

УДК 539.375

© 2001 г. В.И. КОНДАУРОВ

ТЕНЗОРНАЯ МОДЕЛЬ КONTИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ

Механика континуального разрушения (damage mechanics) [1], которая позволяет описать на феноменологическом уровне процессы зарождения и эволюции многочисленных рассеянных в теле дефектов типа микропор и микротрещин [2], находит в настоящее время все большее применение в теоретических и прикладных исследованиях. Традиционный подход [3–5] к построению моделей поврежденности базируется на ряде исходных посылок, схожих с предположениями теории пластического (вязкопластического) течения. К ним в первую очередь относятся: существование области в пространстве деформаций (напряжений), в которой материал ведет себя упругим (вязкоупругим) образом, без накопления поврежденности; зависимость деформационных и прочностных характеристик материала от степени поврежденности материала; скоростное упрочнение, связанное с влиянием скорости нагружения; наличие кинетики накопления поврежденности, зависящей от действующих напряжений и уровня поврежденности материала; существование критерия прочности, характеризующего предельное состояние элемента среды. Выбор критерия прочности и уравнения эволюции поврежденности, как правило, не связан с реологией материала, в лучшем случае предполагается зависимость от текущего значения температуры, скорости деформирования и некоторых других параметров истории нагружения.

В [6, 7] предложена модель, описывающая накопление поврежденности в упругих телах на основе энергетического подхода, аналогичного подходу Гриффитса [8] в механике изолированной трещины. Центральным моментом этого описания является учет локального баланса между изменением потенциальной энергии деформирования, высвобождающейся при образовании (росте) дефекта вследствие частичной разгрузки материала в окрестности этого дефекта, и затратами энергии на образование новых поверхностей микропор и микротрещин. Модель позволила исходить из "первых принципов", дополненных предположениями общего характера, описать ряд качественных эффектов, типичных для процессов накопления трещиноватости: наличие пороговых напряжений, при которых начинается развитие микродефектов; накопление поврежденности при действии как нормальных, так и касательных напряжений; разгрузка по упругому закону; существенное различие пороговых напряжений при сжатии и растяжении; эффекты дилатансии; образование "падающего" участка на диаграмме "напряжение – деформация" при развитой поврежденности. Недостаток модели – использование скалярного параметра поврежденности, что приводит только к объемным остаточным деформациям при всех видах напряженного состояния. Это может быть устранено введением тензора поврежденности второго и более высокого ранга, на необходимость использования которого для учета особенностей полей действующих напряжений было указано еще в [9].

В данной работе, которая является развитием [6, 7], рассматривается тензорная модель континуального разрушения упругих тел, которая позволяет описать упомянутые выше особенности поведения как следствия предположений общего

термодинамического характера. Предложены новые формы упругого потенциала и плотности эффективной поверхностной энергии среды, сформулировано уравнение эволюции тензора поврежденности, которое термодинамически согласовано с внутренней диссипацией энергии в процессах разрушения. Рассматривается критерий длительной прочности, связанный с реологической устойчивостью материала и определяющий условия, при которых слабый разрыв решения превращается в сильный, то есть происходит локализация деформаций. Выявлен эффект, связанный с образованием "зуба текучести" при небольших скоростях деформации материала. Показано существенное влияние скорости нагружения на прочностные свойства материала.

1. Основные уравнения. Рассматривается однородный начально-изотропный материал в приближении малых изотермических деформаций. Вязкими (пластическими) свойствами среды пренебрегается. Состояние материального элемента характеризуется величинами $(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega})$, где \mathbf{e} – симметричный тензор малых деформаций, которые отсчитываются от естественной начальной конфигурации тела, в которой материал ненагружен и неповрежден. Второго ранга симметричный тензор поврежденности $\boldsymbol{\omega}$ также считается малым. Реакция материала описывается функциями $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega})$, $u = u(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega})$, $u_f = u_f(\boldsymbol{\omega})$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений, u – упругий потенциал повреждающейся среды, который обращается в нуль в отсутствие деформации, u_f – плотность эффективной поверхностной энергии. Для указанных потенциалов постулируются выражения

$$\rho u(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} K I_1^2(\mathbf{e}) + \mu J^2(\mathbf{e}) + \nu I_1(\mathbf{e}) J(\mathbf{e}) - \alpha_1 I_1(\mathbf{e}) I_1(\boldsymbol{\omega}) - \alpha_2 J(\mathbf{e}) I_1(\boldsymbol{\omega}) - \alpha_3 I_1(\mathbf{e}) J(\boldsymbol{\omega}) - \alpha_4 J(\mathbf{e}) J(\boldsymbol{\omega}) - \alpha_0 \mathbf{e}' : \boldsymbol{\omega}' \quad (1.1)$$

$$\rho u_f(\boldsymbol{\omega}) = \rho u_f^0 + \gamma_1^0 I_1(\boldsymbol{\omega}) + \gamma_2^0 J(\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \beta_1 I_1^2(\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \beta_2 J^2(\boldsymbol{\omega}) \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{e}' = \mathbf{e} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{e}) \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{I}$ – девиаторы тензоров деформации и поврежденности, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга, $I_1(\mathbf{e}) = \mathbf{e} : \mathbf{I}$, $I_1(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} : \mathbf{I}$, $J(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}' : \mathbf{e}')^{1/2}$, $J(\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}' : \boldsymbol{\omega}')^{1/2}$ – инварианты тензоров \mathbf{e} и $\boldsymbol{\omega}$, ρ – плотность материала, которую вследствие малости деформации можно считать постоянной, K , μ – модули объемного сжатия и сдвига неповрежденного материала, ν – коэффициент разномодульности, который полагается в дальнейшем равным нулю, $\alpha_i > 0$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) – параметры, характеризующие уменьшение упругого потенциала при накоплении поврежденности, γ_1^0 , γ_2^0 , β_1 , β_2 – неотрицательные коэффициенты зависимости поверхностной энергии от инвариантов тензора поврежденности $\boldsymbol{\omega}$.

Выражения (1.1), (1.2) представляют собой разложения с точностью до членов второго порядка малости по инвариантам тензоров \mathbf{e} , $\boldsymbol{\omega}$. Отсутствие линейных членов $I_1(\mathbf{e})$ и $J(\mathbf{e})$ в (1.1) соответствует предположению об отсутствии напряжений в начальном состоянии среды. Члены нулевого и первого порядка малости, связанные с тензором $\boldsymbol{\omega}$, учитываются представлением (1.2) для эффективной поверхностной энергии $\rho u_f(\boldsymbol{\omega})$, которую можно рассматривать как аддитивное слагаемое [10] в выражении для упругого потенциала, зависящее от энергии, затраченной на образование дефектов материала.

Другой аспект введения эффективной поверхностной энергии связан со следующим обстоятельством. В моделях со скалярным параметром поврежденности ее рост обычно отождествляется с увеличением параметра ω , то есть с неравенством $\dot{\omega} > 0$. В моделях с тензорной характеристикой поврежденности ситуация сложнее, так как при накоплении дефектов отдельные компоненты тензора поврежденности могут уменьшаться, а некоторая скалярная норма этого тензора будет расти. В качестве такой меры часто выбирается второй инвариант тензора поврежденности или его девиатора. Механический смысл такой меры неясен, поэтому представляется более

естественным использовать в качестве нормы тензора поврежденности величину эффективной поверхностной энергии.

Для формулировки кинетического уравнения, определяющего эволюцию поврежденности материала, воспользуемся подходом, используемым в моделях упруго-вязкопластической среды [11], в которых скорость изменения неупругих деформаций определяется "динамической перегрузкой", равной разности между текущим напряженным состоянием и состоянием, соответствующим статической диаграмме деформирования. В моделях со скалярной характеристикой поврежденности [12] "динамическая перегрузка" определяется как частная производная по параметру поврежденности полной энергии, равной сумме упругого потенциала и эффективной поверхностной энергии. В рамках энергетических моделей континуального разрушения такое определение означает, что накопление поврежденности (увеличение поверхностной энергии), которое сопровождается разгрузкой материала в окрестности растущих дефектов, происходит в том случае, если упругая энергия высвобождается быстрее, чем поглощается. В моделях с тензорной характеристикой поврежденности мерой такого баланса энергии, то есть мерой "динамической перегрузки" может быть выбрана некоторая монотонная положительная функция диссипации разрушения δ .

