МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001

УДК 539.374

© 2001 г. В.А. КОЛЕСНИКОВ

РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПО ИНЕРЦИИ

Задачи о расширении цилиндрической полости рассматривались и ранее: в [1] для среды идеальной – "пластический газ", для сред упругопластических типа Сен-Венана – Мизеса в [2, 3], для вязкопластических сред в [4].

Здесь среда предполагается уплотняющейся. Впервые модель среды в таком виде была предложена А.Ю. Ишлинским. В дальнейшем полное ее обоснование было сделано в [5].

В рассматриваемой задаче расширение происходит по общему закону $r = R(t)$, задача не является автомодельной. Представляет интерес расширение полости по инерции и возвратное ее движение до полной остановки. В ходе решения определяются размеры полости и время ее инерционного движения.

Рассмотренная задача может моделировать развитие каверны при проникании тел цилиндрической формы в грунтовую среду. При построении решения учитывается разгрузка из пластического состояния по сдвигу для возвратного движения границы полости. Простая модель среды, которая используется здесь, дает возможность получить результаты аналитически.

Рассматриваемая среда предполагается уплотняющейся; под этим понимается следующее. Обозначим деформацию объема и давление через $\vartheta = 1 - \rho_0/\rho$ и $p = -\sigma_{ii}/3$, где ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотности, σ_{ij} – компоненты напряжения. Объемное деформирование происходит по схеме, представленной на фигуре. Если в процессе деформирования $\max p(t) < k\vartheta_0$, то материал несжимаем и $\vartheta = p/k$; в противном случае $\vartheta = \vartheta_0$. Среда при сколь угодно малом возмущении переходит из состояния с плотностью ρ_0 в состояние с плотностью ρ, которая при дальнейшем увеличении или уменьшении давления остается постоянной, а материал среды несжимаемым.

По сдвигу пластические свойства среды описываются так. Девиаторные компоненты напряжений s_{ij} и скорости деформаций ε_{ij} связаны соотношениями Сен-Венана – Мизеса. Условие пластичности берется в форме Мизеса

$$s_{ij}s_{ij} = 2\tau_s^2 \tag{1}$$

где τ_s – константа текучести.

Упругие свойства среды по сдвигу описываются законом Гука $s_{ij} = 2Ge_{ij}$, где e_{ij} – компоненты малой деформации, G – модуль сдвига.

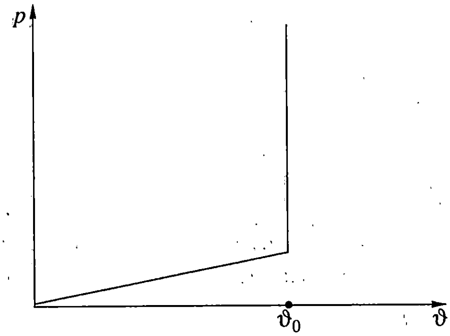
Искомые функции удовлетворяют уравнениям сохранения импульса

$$\rho\partial\mathbf{v}/\partial t = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} S \tag{2}$$

и условию несжимаемости

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость частиц среды, S – девиатор напряжения.



В качестве начальных принимаются условия $\mathbf{v} = 0$, $\sigma_{ij} = 0$ при $t = 0$.

Пусть в начальный момент среда ненапряжена и покоится. При $t \geqslant 0$ от некоторой прямой начинает расширяться цилиндрическая поверхность по закону $r = R(t)$, $R'(0) > a\sqrt{\vartheta_0}$, $a = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho}$, где λ и μ – константы Ламэ, штрих обозначает производную по времени. При этом предполагается, что на этой поверхности, при $r = R(t)$, касательные напряжения отсутствуют, $s_{rz} = 0$.

Задача рассматривается в цилиндрической системе координат r, φ, z (ось z совпадает с осью цилиндра).

