1970. № 3. С. 143–148.
 42. Горельский В.А., Хорев И.Е., Югов Н.Т. Динамика трехмерного процесса несимметричного взаимодействия деформируемых тел с жесткой стенкой // ПМТФ. 1985. № 4. С. 112–118.
 43. Григорюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 1. С. 77–84.
 44. Гулидов А.И., Фомин В.М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ. 1980. № 3. С. 126–132.
 45. Евсеев Е.Г., Семенов А.Ю. Метод для численного решения уравнений динамики тонкостенных оболочек, основанный на выделении сильноосцилирующих компонент // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 4. С. 785–788.
 46. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
 47. Иванов Г.В. Построение схем решения плоской динамической задачи теории упругости на

- основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1978. Вып. 37. С. 63–77.
48. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
 49. Ковалев А.М. Линейная осесимметрическая реакция составной оболочки вращения на ударную нагрузку // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 1, С. 177–184.
 50. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
 51. Кошур В.Д., Немировский Ю.В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 199 с.
 52. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 4. С. 21–65.
 53. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела // Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. Вып. 5. С. 39–84.
 54. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
 55. Луговой П.З., Мукойд В.П., Мейши В.Ф. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1991. 278 с.
 56. Майнчен Дж., Сак С. Метод расчета "Тензор" // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 185–211.
 57. Малышев А.П. Исследование переходных процессов в оболочечных конструкциях на основе схемы с минимальной дисперсией // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С. 66–73.
 58. Малышев А.П., Паничкин В.И. Нелинейные волновые процессы в оболочках вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 175–178.
 59. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
 60. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
 61. Навал И.К., Пацюк В.И., Римский В.К. Нестационарные волны в деформируемых средах. Кишинев: Штиинца, 1986. 236 с.
 62. Новожилов В.В. Математические модели и точность инженерных расчетов // Судостроение, 1979. № 7. С. 5–12.
 63. Новожилов В.В., Слепян Л.И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 261–281.
 64. Нох В.Ф., СЭЛ' – совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 128–184.
 65. Одэн Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
 66. Остапенко В.В. О дивергентности конечно-разностных операторов // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН СССР, 1985. Вып. 70. С. 105–126.
 67. Остапенко В.В. О стандартной аппроксимации дифференциальных операторов // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. Вып. 72. С. 67–83.
 68. Пацюк В.И., Рыбакова Г.А., Сабодаши П.Ф. Волновые процессы в цилиндрической оболочке при неосесимметричном продольном ударе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 1. С. 35–42.
 69. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
 70. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
 71. Рузанов А.И. Численное моделирование процессов высокоскоростного проникания и пробивания с использованием бессеточных лагранжевых методик // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М.: Товарищ. науч. изданий КМК, 1999. С. 122–124.
 72. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
 73. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
 74. Садырин А.И. Применение треугольных сеток к решению динамических упругопластических задач // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем: Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1983. Вып. 24. С. 39–46.
 75. Садовский В.М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упругопластических тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1041–1048.
 76. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
 77. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 351 с.

78. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вищ. шк., 1982. 479 с.
79. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
80. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
81. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
82. Угодчиков А.Г., Баженов В.Г., Рузанов А.И. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. Т. 16. № 4. С. 129–149.
83. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
84. Чекмарев Д.Т. Анализ некоторых схем МКЭ теории оболочек типа Тимошенко // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М.: Товарищ. науч. изданий КМК, 1995. С. 124–132.
85. Чекмарев Д.Т. Построение конечноразностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М.: Товарищ. науч. изданий КМК, 1999. С. 129–138.
86. Шешенин С.В., Минхуэй Фу. Полунеявный метод решения задач теории упругости для тонкостенных осесимметрических тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 5. С. 78–85.
87. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. 364 с.
88. Шульц У.Д. Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 9–54.
89. Belytschko Ted, Lin Jerry I. Tsay Shen-Chin Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells // Comput. Meth. Appl. Mech. and Engng. 1984. V. 42. № 2. P. 225–251.
90. Flanagan D.P., Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control // Intern. J. Num. Meth. Eng. 1981. V. 17. № 5. P. 679–706.
91. Petschek A.G., Hanson M.E. Difference equation for two-dimensional elastic flow // J. Comp. Phys. V. 3. 1968. № 2. P. 307–321.
92. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Too J. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Intern. J. Num. Meth. Engng. 1971. V. 3. № 2. P. 275–290.

Н. Новгород

Поступила в редакцию
6.06.1999