Действительно, пусть кинетическое уравнение имеет вид $\dot{\omega} = \Omega(\mathbf{e}, \omega)$. Тензорную функцию $\Omega(\mathbf{e}, \omega)$ удобно представить в виде суммы девиатора $\Omega_s(\mathbf{e}, \omega)$ и шарового тензора $\Omega_p(\mathbf{e}, \omega)\mathbf{I}$, которые ортогональны друг другу в смысле двойного скалярного произведения

$$\dot{\omega} = \frac{1}{3\tau_p} \Omega_p(\mathbf{e}, \omega)\mathbf{I} + \frac{1}{\tau_s} \Omega_s(\mathbf{e}, \omega) \quad (1.3)$$

где $\tau_p, \tau_s = \text{const} > 0$ – времена релаксации напряжений вследствие развития поврежденности. Обратимся к уравнению локального баланса энергии. Для изотермического процесса накопления поврежденности это уравнение записывается в виде

$$\rho \dot{u}(\mathbf{e}, \omega) = \sigma(\mathbf{e}, \omega) : \dot{\mathbf{e}} - \rho \dot{u}_f(\omega) - \rho \delta \quad (1.4)$$

где $\rho \dot{u}_f$ – удельный сток энергии, расходуемой на образование новых поверхностей микродефектов при их росте, $\rho \delta$ – удельный сток тепла, необходимый для поддержания постоянной температуры и равный диссипации разрушения. Из уравнения (1.4) следует

$$\rho \frac{\partial u(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \mathbf{e}} : \dot{\mathbf{e}} + \rho \left(\frac{\partial u(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial u_f(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \omega} \right) : \dot{\omega} = \sigma : \dot{\mathbf{e}} - \rho \delta \quad (1.5)$$

Отсюда с учетом выражения (1.1) для упругого потенциала получаем

$$\sigma(\mathbf{e}, \omega) = \rho \frac{\partial u(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \mathbf{e}} = \{K I_1(\mathbf{e}) - \alpha_1 I_1(\omega) - \alpha_3 J(\omega)\} \mathbf{I} + \{2\mu J(\mathbf{e}) - \alpha_2 I_1(\omega) - \alpha_4 J(\omega)\} \mathbf{N}(\mathbf{e}) - \alpha_0 \omega' \quad (1.6)$$

где $\mathbf{N}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'/J(\mathbf{e})$ – нормированный девиатор тензора деформаций, такой что $\mathbf{N}(\mathbf{e}) : \mathbf{N}(\mathbf{e}) = 1$. Подстановка (1.6) в уравнение энергии (1.5) показывает, что диссипация разрушения δ равна скорости изменения полной энергии $\rho \dot{U}(\mathbf{e}, \omega)$, $U \equiv u(\mathbf{e}, \omega) + u_f(\omega)$, при фиксированной деформации \mathbf{e} . С учетом представления (1.3) для скорости изменения тензора поврежденности диссипация разрушения записывается в виде

$$-\rho \delta = \frac{\partial \rho U(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \omega} : \Omega(\mathbf{e}, \omega) = \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial \rho U(\mathbf{e}, \omega)}{\partial I_1(\omega)} \Omega_p(\mathbf{e}, \omega) + \frac{1}{\tau_s} \frac{\partial \rho U(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \omega'} : \Omega_s(\mathbf{e}, \omega)$$

Величина δ в рассматриваемой модели будет заведомо положительной, если взять

$$\Omega_p(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) = -\frac{\Psi_p}{K} \frac{\partial \rho U(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega})}{\partial I_1(\boldsymbol{\omega})}, \quad \Omega_s(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) = -\frac{\Psi_s}{\mu} \frac{\partial \rho U(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\omega}'}$$

где величины $\Psi_p, \Psi_s > 0$ в активном процессе накопления поврежденности ($\dot{\epsilon}_f > 0$) и обращаются в нуль в пассивном процессе при неизменном уровне поврежденности, то есть $\Psi_p = \Psi_s = 0$ при $\dot{\epsilon}_f = 0$. Этим требованиям можно удовлетворить простейшим образом, если в качестве Ψ_p и Ψ_s использовать функцию Хевисайда $H(\dot{\epsilon}_f) = 1$ при $\dot{\epsilon}_f > 0$, $H(\dot{\epsilon}_f) = 0$ при $\dot{\epsilon}_f \leq 0$. Тогда

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left\{ \frac{1}{3K\tau_p} \{A(\mathbf{e}) - \gamma_1(\boldsymbol{\omega})\} \mathbf{I} + \frac{1}{\mu\tau_s} \{B(\mathbf{e}) - \gamma_2(\boldsymbol{\omega})\} \mathbf{N}(\boldsymbol{\omega}) + \frac{\alpha_0}{\mu\tau_s} \mathbf{e}' \right\} H(\dot{\epsilon}_f) \quad (1.7)$$

$$A(\mathbf{e}) = \alpha_1 I_1(\mathbf{e}) + \alpha_2 J(\mathbf{e}), \quad B(\mathbf{e}) = \alpha_3 I_1(\mathbf{e}) + \alpha_4 J(\mathbf{e})$$

$$\gamma_1(\boldsymbol{\omega}) \equiv \gamma_1^0 + \beta_1 I_1(\boldsymbol{\omega}), \quad \gamma_2(\boldsymbol{\omega}) \equiv \gamma_2^0 + \beta_2 J(\boldsymbol{\omega})$$

где $\mathbf{N}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}' / J(\boldsymbol{\omega})$ – нормированный девиатор тензора поврежденности.

Условие $\dot{\epsilon}_f > 0$, при котором деформирование материала сопровождается накоплением поврежденности, с учетом (1.2) и (1.7) сводится к неравенству

$$\frac{\gamma_1(\boldsymbol{\omega})}{K\tau_p} \{A(\mathbf{e}) - \gamma_1(\boldsymbol{\omega})\} + \frac{\gamma_2(\boldsymbol{\omega})}{\mu\tau_s} \{B(\mathbf{e}) - \gamma_2(\boldsymbol{\omega})\} + \frac{\alpha_0 \gamma_2(\boldsymbol{\omega})}{\mu\tau_s} \mathbf{e}' : \mathbf{N}(\boldsymbol{\omega}) > 0$$

На границе $J(\mathbf{e}) = f(I_1(\mathbf{e}))$ области упругого деформирования неповрежденного материала тензор $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\dot{\epsilon}_f \geq 0$, поэтому для всех точек этой границы должно выполняться условие

$$\frac{\gamma_1^0}{K\tau_p} (A(\mathbf{e}) - \gamma_1^0) + \frac{\gamma_2^0}{\mu\tau_s} (B(\mathbf{e}) - \gamma_2^0) + \frac{\alpha_0 \gamma_2^0}{\mu\tau_s} \mathbf{e}' : \mathbf{N}_0 \geq 0 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{N}_0 = \boldsymbol{\omega}' / J(\boldsymbol{\omega}) \quad \text{при } \boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$$

Чтобы раскрыть неопределенность, которую содержит \mathbf{N}_0 , заменим в определении тензора $\mathbf{N}(\boldsymbol{\omega})$ девиатор тензора поврежденности $\boldsymbol{\omega}$ скоростью его изменения. Используя кинетическое уравнение (1.7) при $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$, получаем

$$\mathbf{N}_0 = \frac{C(\mathbf{e})\mathbf{N}_0 + \alpha_0 \mathbf{e}'}{\{C^2(\mathbf{e}) + 2\alpha_0 C(\mathbf{e})\mathbf{N}_0 : \mathbf{e}' + \alpha_0^2 J^2(\mathbf{e})\}^{1/2}}$$

$$\mathbf{N}_0 : \mathbf{e}' = \frac{C(\mathbf{e})\mathbf{N}_0 : \mathbf{e}' + \alpha_0 J^2(\mathbf{e})}{\{C^2(\mathbf{e}) + 2\alpha_0 C(\mathbf{e})\mathbf{N}_0 : \mathbf{e}' + \alpha_0^2 J^2(\mathbf{e})\}^{1/2}} \quad (1.9)$$

Возводя в квадрат последнее соотношение, приходим к уравнению

$$\alpha_0 (X^2 - J^2(\mathbf{e})) (2C(\mathbf{e})X + \alpha_0 J^2(\mathbf{e})) = 0, \quad X \equiv \mathbf{N}_0 : \mathbf{e}'$$

решениями которого являются функции

$$X_{1,2} = \pm J(\mathbf{e}), \quad X_3 = -\alpha_0 J^2(\mathbf{e}) / (2C(\mathbf{e}))$$

Непосредственной подстановкой несложно убедиться, что X_1 удовлетворяет (1.9), если

$$J(\mathbf{e}) > (\gamma_2^0 - \alpha_3 I_1(\mathbf{e})) / (\alpha_4 + \alpha_0) \quad (1.10)$$

Аналогично можно получить, что корень $X_2 = -J(\mathbf{e})$ реализуется при условии

$$J(\mathbf{e}) > (\gamma_2^0 - \alpha_3 I_1(\mathbf{e})) / (\alpha_4 - \alpha_0) \quad (1.11)$$

а условием реализации корня X_3 служит неравенство

$$J(\mathbf{e}) < (\gamma_2^0 - \alpha_3 I_1(\mathbf{e})) / \alpha_4 \quad (1.12)$$