При $t = t_0$ расширение цилиндра по заданному выше закону прекращается, но среда продолжает двигаться по инерции. Образующаяся теперь цилиндрическая полость радиуса R будет свободна от напряжений

$$\sigma_{rr}(R) = 0 \tag{4}$$

Значения функций, описывающих поле скоростей и поле напряжений при $t = t_0$ и $r = R(t_0) = R_0$ служат начальными условиями для решения задачи о расширении полости по инерции с начальной скоростью $R'(t_0)$.

Двигаясь по инерции, граница полости достигнет своего максимального значения $r = R_1$ в некоторый момент $t = t_1$, а затем будет совершать возвратное движение и при $t = t_2$ окончательно остановится. Представляют интерес значения R_1 и $R_2 = R(t_2)$, а также оценка величины времени инерционного расширения полости $t_1 - t_0$.

Рассматриваемая задача может моделировать развитие каверны при проникании тел цилиндрической формы в грунтовую среду. Простая модель среды, которая используется здесь, дает возможность получить результаты в обозримой форме.

Для рассматриваемой среды характерным является то, что ее материал в процессе распространения волны, при $\vartheta = \vartheta_0$ "упаковывается", так что к границе полости примыкает область несжимаемого материала. Из условия несжимаемости (3), которое для выбранной системы координат имеет вид $\partial v_r/\partial r + v_r/r = 0$ с учетом граничного условия на поверхности полости $r = R(t)$:

$$v_r = R'(t) \tag{5}$$

для радиальной скорости $v_r = v$ имеем

$$v = R(t)R'(t)/r \tag{6}$$

Это выражение справедливо во всей области $R < r < R_\vartheta$, где $r = R_\vartheta$ – граница области несжимаемого материала. По аналогии с [6] значение $R_\vartheta(t)$ может быть найдено из условий сохранения массы. Действительно на этой границе

$$\rho(v_r - R'_\vartheta(t)) = -\rho_0 R'_\vartheta(t)$$

Тогда, используя (6), имеем

$$R_\vartheta = R(t)/\sqrt{\vartheta_0} \tag{7}$$

При сверхзвуковом движении границы $r = R_\vartheta$ условие сохранения импульса на ней в проекции на ось r будет

$$\sigma = \sigma_{rr} = -(1-\vartheta_0)\rho\vartheta_0(R'_\vartheta)^2 = \sigma_\vartheta \tag{8}$$

В случае дозвукового движения ($R'_\vartheta < a$) на ней ставятся условия непрерывности напряжения и скорости $[\sigma] = 0$, $[v] = 0$. Как следует из [3] в случае

$$\vartheta_0 < \sqrt{3}m, \qquad m = \tfrac{1}{2}\tau_s / G \tag{9}$$

к границе зоны несжимаемости будет примыкать область, где среда находится в упругом состоянии по сдвигу. В ней радиальное смещение u (считается малым при больших r):

$$u = \int_{r/R'_\vartheta}^{t} v\,dt, \qquad t \geqslant \frac{r}{R'_\vartheta}$$

при помощи (6) представляется в виде

$$u = \tfrac{1}{2} r((R(t)/r)^2 - \vartheta_0)$$

Отсюда упругие деформации выражаются по формулам

$$e_{rr} = -\tfrac{1}{2}((R/r)^2 + \vartheta_0)$$

$$e_{\varphi\varphi} = \tfrac{1}{2}((R/r)^2 - \vartheta_0), \qquad e_{zz} = 0$$

И компоненты девиатора напряжений в упругой продольной волне на основании закона Гука будут равны

$$\begin{aligned} s_{rr} &= 2G(e_{rr} + \tfrac{1}{2}\vartheta_0) = -G((R(t)/r)^2 + \tfrac{1}{3}\vartheta_0) \\ s_{\varphi\varphi} &= 2G(e_{\varphi\varphi} + \tfrac{1}{2}\vartheta_0) = -G((R(t)/r)^2 - \tfrac{1}{3}\vartheta_0) \\ s_{zz} &= \tfrac{2}{3}G\vartheta_0 \end{aligned} \tag{10}$$