Ограничения, которые следуют из неравенства (1.8) при указанных значениях X_i имеют соответственно вид

$$J(\mathbf{e}) \geq \frac{\gamma - \alpha_p I_1(\mathbf{e})}{\alpha_s + \alpha_0}, \quad J(\mathbf{e}) \geq \frac{\gamma - \alpha_p I_1(\mathbf{e})}{\alpha_s - \alpha_0} \quad (1.13)$$

$$\alpha_p I_1(\mathbf{e}) + \alpha_s J(\mathbf{e}) - \gamma - \frac{\alpha_0^2 J^2(\mathbf{e})}{2(\alpha_3 I_1(\mathbf{e}) + \alpha_4 J(\mathbf{e}) - \gamma_2)} \geq 0$$

$$\alpha_p = k\alpha_1 + \alpha_3, \quad \alpha_s = k\alpha_2 + \alpha_4, \quad \gamma = k\gamma_1^0 + \gamma_2^0, \quad k = (\gamma_1^0 \mu \tau_s) / (\gamma_2^0 K \tau_p)$$

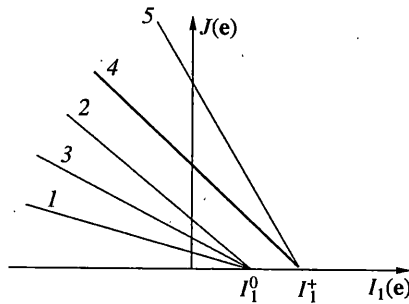
Будем в дальнейшем в качестве уравнения $J(\mathbf{e}) = f(I_1(\mathbf{e}))$ границы упругой области использовать прямую на плоскости $(I_1(\mathbf{e}), J(\mathbf{e}))$:

$$J(\mathbf{e}) = \frac{\gamma - \alpha_p I_1(\mathbf{e})}{\alpha_s + \alpha_0} \quad (1.14)$$

где величины $\alpha_p, \alpha_s, \gamma$ определены выше, и предполагать, что параметры материала удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\gamma_1^0}{\gamma_2^0} \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \geq \frac{\alpha_2}{\alpha_4 + \alpha_0} \quad (1.15)$$

Взаимное расположение лучей, которые являются границами области (1.14) упругого деформирования неповрежденного материала и областей (1.10) – (1.12), в которых реализуются корни X_i ($i = 1, 2, 3$), изображены на фиг. 1. Здесь $I_1^0 = \gamma_2^0 / \alpha_3$, $I_1^+ = \gamma / \alpha_p$, $I_1^+ > I_1^0$, прямые 1–3 соответствуют границам областей (1.10) – (1.12), область



Фиг. 1

упругости (1.14) ограничена прямой 4, а прямая 5 соответствует уравнению $J(\mathbf{e}) = (\gamma - \alpha_p I_1(\mathbf{e})) / (\alpha_s - \alpha_0)$ при $\alpha_s > \alpha_0$. Отсюда видно, что для (1.14) только корень X_1 обеспечивает выполнение условия $\dot{\gamma}_f \geq 0$ при $\omega \rightarrow 0$. Отметим также, что зависимость (1.14) обращает в нуль левую часть соотношения (1.8), что соответствует

непрерывно дифференцируемому изменению поверхностной энергии $u(\omega)$ при переходе от упругого деформирования неповрежденного материала к процессу рассеянно-го разрушения.

2. Акустические свойства и реологическая неустойчивость материала. Исследуем для рассматриваемого материала условия, при которых скорости распространения характеристических поверхностей являются вещественными. Как будет видно из дальнейшего, эти условия, ограничивающие допустимые значения тензоров деформации и накопленной поврежденности, играют роль критерия прочности, который заведомо не может быть превышен в рамках рассматриваемой модели. Традиционные критерии прочности [13] в виде ограничений на положительное значение главного напряжения (деформации), интенсивность сдвига, некоторую меру поврежденности [2, 14] представляют собой некоторые дополнительные ограничения по отношению к системе законов сохранения и реологических соотношений. Рассматриваемое условие непосредственно следует из деформационных свойств изучаемого материала, его достижение проявляется в виде образования поверхностей сильного разрыва деформаций – прообразов макроскопических трещин.

Динамика повреждающейся начально-упругой среды описывается уравнением движения, уравнением совместности скоростей и деформаций и уравнением эволюции тензора поврежденности

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \omega) = 0, \quad 2\dot{\mathbf{e}} - \nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = 0, \quad \dot{\omega} = \Omega(\mathbf{e}, \omega) \quad (2.1)$$

Зависимость $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \omega)$ определяется формулой (1.6), а отличная от нуля в активном процессе функция $\Omega(\mathbf{e}, \omega)$ представляет собой правую часть уравнения (1.7). Используя (1.6), дивергенцию тензора напряжений в активном процессе можно представить в виде

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}(\mathbf{e}, \omega) : (\nabla \otimes \mathbf{e}) + \mathbf{P}(\mathbf{e}, \omega) : (\nabla \otimes \omega)$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \mathbf{e}} = \rho \frac{\partial^2 u(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \mathbf{e}}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \omega} = \rho \frac{\partial^2 u(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \omega}$$

где \mathbf{L} , \mathbf{P} – четвертого ранга тензоры упругих коэффициентов и коэффициентов влияния поврежденности на напряженное состояние, символ $(:)$ означает тройное скалярное произведение, такое что $(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3) : (\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_3) = \mathbf{a}_0 \prod (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Это позволяет записать систему (2.1) в виде квазилинейной системы уравнений относительно вектора решения $(\mathbf{v}, \mathbf{e}, \omega)$:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{L}(\mathbf{e}, \omega) : (\nabla \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \omega) : (\nabla \otimes \omega) = 0 \quad (2.2)$$

$$2\dot{\mathbf{e}} - \nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = 0, \quad \dot{\omega} = \Omega(\mathbf{e}, \omega)$$

Пусть $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ – уравнение поверхности слабого разрыва решения системы (2.2), $c = -\partial \varphi(\mathbf{x}, t) / \partial t / |\nabla \varphi|$, $\mathbf{n} = \nabla \varphi / |\nabla \varphi|$ – скорость распространения и нормаль к этой поверхности. Будем предполагать, что с обеих сторон поверхности $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ материал находится в состоянии активного нагружения и следовательно на этой поверхности вместе с $(\mathbf{v}, \mathbf{e}, \omega)$ непрерывны тензоры $\mathbf{L}(\mathbf{e}, \omega)$, $\mathbf{P}(\mathbf{e}, \omega)$, $\Omega(\mathbf{e}, \omega)$. Тогда можно показать, что любая стационарная поверхность $\varphi(\mathbf{x}) = 0$, скорость которой $c \equiv 0$, является характеристической поверхностью; на которой скачок V нормальной к поверхности $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ производной вектора скорости равен нулю, а скачки нормальных производных тензоров деформации и поврежденности \mathbf{E} , \mathbf{W} определяются уравнением $\mathbf{L} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{E}) + \mathbf{P} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{W}) = 0$.

Скорости распространения нестационарных характеристических поверхностей ($c \neq 0$) системы (2.1) определяются уравнением $\det(\rho c^2 \mathbf{I} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}) = 0$. Отсюда следует,

что требование вещественности скоростей – необходимое условие гиперболичности системы (2.1) – выполняется, если

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : \mathbf{L} : (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) > 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq 0, \quad \mathbf{b} \neq 0 \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) выражает собой условие положительной определенности тензора четвертого ранга \mathbf{L} на произвольных диадах $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ и называется часто условием Адамара, условием сильной эллиптичности, SE-условием [15].

Вычислим скорости распространения характеристических поверхностей в рассматриваемом материале. В активном процессе из определения \mathbf{L} и соотношения (1.6) следует

$$\mathbf{L}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) = (\lambda + \frac{1}{3}\varphi)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + (2\mu - \varphi)\mathbf{1} + \varphi\mathbf{N}(\mathbf{e}) \otimes \mathbf{N}(\mathbf{e}) \quad (2.4)$$

$$\varphi = \{\alpha_2 I_1(\boldsymbol{\omega}) + \alpha_4 J(\boldsymbol{\omega})\} / J(\mathbf{e})$$

$$\lambda = K - 2\mu/3, \quad \mathbf{1} = \frac{1}{2}(\delta_a^i \delta_b^j + \delta_b^i \delta_a^j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичный тензор четвертого ранга, δ_a^i – символ Кронекера, $\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^a$ – векторы естественного и дуального базисов. Акустический тензор, соответствующий (2.4), записывается в форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = M\mathbf{I} + \Lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \varphi \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (2.5)$$

$$M = \mu - \varphi/2, \quad \Lambda = \lambda + \mu - \varphi/6, \quad \mathbf{m} = \mathbf{N}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}$$

Собственные числа этого тензора – скорости распространения поверхностей слабого разрыва решения – определяются формулами

$$\rho c_{1,2}^2(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = M + P \pm (P^2 - Q)^{1/2}, \quad \rho c_3^2(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) = M \quad (2.6)$$

$$2P(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \Lambda + \varphi (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}) = \lambda + \mu + \varphi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} - 1/6), \quad Q(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \varphi \Lambda (\mathbf{m} \times \mathbf{n})^2$$

Состояние $(\mathbf{e}^0, \boldsymbol{\omega}^0)$ частицы материала является реологически неустойчивым [6], если существует вектор $\mathbf{n}_0(\mathbf{e}^0, \boldsymbol{\omega}^0)$, такой что скорость распространения волны слабого разрыва в направлении \mathbf{n}_0 обращается в нуль, то есть $c(\mathbf{e}^0, \boldsymbol{\omega}^0, \mathbf{n}_0(\mathbf{e}^0, \boldsymbol{\omega}^0)) = 0$. Иными словами, материал становится реологически неустойчивым при достижении им состояния, в котором происходит потеря положительной определенности (2.3) тензора \mathbf{L} упругих коэффициентов. Свое проявление это находит в образовании плоскостей (поверхностей) локализации деформации с определенной ориентацией каждого элемента такой поверхности относительно главных осей тензора деформации элемента материала. Действительно, определяемый уравнением

$$\{\mathbf{S}\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \varphi \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad S = \rho c^2 - M$$

вектор \mathbf{V} скачка нормальной производной скорости при $c \rightarrow 0$ стремится к $\mathbf{V}_0 \neq 0$, где \mathbf{V}_0 – нетривиальное решение уравнения $\{\mathbf{M}\mathbf{I} + \Lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \varphi \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$. Используя соотношения кинематической и геометрической совместности [15], из второго уравнения системы (2.1) можно видеть, что амплитуда \mathbf{E} скачка нормальной производной тензора деформации при $c \rightarrow 0$ неограниченно увеличивается. Это означает, что слабый разрыв становится сильным, на котором скорость непрерывна, а деформация терпит разрыв.