Граница зоны упругих по сдвигу деформаций и зоны пластичности $r = R_p(t)$ определяется в ходе решения задачи. На ней выполняются условия непрерывности радиальных напряжений и второго инварианта девиатора S:

$$[\sigma] = 0, \qquad [J(S)] = 0 \tag{11}$$

Последнее соотношение для предельных значений (при $r = R_p$), взятых со стороны упругой зоны приводит к выполнению условия текучести (1):

$$s_{rr}^2 + s_{\varphi\varphi}^2 + s_{zz}^2 + 2s_{rz}^2 = 2\tau_s^2 \tag{12}$$

Считается, на основании предположения (9), что оно достигается при $s_{rz} = 0$, т.е. только за счет продольного поля. Используя (10), из (12) для границы зон $r = R_p$ имеем

$$R_p = R(t)(4m^2 - \tfrac{1}{3}\vartheta_0^2)^{-1/4} \tag{13}$$

Видно, что из (7) и (13), принимая во внимание еще раз (9), следует довольно естественное соотношение $R_p < R_\vartheta$. Таким образом условие (9) фактически обеспечивает существование зоны упругих по сдвигу напряжений $R_p < r < R_\vartheta$. В ней, на основании двух первых соотношений (10):

$$s_{rr} - s_{\varphi\varphi} = -2G(R/r)^2 \tag{14}$$

Проекция уравнения сохранения импульса (2) на ось r имеет вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} + \frac{s_{rr} - s_{\varphi\varphi}}{r} = \rho\left(\frac{(RR')'}{r} - \frac{(RR')^2}{r^3}\right) \tag{15}$$

Из него при помощи (14), используя (8) в качестве краевого условия, получим выражение для радиальных напряжений σ:

$$\sigma = \rho(RR')'\ln\frac{r}{R_\vartheta} + \left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \vartheta_0\right)\left(\frac{\rho}{2}(R')^2 - G\right) \tag{16}$$

в области $R_p < r < R_\vartheta$.

Теперь рассмотрим решение в пластической зоне $R < r < R_p$. Из условия Сен-Венана – Мизеса следует $\varepsilon_{rr}s_{zz} = \varepsilon_{zz}s_{rr}$, $s_{zz} = 0$ и $s_{rr} + s_{\varphi\varphi} = 0$. Тогда вследствие условия пластичности (11) $s_{rr} = -\tau_s$ и соотношение (13) перейдет в

$$s_{rr} - s_{\varphi\varphi} = -2\tau_s \tag{17}$$

Принимая во внимание первое соотношение (11), а также (17), проинтегрируем (15) по r в области $R < r \leqslant R_p$. При этом в качестве краевого условия берется (16) при $r = R_p$. Итак будем иметь

$$\sigma(r) = \rho(RR')'\ln\frac{r}{R_\vartheta} + 2\tau_s\ln\frac{r}{R_p} + \frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \vartheta_0\right)(R')^2 - (\delta - \vartheta_0)G \tag{18}$$

Отметим, что описанное выше поле напряжений в окрестности цилиндрической полости имеет место в случае, когда упругая поперечная волна целиком поглощена пластической. Так будет, когда $(R'/b)^2 > \sqrt{4m^2 - \frac{1}{3}\vartheta_0^2} = \delta$, где $b = \sqrt{\mu/\rho_0}$ – скорость упругой поперечной волны в невозмущенной среде.

Рассмотрим процесс движения цилиндрической полости при $t \geqslant t_0$ (движение полости по инерции); для него характерно $R'_\vartheta < a$. Закон расширения полости для этого случая может быть получен из уравнения сохранения импульса (15), если его проинтегрировать в квадратурах по всей области $R < r < R_\vartheta$ с учетом (4), (7) и (13), при этом в пластической области используется по-прежнему (17), а в упругой (14):

$$\ln\frac{1}{\vartheta_0}(RR')' - (1-\vartheta_0)(R')^2 + \frac{\tau_s}{\rho}\ln\left(4m^2 - \frac{1}{3}\vartheta_0^2\right) + \frac{2G}{\rho}\left(\sqrt{4m^2 - \frac{1}{3}\vartheta_0^2} - \vartheta_0\right) + \frac{2\sigma_\vartheta}{\rho} = 0 \tag{19}$$

где через σ_ϑ обозначено σ при $r = R_\vartheta$.

В начальные моменты времени, вскоре после отхода упругой продольной волны имеем $\sigma_\vartheta = -a\rho v \approx a\rho\sqrt{\vartheta_0}R'(t)$. Когда $r = R_\vartheta$ будет находится на значительном удалении от фронта упругой продольной волны, величина σ_ϑ может быть вычислена по квазистатическому закону

$$\sigma_\vartheta = -2Ge_{rr}\Big|_{r=R_\vartheta} = -2G\vartheta_0 \tag{20}$$

Причем последнее соотношение следует из (7). В дальнейшем используется (20), т.е. принимается в расчет большее значение напряжения, тормозящее расширение полости. Это дает для размера полости оценку снизу.

Начальными условиями для развития полости в рассматриваемом случае по закону

(19) является ее начальный размер $R(t_0) = R_0$ и ее начальная скорость $R'(t_0) = R'_0$. Уравнение (19) может быть преобразовано к виду

$$\xi dy/d\xi + \alpha_1 y + \alpha_0 = 0 \tag{21}$$

$$\xi = R/R_0, \qquad y = (\rho/\tau_s)(R')^2, \qquad \alpha_1 = 2(1-(1-\vartheta_0)/\ln(1/\vartheta_0))$$
$$\alpha_0 = 4[\ln(1/\delta) + \tfrac{1}{2}(\delta + \vartheta_0)/m]/\ln(1/\vartheta_0) \tag{22}$$
$$\delta = (4m^2 - \tfrac{1}{3}\vartheta_0^2)^{1/2}$$

начальные условия преобразуются так

$$\xi \geqslant 1, \qquad y(1) = y_0, \qquad y_0 = (\rho/\tau_s)(R'_0)^2 \tag{23}$$

Отметим, что условием существования пластического режима является соотношение $d(J(E))/dt > 0$, которое на основании (6) эквивалентно $R'(t) > 0$. Из уравнения (19) следует, что при $t = t_1$ будет $R'' < 0$, т.е. при $t = t_1$ таком, что $R'(t) = 0$ полость достигла своего максимального размера $R_1 = R(t_1)$. Интегрируя (21) получим

$$\xi = \left(\frac{\alpha_1 y_0 + \alpha_0}{\alpha_1 y + \alpha_0}\right)^{1/\alpha_1} \tag{24}$$

Для максимального размера полости ($R_1/R_0 = \xi_1$) имеем

$$\frac{R_1}{R_0} = \xi_1 = \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} y_0\right)^{1/\alpha_1} \tag{25}$$

Последнее соотношение получено с учетом того, что $y = 0$ при $t = t_1$.

Отметим, что в несжимаемой среде ($\vartheta = 0$), как следует из формул (22) полость растет неограниченно.

В случае малой сжимаемости ($\ln(1/\vartheta_0) \gg 1$) коэффициенты α_0 и α_1 принимают вид

$$\alpha_0 = 2(\ln(1/\vartheta_0))^{-1}(\ln(\tfrac{1}{2}m) + 2), \qquad \alpha_1 = 2$$

Максимальный размер полости в этом случае будет

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 = 1 + \frac{2\rho}{\alpha_0 \tau_s}(R'_0)^2 \tag{26}$$

Представим выражение (24), принимая во внимание (25) и (23) в виде

$$(R')^2 = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{\alpha_1} - 1\right)\frac{\tau_s}{\rho}$$

Интегрируя это уравнение от t_0 (t_0 – время начала движения полости по инерции) до t_1, получим

$$\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\,\frac{t_1 - t_0}{R_0} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}\int_1^{\xi_1}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_1/\xi)^{\alpha_1} - 1}} \tag{27}$$

Для несжимаемой среды время роста полости по инерции неограниченно.