Из формулы (2.6) следует, что вырождение по c_3 наступает в состоянии, определяемом условием

$$\varphi(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) \equiv \{\alpha_2 I_1(\boldsymbol{\omega}) + \alpha_4 J(\boldsymbol{\omega})\} / J(\mathbf{e}) = 2\mu \quad (2.7)$$

Вектор $\mathbf{n}^0(\mathbf{e}_0, \omega_0)$ в этом случае произволен, а \mathbf{V} – ортогонален плоскости, проходящей через векторы \mathbf{n} и \mathbf{m} .

Единичный вектор \mathbf{n} , доставляющий экстремум величине $\rho c_2^2(\mathbf{e}, \omega, \mathbf{n})$, которая всегда меньше ρc_1^2 , определяется уравнением

$$(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{B} \equiv (\Lambda - S_2) \mathbf{N}^2(\mathbf{e}) - 2\Lambda(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{N}(\mathbf{e}) \quad (2.8)$$

Нетривиальное решение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ системы (2.8) существует в трех случаях: \mathbf{n} – собственный вектор тензора $\mathbf{N}(\mathbf{e})$, собственные числа тензора \mathbf{B} различны; \mathbf{n} принадлежит плоскости, проходящей через два собственных вектора тензора $\mathbf{N}(\mathbf{e})$, два собственных числа тензора \mathbf{B} совпадают; тензор \mathbf{B} – шаровой.

Обозначим \mathbf{e}_j ($j = 1, 2, 3$) – орты главных осей $\mathbf{N}(\mathbf{e})$, N_i – собственные числа $\mathbf{N}(\mathbf{e})$. Пусть для определенности $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$. Тогда $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = N_1 \mathbf{n}$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = N_1$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{n} = N_1^2$. Учитывая, что $(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{n} \times \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) = 0$, находим, что $\rho c_2^2 = M$ при $P \geq 0$ и $\rho c_2^2 = M + 2P$ при $P < 0$.

Условие $P \geq 0$ равносильно неравенству $\lambda + \mu + \varphi(N_1^2 - 1/6) > 0$. Поскольку реологическая неустойчивость в этом случае наступает при $\varphi = 2\mu$, то это соотношение сводится к неравенству $K + \varphi N_1^2 > 0$, $K = \lambda + 2\mu/3$. Ориентация поверхностей разрыва деформации может быть любой.

При $P < 0$, что эквивалентно условию $\lambda + \mu + \varphi(N_1^2 - 1/6) < 0$, скорость c_2 обращается в нуль при значении φ , определяемом уравнением $\lambda + 2\mu + \varphi(N_1^2 - 2/3) = 0$. Поскольку из уравнений $\mathbf{N}(\mathbf{e}) : \mathbf{N}(\mathbf{e}) = 1$, $\mathbf{N}(\mathbf{e}) : \mathbf{I} = 0$ следует, что $N_1^2 \leq 2/3$, то рассматриваемый случай может иметь место только при $N_1^2 < 2/3$, $\varphi = (\lambda + 2\mu)/(2/3 - N_1^2)$. Подставляя это значение φ в неравенство $P < 0$, приходим к соотношению $K + 2\mu N_1^2 < 0$, которое не может выполняться при $K > 0$, $\mu > 0$. Таким образом, потеря реологической устойчивости материала при различных собственных числах тензора \mathbf{B} всегда происходит при $\varphi = 2\mu$.

Во втором случае, когда, $n_1^2 + n_2^2 = 1$, $n_3 = 0$, из равенства $B_1 = B_2$ при $c_2 = 0$ получаем

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{\Lambda} \frac{N_3}{(N_1 - N_2)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu - \varphi/2}{\lambda + \mu - \varphi/6} \frac{N_3}{(N_1 - N_2)} \right), \quad n_2^2 = 1 - n_1^2 \quad (2.9)$$

где параметр φ определяется уравнением $\rho c_2^2 = M + P - (P^2 - Q)^{1/2} = 0$.

Поскольку в данном случае $Q = \varphi \Lambda (N_1 - N_2)^2 n_1^2 n_2^2 > 0$, $2P = \Lambda + \varphi(N_1^2 n_1^2 + N_2^2 n_2^2) > 0$, то $M = (P^2 - Q)^{1/2} - P < 0$. Это означает, что реологическая неустойчивость наступает при $\varphi > 2\mu$ и проявляется в виде плоскостей преимущественного сдвига, на которых локализуются как сдвиговая, так и нормальная компоненты тензора деформаций. Скачок нормальной компоненты связан с дилатансией материала и является менее интенсивным по сравнению со скачком сдвиговой составляющей.

Третий случай, когда тензор \mathbf{B} – шаровой и все три компоненты вектора \mathbf{n} отличны от нуля, реализуется только для одноосной деформации

$$\mathbf{e} = e(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{N}(\mathbf{e}) = \pm \sqrt{2/3} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \mp 1/\sqrt{6} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

В этом случае экстремальная нормаль принадлежит поверхности кругового конуса с

осью e_1 . Угол Ψ полураствора этого конуса определяется выражением

$$\sin^2 \Psi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{3} \right), \quad m = \frac{M}{\Lambda} = \frac{\mu - \varphi/2}{(\lambda + \mu) - \varphi/6} \quad (2.10)$$

Значения параметра φ , при котором происходит обращение в нуль скорости распространения характеристических поверхностей с нормалью, принадлежащей конусу (2.10), таково, что $\varphi > 2\mu$. Действительно, для нормали с компонентами $n_1^2 = \frac{1}{2}(1 + m/3)$, $n_2^2 + n_3^2 = \frac{1}{2}(1 - m/3)$ имеем при одноосной деформации

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \frac{\kappa}{\sqrt{6}} (3n_1 e_1 - \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \frac{\kappa}{\sqrt{6}} (3n_1^2 - 1) = \frac{\kappa}{2\sqrt{6}} (1 + m), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{12} (5 + m)$$

Величины Q и P , которые входят в выражения (2.6) для скоростей характеристических поверхностей, равны

$$Q = \frac{\varphi\Lambda}{24} (9 - m^2) > 0, \quad 2P = \Lambda + \frac{\varphi}{12} (5 + m)$$

так как $m < 3$ при $K = \lambda + 2\mu/3 > 0$. Отсюда следует, что подкоренное выражение в формуле (2.6) удовлетворяет неравенству

$$0 < P^2 - Q = \frac{1}{4} \left[\left(\Lambda - \frac{\varphi}{12} (m + 5) \right)^2 + \frac{\varphi\Lambda}{6} (m + 1)^2 \right] < P$$

что дает $M = (P^2 - Q)^{1/2} - P < 0$, то есть $\varphi > 2\mu$.

Какая из форм потери реологической устойчивости реализуется в процессе нагружения? Будем считать, что первой проявляется та форма неустойчивости, которая соответствует наименьшему значению момента времени t_* , когда величина $\varphi(e(t), \omega(t))$ на заданной траектории деформирования $e(\tau)$, $\tau \leq t_*$ достигает своего критического значения, при котором одна из скоростей звука обращается в ноль. Это означает, что $t_* = \min t_i$, где значения t_i определяются интегральным уравнением

$$\alpha_2 \hat{I}_1[e(\tau), t_i]_{\tau=0}^{\tau=t_i} + \alpha_4 \hat{J}[e(\tau), t_i]_{\tau=0}^{\tau=t_i} = \varphi_i J(e(t_i)) \quad (2.11)$$

где \hat{I}_1 , \hat{J} — параметрически зависящие от t интегральные операторы, которые являются решением кинетического уравнения с нулевыми начальными данными.

3. Примеры. Проиллюстрируем условия возникновения реологической неустойчивости для некоторых видов деформированного состояния.

Шаровой тензор деформации. В этом случае $e(t) = I_1(t)\mathbf{I}$, $J = 0$, нормированный девиатор \mathbf{N} не определен. Обращаясь непосредственно к выражению (2.5) для акустического тензора Λ , можно видеть, что величина φ будет неограниченной при $\omega \neq 0$. Это означает, что неповрежденный материал теряет сплошность, как только достигается граница (1.14) области упругости, то есть $I_1^+ = \gamma/\alpha_p$. Иными словами, при всестороннем растяжении соотношение $I_1 \leq I_1^+$ служит традиционным критерием прочности материала. Отметим, что всестороннее сжатие $I_1 < 0$ не приводит к накоплению повреждений в рассматриваемой среде.

Сдвиговая деформация $e = e(t)\mathbf{N}_s$, $e(t) > 0$, $\mathbf{N}_s = (e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2)/\sqrt{2}$, где e_1, e_2 — векторы ортонормированного базиса. При такой деформации $I_1(e) = 0$, $e' = e$, $J(e) = e(t)$. Из условия (1.14) начала рассеянного разрушения следует, что процесс накопления поврежденности развивается при $e > e_s = \gamma/(\alpha_0 + \alpha_s)$. Уравнение (1.7) эволюции тензора поврежденности для рассматриваемой деформации записывается в

форме

$$\dot{\omega} = \frac{1}{3K\tau_p} \{\alpha_2 e(t) - \gamma_1(\omega)\} \mathbf{I} + \frac{1}{\mu\tau_s} \{\alpha_4 e(t) - \gamma_2(\omega)\} \mathbf{N}(\omega) + \frac{\alpha_0}{\mu\tau_s} e(t) \mathbf{N}_s$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $\omega = \frac{1}{3}\omega_0(t)\mathbf{I} + \omega_s(t)\mathbf{N}_s$. В этом случае девиатор $\mathbf{N}(\omega) = \mathbf{N}_s$, а величины ω_0 и ω_s удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{\omega}_0 + m_0\omega_0 = n_0 e(t) - g_0, \quad m_0 = \frac{\beta_1}{K\tau_p}, \quad n_0 = \frac{\alpha_2}{K\tau_p}, \quad g_0 = \frac{\gamma_1^0}{K\tau_p} \quad (3.1)$$

$$\dot{\omega}_s + m_s\omega_s = n_s e(t) - g_s, \quad m_s = \frac{\beta_2}{\mu\tau_s}, \quad n_s = \frac{\alpha_*}{\mu\tau_s}, \quad g_s = \frac{\gamma_2^0}{\mu\tau_s}, \quad \alpha_* = \alpha_0 + \alpha_4 \quad (3.2)$$

Решением уравнений (3.1), (3.2) при начальном условии $\omega(0) = 0$ является (для краткости индексы 0 и s здесь опущены)

$$\omega(t) = n \int_0^t e(\xi) e^{-m(t-\xi)} d\xi - \frac{g}{m} (1 - e^{-mt})$$

При деформировании с постоянной скоростью $e(t) = e_s + \varepsilon_0 t$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, получаем

$$\omega_0(t) = \frac{n_0}{m_0} \{e(t) - e_s + C(1 - e^{-m_0 t})\}, \quad C = e_s - \frac{g_0}{n_0} - \frac{\varepsilon_0}{m_0} = e_s - \frac{\gamma_1^0}{\alpha_2} - \frac{K\tau_p \varepsilon_0}{\beta_1} \quad (3.3)$$

$$\omega_s(t) = \frac{n_s}{m_s} \{e(t) - e_s + D(1 - e^{-m_s t})\}, \quad D = e_s - \frac{g_s}{n_s} - \frac{\varepsilon_0}{m_s} = e_s - \frac{\gamma_2^0}{\alpha_*} - \frac{\mu\tau_s \varepsilon_0}{\beta_2}$$

Особенность поведения материала в рассматриваемом процессе – чисто сдвиговая деформация приводит к появлению касательных напряжений $\text{dev}\sigma = s(t)\mathbf{N}_s$ и всестороннего давления $p(t)$, которые в силу (1.6) выражаются формулами

$$p(t) = \alpha_1 \omega_0(t) + \alpha_3 \omega_s(t), \quad s(t) = 2\mu e(t) - \alpha_2 \omega_0(t) - \alpha_* \omega_s(t)$$

Подстановка соответствующих выражений для $\omega_0(t)$ и $\omega_s(t)$ приводит к зависимостям

$$p(t) = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1} + \frac{\alpha_3 \alpha_*}{\beta_2} \right) (e(t) - e_s) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1} C (1 - e^{-m_0 t}) + \frac{\alpha_3 \alpha_*}{\beta_2} D (1 - e^{-m_s t})$$

$$s(t) = 2\mu e_0 + 2\mu_* (e(t) - e_s) - \frac{\alpha_2^2}{\beta_1} C (1 - e^{-m_0 t}) - \frac{\alpha_*^2}{\beta_2} D (1 - e^{-m_s t})$$

$$2\mu_* = 2\mu - \alpha_2^2 / \beta_1 - \alpha_*^2 / \beta_2$$

Производная касательного напряжения по сдвиговой деформации равна

$$\frac{ds}{de} = 2\mu_* - \frac{\alpha_2^2}{K\tau_p \varepsilon_0} C \exp\left(-\frac{m_0(e - e_s)}{\varepsilon_0}\right) - \frac{\alpha_*^2}{\mu\tau_s \varepsilon_0} D \exp\left(-\frac{m_s(e - e_s)}{\varepsilon_0}\right)$$

Отсюда следует, что при развитой деформации $e(t) \gg e_s$ наклон кривой $s(e)$ в процессе равномерного увеличения сдвиговой деформации при любой скорости сдвига стремится к постоянной величине $2\mu_*$, зависящей от модуля сдвига 2μ неповрежденной среды и коэффициентов α_2 , α_* , β_1 , β_2 . В случае, когда $e(t)$ мало отличается от порогового значения e_s , имеем

$$\frac{ds}{de} = 2\mu_* - \frac{\alpha_2^2 e_s}{K\tau_p \varepsilon_0} - \frac{\alpha_*^2 e_s}{\mu\tau_s \varepsilon_0} + \frac{\alpha_2 \gamma_1^0}{K\tau_p \varepsilon_0} + \frac{\alpha_* \gamma_2^0}{\mu\tau_s \varepsilon_0} = 2\mu - \frac{k(\alpha_* \gamma_1^0 - \alpha_2 \gamma_2^0)^2}{\gamma_1^0 \mu\tau_s \varepsilon_0 (k\alpha_2 + \alpha_*)}$$

Видно, что при высокой скорости деформирования ($\tau_s \varepsilon_0 \gg e_s$, $\tau_p \varepsilon_0 \gg e_s$) производная ds/de близка к модулю сдвига 2μ неповрежденного материала, так как величины $\gamma_1^0/K = O(e_s)$, $\gamma_2^0/\mu = O(e_s)$. В случае, когда скорость деформирования мала, величина $ds/de < 2\mu$. При скорости деформации, равной

$$\varepsilon_0 = \frac{k\gamma_1^0(\alpha_* - \alpha_2\gamma_2^0/\gamma_1^0)^2}{\mu\tau_s(k\alpha_2 + \alpha_*)} \left(\frac{\alpha_2^2}{\beta_1} + \frac{\alpha_*^2}{\beta_2} \right)^{-1}$$

наклон кривой $s(e)$ при деформации $e = e_s$ равен в точности $2\mu_*$.

Рассмотрим формы проявления реологической неустойчивости при деформации сдвига. В данном процессе тензор \mathbf{B} , определенный выражением (2.8), при $S_2 = -M$ имеет диагональный вид с собственными значениями, равными $\Lambda + M \pm 2\Lambda(n_1^2 - n_2^2)$ и нулю. Пусть нормаль \mathbf{n} – собственный вектор тензора $\mathbf{N}(e)$, без ограничения общности его можно положить равным \mathbf{e}_1 . Величина параметра ϕ в этом случае равна 2μ , а уравнение (2.11) с учетом выражений (3.3) записывается в виде

$$\frac{\alpha_2^2}{\beta_1} \left\{ e(t) - e_s + C \left(1 - \exp \left(- \frac{\beta_1 t}{K\tau_p} \right) \right) \right\} + \frac{\alpha_4 \alpha_*}{\beta_2} \left\{ e(t) - e_s + D \left(1 - \exp \left(- \frac{\beta_2 t}{\mu\tau_s} \right) \right) \right\} = 2\mu e(t) \quad (3.4)$$

Для простоты будем в дальнейшем предполагать, что $\alpha_0 = 0$, $\beta_1/(K\tau_p) = \beta_2/(\mu\tau_s) = \tau^{-1}$. Тогда при сдвиге с постоянной скоростью уравнение (3.4) приобретает форму

$$A(1 - e^{-x}) = 2\mu_* \varepsilon_0 \tau x + 2\mu e_s, \quad x = t/\tau \quad (3.5)$$

$$A = \frac{\alpha_2^2}{\beta_1} C + \frac{\alpha_4^2}{\beta_2} D, \quad C = e_s - \frac{\gamma_1^0}{\alpha_2} - \varepsilon_0 \tau, \quad D = e_s - \frac{\gamma_2^0}{\alpha_4} - \varepsilon_0 \tau$$

При сдвиге с высокой скоростью ($\tau \varepsilon_0 \gg e_s$) слагаемыми $e_s - \gamma_1^0/\alpha_2$, $e_s - \gamma_2^0/\alpha_4$ в выражениях для C и D можно пренебречь. Тогда $C = D = -\varepsilon_0 \tau$, $A = 2\mu \varepsilon_0 \tau (\mu_*/\mu - 1) < 0$. Отбрасывая также малую по сравнению с остальными членами величину $2\mu e_s$ в правой части (3.5), приходим к простому уравнению

$$e^{-x} - 1 = \mu_*/(\mu - \mu_*)x \quad (3.6)$$

Если неповрежденный материал обладает более жесткой реакцией ($\mu > \mu_*$), то решение уравнения (3.6) существует только при $\mu_* < 0$, то есть при отрицательном асимптотическом наклоне зависимости $s(e)$. Если этот наклон мал, то есть $|\mu_*/(\mu - \mu_*)| \ll 1$, то решение уравнения (3.6) велико по сравнению с единицей. Приближенное значение корня $x = (\mu - \mu_*)/|\mu_*|$ соответствует моменту времени наступления реологической неустойчивости при высокоскоростном деформировании

$$t_{1s}^{(1)} = \tau(\mu - \mu_*)/|\mu_*| \quad (3.7)$$

В случае сдвига с малой скоростью ($\tau \varepsilon_0 \ll e_s$) можно пренебречь последним слагаемым в выражении для C и D и первым слагаемым в правой части уравнения (3.5). В результате получим

$$1 - e^{-x} = A_0, \quad A_0 = 2\mu \frac{(\gamma_1^0)^2 \beta_2 + (\gamma_2^0)^2 \beta_1}{(\alpha_2 \gamma_2^0 - \alpha_4 \gamma_1^0)^2} > 0 \quad (3.8)$$

Условием существования положительного корня уравнения (3.8) является $A_0 < 1$. Это неравенство выполняется только в том случае, если $\mu_* < 0$. Действительно, пусть вер-

но обратное, то есть $2\mu_* \equiv 2\mu - (\alpha_2^2/\beta_1 + \alpha_4^2/\beta_2) > 0$. Тогда отсюда следует, что $2\mu\beta_1\beta_2 > \alpha_2^2\beta_2 + \alpha_4^2\beta_1$. Из неравенства $A_0 < 1$ вытекает

$$2\mu\beta_1\beta_2((\gamma_1^0)^2/\beta_1 + (\gamma_2^0)^2/\beta_2) < (\alpha_2\gamma_2^0 - \alpha_4\gamma_1^0)^2 \quad (3.9)$$

Заменяя в (3.9) множитель $2\mu\beta_1\beta_2$ меньшей величиной $\alpha_2^2\beta_2 + \alpha_4^2\beta_1$, получим в результате

$$(\alpha_2^2\beta_2 + \alpha_4^2\beta_1)((\gamma_1^0)^2/\beta_1 + (\gamma_2^0)^2/\beta_2) < (\alpha_2\gamma_2^0 - \alpha_4\gamma_1^0)^2$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{\alpha_2\beta_2\gamma_1^0}{\alpha_4\beta_1\gamma_2^0} + \frac{\alpha_4\beta_1\gamma_2^0}{\alpha_2\beta_2\gamma_1^0} < -2$$

которое не может выполняться при положительных $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}^0$. Это означает, что предположение $\mu_* > 0$ неверно.

Таким образом, если асимптотический наклон кривой $s(e)$ отрицательный, то при медленном сдвиге с постоянной скоростью материал теряет устойчивость в момент времени

$$t_{2s}^{(1)} = -\tau \ln(1 - A_0) \quad (3.10)$$

Сравнение величин $t_{1s}^{(1)}$, $t_{2s}^{(1)}$, определенных формулами (3.7) и (3.10), показывает, что переход материала в состояние реологической неустойчивости при высокоскоростном нагружении происходит при деформациях, которые существенно больше деформаций, достигаемых при медленном нагружении, что является ярким свидетельством зависимости прочностных свойств от истории предшествующих состояний.

Вторая форма реологической неустойчивости материала, которая соответствует обращению в нуль скорости звука в направлении максимального сдвига, то есть в направлении нормали с компонентами $n_1^2 = n_2^2 = 1/2$, наступает при достижении параметром φ значения $3/2 K + 2\mu$. Действительно, с учетом формул (2.6) и выражения для нормированного девиатора напряжений N_s имеем

$$2P = \lambda + \mu + \varphi/3, \quad Q = 1/2 \varphi(\lambda + \mu - \varphi/6), \quad \rho c_2^2 = M + p - 1/2 |\lambda + \mu - 2/3 \varphi|$$

Отсюда видно, что при $\lambda + \mu - 2\varphi/3 > 0$ вырождения не происходит. При $\lambda + \mu - 2\varphi/3 < 0$ скорость звука обращается в нуль при $\varphi = 3/2 K + 2\mu$. Уравнение для момента времени наступления реологической неустойчивости отличается в данном случае от (3.4) только правой частью и записывается в виде

$$\frac{\alpha_2^2}{\beta_1} \{e(t) - e_s + C(1 - e^{-x})\} + \frac{\alpha_4\alpha_*}{\beta_2} \{e(t) - e_s + D(1 - e^{-x})\} = \left(\frac{3}{2}K + 2\mu\right) e(t), \quad x = \frac{t}{\tau}$$

Здесь, как ранее, принято $\alpha_0 = 0$, $\beta_1/(K\tau_p) = \beta_2/(\mu\tau_s) = \tau^{-1}$. Для сдвига с постоянной скоростью получаем

$$A(1 - e^{-x}) = (3/2 K + 2\mu_*)\varepsilon_0 \tau x + (3/2 K + 2\mu)e_0, \quad x = t/\tau$$

Отсюда при высокой скорости сдвига ($\tau\varepsilon_0 \gg e_s$) следует, что скорость звука в направлениях, образующих угол 45° с главными осями тензора деформации, обращается в нуль в момент времени

$$t_{1s}^{(2)} = \tau \frac{\mu - \mu_*}{|3K/4 + \mu_*|}, \quad \frac{3}{4}K + \mu_* < 0$$

Сравнение $t_{1s}^{(2)}$ и $t_{1s}^{(1)}$ показывает, что при условии $|3K/4 + \mu_*| > |\mu_*|$ момент времени $t_{1s}^{(2)} < t_{1s}^{(1)}$, то есть реализуется вторая форма потери реологической неустойчивости, которая соответствует обращению в нуль скорости звука в направлении оси e_1 растяжения материального элемента. Если же $|3K/4 + \mu_*| < |\mu_*|$, то потеря устойчивости происходит по первой форме.

При сдвиге с малой скоростью ($\tau e_0 \ll e_s$) приходим к уравнению

$$1 - e^{-x} = A_1, \quad A_1 = \left(\frac{3}{2}K + 2\mu \right) \frac{(\gamma_1^0)^2 \beta_2 + (\gamma_2^0)^2 b_1}{(\alpha_2 \gamma_2^0 - \alpha_4 \gamma_1^0)} > 0$$

Положительный корень этого уравнения $t_{2s}^{(2)} = -\tau \ln(1 - A_1)$ существует при условии $A_1 < 1$. Это неравенство выполняется, если $3K/2 + 2\mu_* < 0$. Доказательство вполне аналогично приведенному выше.

Поскольку $A_1 > A_0$, величина $t_{2s}^{(2)} > t_{2s}^{(1)}$; то есть при медленном сдвиге всегда реализуется первая форма потери реологической неустойчивости, которая соответствует обращению в нуль скорости звука в направлении оси e_1 растяжения материального элемента.

Одноосная деформация $e = e(t)e_1 \otimes e_1$. При такой деформации

$$N(e) = \kappa \left(\sqrt{\frac{2}{3}} e_1 \otimes e_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_2 \otimes e_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_3 \otimes e_3 \right), \quad \kappa = \text{sign}(e) \quad (3.11)$$

$$I_1(e) = e(t), \quad e' = \sqrt{\frac{2}{3}} e(t) N(e), \quad J(e) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} e(t)$$

Знак плюс соответствует одноосному растяжению, минус – сжатию. Пороговая деформация e_0^\pm , при которой начинается накопление поврежденности, определяется уравнением (1.14) границы упругой области и равна $e_0^\pm = \gamma / \alpha^\pm$, $\alpha^\pm = \alpha_p \pm \sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha_0 + \alpha_s)$. Из условия $e_0^- < 0$ следует ограничение на коэффициенты $\alpha_p < \sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha_0 + \alpha_s)$.

Уравнение (1.7) эволюции тензора поврежденности для рассматриваемого процесса при $|e| > |e_0^\pm|$ приводится к виду

$$\dot{\omega} = \frac{1}{K\tau_p} \left\{ \left(\alpha_1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_2 \right) e(t) - \gamma_1(\omega) \right\} \mathbf{I} + \frac{1}{\mu\tau_s} \left\{ \left(\alpha_3 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_4 \right) e(t) - \gamma_2(\omega) \right\} N(\omega) + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha_0 e(t)}{\mu\tau_s} N(e)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\omega = \frac{1}{3} \omega_0(t) \mathbf{I} + \omega_s(t) N_1 \quad (3.12)$$

Тогда приходим к уравнениям для величин $\omega_0(t)$ и $\omega_s(t)$:

$$\dot{\omega}_0 + m_0 \omega_0 = n_0 e(t) - g_0$$

$$m_0 = \frac{\beta_1}{K\tau_p}, \quad n_0 = \frac{\alpha_1^\pm}{K\tau_p}, \quad g_0 = \frac{\gamma_1^0}{K\tau_p}, \quad \alpha_1^\pm = \alpha_1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_2 \quad (3.13)$$

$$\dot{\omega}_s + m_s \omega_s = n_s e(t) - g_s$$

$$m_s = \frac{\beta_2}{\mu\tau_s}, \quad n_s = \frac{\alpha_3^\pm}{\mu\tau_s}, \quad g_s = \frac{\gamma_2^0}{\mu\tau_s}, \quad \alpha_3^\pm = \alpha_3 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha_0 + \alpha_4) = \alpha_3 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_* \quad (3.14)$$

При деформировании с постоянной скоростью $e(t) = e_0^\pm + \varepsilon_0 t$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, где $\varepsilon_0 > 0$ при растяжении и $\varepsilon_0 < 0$ при сжатии, решения уравнений (3.13) и (3.14) имеют вид

$$\omega_0(t) = \frac{|\alpha_1^\pm|}{\beta_1} \left\{ |\varepsilon_0| t + C_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{|\alpha_1^\pm| t}{K\tau_p}\right) \right) \right\}, \quad C_1 = |e_0^\pm| - \frac{\gamma_1^0}{|\alpha_1^\pm|} - |\varepsilon_0| t \quad (3.15)$$

$$\omega_s(t) = \frac{|\alpha_3^\pm|}{\beta_2} \left\{ |\varepsilon_0| t + D_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{|\alpha_3^\pm| t}{\mu\tau_s}\right) \right) \right\}, \quad D_1 = |e_0^\pm| - \frac{\gamma_2^0}{|\alpha_3^\pm|} - |\varepsilon_0| t \quad (3.16)$$

Тензор напряжений в рассматриваемом процессе будет следующим:

$$\sigma(\varepsilon(t), \omega(t)) = \{\lambda e(t) - \alpha_1 \omega_0(t) - \alpha_3 \omega_s(t)\} \mathbf{I} + 2\mu e(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \{\alpha_2 \omega_0(t) + \alpha_* \omega_s(t)\} \mathbf{N}(\mathbf{e})$$

где $\lambda = K - 2\mu/3$. Подставляя сюда выражения (3.15) и (3.16) для величин $\omega_0(t)$ и $\omega_s(t)$, получим

$$\sigma_{11} = \Lambda_0 e_0^\pm + \Lambda^\pm (e - e_0^\pm) - \frac{(\alpha_1^\pm)^2}{\beta_1} C_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{|\alpha_1^\pm| t}{K\tau_p}\right) \right) - \frac{(\alpha_3^\pm)^2}{\beta_2} D_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{|\alpha_3^\pm| t}{\mu\tau_s}\right) \right)$$

$$\Lambda_0 = \lambda + 2\mu, \quad \Lambda^\pm = \Lambda_0 - \frac{(\alpha_1^\pm)^2}{\beta_1} - \frac{(\alpha_3^\pm)^2}{\beta_2} \quad (3.17)$$

Отсюда следует, что производная

$$\frac{d\sigma_{11}}{de_{11}} = \Lambda^\pm - \frac{(\alpha_1^\pm)^2}{K\tau_p \varepsilon_0} C_1 \exp\left(-\frac{m_0(e - e_0^\pm)}{\varepsilon_0}\right) - \frac{(\alpha_3^\pm)^2}{\mu\tau_s \varepsilon_0} D_1 \exp\left(-\frac{m_s(e - e_0^\pm)}{\varepsilon_0}\right)$$

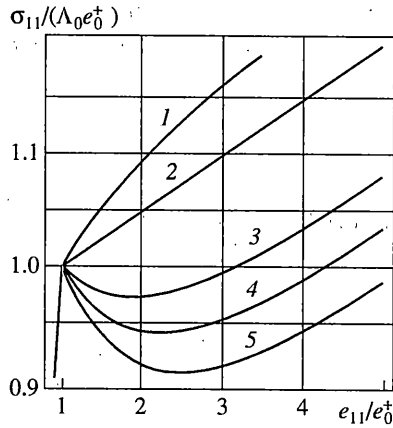
при $|e| \gg |\varepsilon_0^\pm|$ в процессе равномерного увеличения одноосной деформации при любой скорости растяжения (сжатия) стремится к длительному модулю одноосного деформирования Λ^\pm , зависящего от модулей упругой неповрежденной среды λ , μ и коэффициентов α_1^\pm , α_3^\pm , β_1 , β_2 . В случае, когда $e(t)$ мало отличается от порогового значения e_0^\pm , при котором начинается процесс накопления поврежденности, имеем

$$\frac{d\sigma_{11}}{de_{11}} \Big|_{e=e_0^\pm} = \Lambda^\pm - \left[\frac{(\alpha_1^\pm)^2}{K\tau_p \varepsilon_0} + \frac{(\alpha_3^\pm)^2}{\mu\tau_s \varepsilon_0} \right] e_0^\pm + \frac{\alpha_1^\pm \gamma_1^0}{K\tau_p \varepsilon_0} + \frac{\alpha_3^\pm \gamma_2^0}{\mu\tau_s \varepsilon_0} =$$

$$= \Lambda_0 - \frac{k(\alpha_3^\pm \gamma_1^0 - \alpha_1^\pm \gamma_2^0)^2}{\mu\tau_s \varepsilon_0 \gamma_1^0 (k\alpha_1^\pm + \alpha_3^\pm)} \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что при высокой скорости деформации ($\tau_s |\varepsilon_0| \gg |e_0^\pm|$, $\tau_p |\varepsilon_0| \gg |e_0^\pm|$) величина производной $d\sigma_{11}/de_{11}$ близка к модулю $\Lambda_0 = \lambda + 2\mu$ одноосного сжатия (растяжения) неповрежденного материала. При малой скорости деформирования величина $d\sigma_{11}/de_{11} < \Lambda_0$, поскольку $\varepsilon_0 (k\alpha_1^\pm + \alpha_3^\pm) = \varepsilon_0 (\alpha_p - \sqrt{2/3}(\alpha_0 + \alpha_s)) = \varepsilon_0 \gamma / e_0^- > 0$ как при растяжении, так и при сжатии.

Характерный вид зависимости $\sigma_{11}(e_{11})$ для значений параметров $\alpha_0 = 0,25\Lambda_0$, $\gamma_1^0 = \gamma_2^0 = 0,01\alpha_0$, $k = 1$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_4 = 2\alpha_0$, $K\tau_p/\beta_1 = \mu\tau_s/\beta_2 = \tau$, удовлетворяющих неравенству (1.15), приведен на фиг. 2, где кривые 1-4 соответствуют значениям скоростей деформации $\varepsilon_0 \tau / e_0^\pm = 0,3, 0,225, 0,1, 0,05, 0,01, 0,00001$. Как и в случае чисто сдвиговой деформации кривые 4-5 свидетельствуют об образовании при малых скоростях растяжения "зуба текучести" [4].



Фиг. 2

Зависимость поперечного напряжения σ_{22} от деформации $e_{11} = e(t)$ при равномерном растяжении (сжатии) имеет вид, аналогичный (3.17):

$$\sigma_{22} = \lambda_0 e_0^\pm + \Lambda_2^\pm (e - e_0^\pm) - \frac{\alpha_1^\pm \alpha_2^\pm}{3\beta_1} C_1 (1 - e^{-m_0 t}) - \frac{\alpha_3^\pm \alpha_4^\pm}{\beta_2} D_1 (1 - e^{-m_s t}) \quad (3.19)$$

где верхний знак соответствует растяжению, нижний – сжатию, и использованы обозначения

$$\Lambda_2^\pm = \lambda - \frac{\alpha_1^\pm \alpha_2^\pm}{3\beta_1} - \frac{\alpha_3^\pm \alpha_4^\pm}{\beta_2}, \quad \alpha_2^\pm = \alpha_1 \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \alpha_2, \quad \alpha_4^\pm = \alpha_3 \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \alpha_*$$

При условии $\alpha_1 < \alpha_2 \sqrt{2/3}$, $\alpha_3 < \alpha_* \sqrt{2/3}$, которое будет использовано далее, при сжатии коэффициенты α_2^- , α_4^- заведомо положительны, а α_1^- , α_3^- – отрицательны. В этом случае $\Lambda_2 > \lambda$. Это означает, что асимптотический наклон кривой $\sigma_{22}(e)$ становится при сжатии больше, чем в упругой области. Смысл этого результата заключается, по-видимому, в том, что при накоплении поврежденности происходит переход к более изотропному, одинаковому во всех направлениях напряженному состоянию – продольное напряжение σ_{11} уменьшается, а равные между собой поперечные напряжения $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ увеличиваются по сравнению с напряжениями в неповрежденном материале.

Рассмотрим теперь условия и формы потери реологической устойчивости при одноосной деформации. Используя выражение (3.11), находим

$$\mathbf{N}^2(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{6} \mathbf{I}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} = \sqrt{\frac{3}{2}} (n_1^2 - \frac{1}{3}), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} (n_1^2 + \frac{1}{3})$$

Тогда тензор \mathbf{B} , входящий в уравнение (2.8), которое определяет условия реологической неустойчивости, можно записать в виде

$$\mathbf{B} = b_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + b_0 \mathbf{I} \quad (3.20)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} (\Lambda + M) - \Lambda (3n_1^2 - 1), \quad b_0 = \frac{1}{6} (\Lambda + M) + \Lambda (n_1^2 - \frac{1}{3})$$

Выражение (3.20) показывает, что тензор \mathbf{B} – диагональный, собственные значения которого $B_1 = b_1 + b_0$, $B_2 = B_3 = b_0$. Уравнение (2.8) для рассматриваемой деформации принимает вид

$$b_1 n_1 \mathbf{e}_1 = b_1 n_1^2 \mathbf{n} \quad (3.21)$$

Первая форма реологической неустойчивости соответствует $n_1^2 = 1, n_2^2 = n_3^2 = 0$, $b_1 \neq 0$. Собственные числа тензора \mathbf{B} в этом случае $B_1 \neq B_2 = B_3$. Как показано в предыдущем разделе, вырождение наступает при значении параметра $\phi(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) = 2\mu$. Уравнение (2.11), которое определяет момент времени наступления реологической неустойчивости, для одноосной деформации с учетом выражений (3.15), (3.16) записывается в форме

$$A_{\pm}(1 - e^{-x}) = a_{\pm} |\varepsilon_0 \tau| x + 2\mu \sqrt{2/3} |e_0^{\pm}| \quad (3.22)$$

$$A_{\pm} = f_{\pm} (|e_0^{\pm}| - |\varepsilon_0 \tau|) - \left(\frac{\alpha_2 \gamma_1^0}{\beta_1} + \frac{\alpha_4 \gamma_2^0}{\beta_2} \right), \quad a_{\pm} = 2\mu \sqrt{\frac{2}{3}} - f_{\pm}$$

$$f_{\pm} = \frac{\alpha_2 |\alpha_1^{\pm}|}{\beta_1} + \frac{\alpha_4 |\alpha_3^{\pm}|}{\beta_2} > 0$$

Здесь, как и ранее считается, что $\alpha_0 = 0$, $\beta_1/(K\tau_p) = \beta_2/(\mu\tau_s) = \tau^{-1}$.

При деформировании с высокой скоростью ($|\varepsilon_0 \tau| \gg \alpha_2 \gamma_1^0 / \beta_1 + \alpha_4 \gamma_2^0 / \beta_2$, $|\varepsilon_0 \tau| \gg |e_0^{\pm}|$) можно пренебречь последним слагаемым в правой части (3.22) и слагаемыми $f_{\pm} |e_0^{\pm}|$, $\alpha_2 \gamma_1^0 / \beta_1 + \alpha_4 \gamma_2^0 / \beta_2$ в выражении для коэффициента A_{\pm} . В результате приходим к уравнению

$$1 - e^{-x} = \left(1 - \frac{2\mu}{f_{\pm}} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) x \quad (3.23)$$

которое разрешимо при условии $f_{\pm} > 2\mu \sqrt{2/3}$.

Пользуясь определением f_{\pm} можно показать, что при высокоскоростном одноосном растяжении для реализации первой формы реологической неустойчивости необходимо выполнение соотношения для коэффициентов

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\beta_2} > 2\mu_* \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 2\mu_* = 2\mu - \frac{\alpha_2^2}{\beta_1} - \frac{\alpha_4^2}{\beta_2}$$

При условии, что длительный модуль сдвига $2|\mu_*|/\mu \ll 1$, решение уравнения (3.23) имеет порядок $O(1)$.

При высокоскоростном одноосном сжатии данная форма реологической неустойчивости реализуется при выполнении неравенства $\alpha_1 \alpha_2 / \beta_1 + \alpha_3 \alpha_4 / \beta_2 < -2\mu_* \sqrt{2/3}$, что возможно только при условии $\mu_* < 0$.

При медленном одноосном деформировании уравнение (3.22) принимает вид

$$A_{\pm}^{(s)}(1 - e^{-x}) = 2\mu \sqrt{\frac{2}{3}} |e_0^{\pm}|, \quad A_{\pm}^{(s)} = f_{\pm} |e_0^{\pm}| - \left(\frac{\alpha_2 \gamma_1^0}{\beta_1} + \frac{\alpha_4 \gamma_2^0}{\beta_2} \right) \quad (3.24)$$

Условием существования решения этого уравнения служит ограничение на параметры материала $A_{\pm}^{(s)} > 2\mu \sqrt{\frac{2}{3}} |e_0^{\pm}|$, которое с учетом выражений для $A_{\pm}^{(s)}$ и f_{\pm} записывается в виде

$$\frac{\alpha_2 (\gamma_1^0 \mp \alpha_1)}{\beta_1} + \frac{\alpha_4 (\gamma_2^0 \mp \alpha_3)}{\beta_2} + 2\mu_* \sqrt{\frac{2}{3}} < 0$$

Отсюда следует, что при медленном растяжении рассматриваемая форма потери ус-

тойчивости реализуется при ограничении

$$\frac{\alpha_2(\gamma_1 - \alpha_1^0)}{\beta_1} + \frac{\alpha_4(\alpha_3 - \gamma_2^0)}{\beta_2} > 2\mu_* \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Если $|\mu_*|/\mu \ll 1$, решение уравнения (3.24) $x \ll 1$. При медленном сжатии решение (3.24) существует, если выполняется неравенство

$$\frac{\alpha_2(\alpha_1 + \gamma_1^0)}{\beta_1} + \frac{\alpha_4(\alpha_3 + \gamma_2^0)}{\beta_2} < -2\mu_* \sqrt{\frac{2}{3}}$$

возможное только при $\mu_* < 0$.

Таким образом, как и в случае сдвиговой деформации, первая форма потери устойчивости при высокоскоростном растяжении (сжатии) происходит при деформациях, которые существенно больше деформаций, соответствующих медленному нагружению.

Рассмотрим теперь другую форму проявления реологической неустойчивости, которая соответствует решению $n_1 = 0$, $n_2 \neq 0$, $n_3 \neq 0$ уравнения (3.21). Принимая во внимание формулу (3.11), находим

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\kappa}{\sqrt{6}} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\kappa}{\sqrt{6}} (n_2^2 + n_3^2) = -\frac{\kappa}{\sqrt{6}}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{6}$$

Величины Q и P , которые входят в выражения для скоростей характеристических поверхностей, равны

$$Q = \varphi \Lambda (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^2) = 0, \quad P = \Lambda + \varphi/6 = K + \mu/3 > 0$$

Отсюда следует, что $\rho c_2^2 = \rho c_3^2 = M = \mu - \varphi/2 = 0$ при $\varphi = 2\mu$. Это означает, что вторая форма потери реологической устойчивости реализуется при том же значении параметра φ , что и первая форма, моменты времени наступления неустойчивости определяются уравнением (3.22) и остаются справедливыми все выводы о влиянии скорости деформирования на величину предельной нагрузки.

Третья форма потери реологической устойчивости, которая соответствует круговому конусу нормалей с углом полураствора (2.10), реализуется, как показано в п. 2, при значениях параметра $\varphi > 2\mu$ и соответствует более позднему по сравнению с первыми двумя формами моменту времени наступления неустойчивого состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-05-64291) и Минобразования РФ, программа "Университеты России" (грант № 00-0166).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lemaitre J.A.* Course on Damage Mechanics. Berlin: Springer, 1992. 280 p.
2. *Кукуджанов В.Н.* Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализаций деформаций // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 72-87.
3. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
5. *Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е.* Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: "Янус-К", 1996. 408 с.
6. *Кондауров В.И.* Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302-310.
7. *Кондауров В.И., Никитин Л.В.* Модель континуального разрушения вязкоупругих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 131-139.

8. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1920. V. 221. P. 163–198.
9. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // *Инж. ж. МТТ.* 1967. № 3. С. 21–35.
10. *Седов Л.И.* *Механика сплошной среды.* Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
11. *Кукуджанов В.Н.* Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
12. *Кондауров В.И.* Об особенностях волн разрушения в высокооднородных хрупких материалах // *ПММ.* 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 704–714.
13. *Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.* *Динамическое разрушение твердых тел.* Новосибирск: Наука, 1979. 271 с.
14. *Суворова Ю.В., Ахундов М.Б.* Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния // *Машиноведение.* 1986. № 4. С. 40–46.
15. *Трусделл К.* *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.* М.: Мир, 1975. 592 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.05.2001