В случае малой сжимаемости время расширения полости по инерции, согласно (26), будет

$$t_1 - t_0 = (2/\alpha_0)R_0 R'_0 \rho/\tau_s \tag{28}$$

Если начальная скорость инерционного расширения мала $R_0'\sqrt{\rho/\tau_s} \ll 1$, то на основании (25) и (27) имеем

$$R_1 / R_0 = 1 + y_0/\alpha_0, \qquad t_1 - t_0 = 2R_0R_0'\rho/(\tau_s\alpha_0) \tag{29}$$

При $t > t_1$ начинается возвратное движение полости; в этот момент $R'(t_1) = 0$, $R''(t_1) < 0$ и для всех $R(t_1) \leqslant r \leqslant R_p$ одновременно $dJ(E)/dt = 0$. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что в области пластической по сдвигу, частицы среды одновременно перешли в состояние разгрузки.

Предыдущие соотношения, определяющие радиальную скорость, условия на границах областей несжимаемого материала, упругой и пластической зон, сами границы – все это остается без изменений.

Изменяются только s_{rr} и $s_{\varphi\varphi}$ в зоне разгрузки. Как известно приращения девиатора напряжений связаны законом Гука с приращениями девиатора деформации. Тогда получим

$$s_{rr} - s_{\varphi\varphi} = -2\tau_s + 2G\left(\partial u/\partial r - \frac{u}{r}\right) \tag{30}$$

где u – по-прежнему радиальное смещение, произошедшее от момента времени $t = t_1$. Для него

$$u = \int_{t_1}^{t} v dt = \frac{1}{2r}(R^2(t) - R_1^2)$$

Это выражение получено при помощи (6). Тогда

$$s_{rr} - s_{\varphi\varphi} = -2\tau_s + 2G(R^2 - R_1^2)/r^2$$

Как и раньше, подставив это соотношение в уравнение сохранения импульса (15) и проинтегрировав его по r с учетом расположения зон, получим для $t > t_1$ уравнение, описывающее возвратное движение полости

$$\frac{1}{2}\rho\left(\ln\left(\frac{1}{\vartheta_0}\right)(RR')' - (1-\vartheta_0)(R')^2 + \tau_s \ln\frac{1}{\delta} + G(\delta + \vartheta_0) + G(1-\delta)\left(\frac{R_1}{R}\right)^2 - 1\right) = 0 \tag{31}$$

Для него начальными условиями будут соотношения $R(t_1) = R_1$, $R'(t_1) = 0$.

В момент полной остановки $t = t_2$ будет одновременно $R'(t_2) = 0$, $R''(t_2) = 0$ и из (31) следует

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 1 + 2m\frac{\ln(1/\delta) + \delta + \vartheta_0}{1-\delta} \tag{32}$$

Таким образом изменение R_1 за счет возвратного движения полости происходит на величину порядка m, малую для грунтов. Значит в случае больших R_1/R_0 по сравнению с 1, уменьшением размера полости за счет возвратного движения можно пренебречь.

Возможен также случай, когда окончательный размер полости R_2 будет $R_2 < R_0$ (так произойдет при малых y_0). Для этого, на основании (32) и (29), необходимо выполнение условия

$$(R_0')^2 < 4m\frac{\ln\delta}{\ln\vartheta_0}\left(\frac{\delta}{2m} - \ln\delta\right)\frac{\tau_s}{\rho}$$

Из изложенного выше следует, что развитие полости в рассмотренном варианте происходит из-за "упаковки" среды и по причине инерции частиц, получивших в начальный момент начальную скорость. При больших ϑ_0 главную роль играет "упаковка" в непосредственной близости полости. При малых ϑ_0, $R_\vartheta = R\vartheta_0^{-1/2}$, объем среды, вовлеченной в движение оказывается большим. В этом случае главная причина роста полости – движение по инерции.

Из формулы (32) для окончательного радиуса полости следует, что возможность "схлопывания" полости в большей или меньшей степени, т.е. до больших или меньших размеров, определяется сдвиговыми свойствами среды. Так при малых G также малым будет и R_2, а при $G \to \infty$, $R_1/R_2 \to 1$.

Автор благодарит В.Н. Кукуджанова за постоянное внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-00659).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сагомонян А.Я.* Проникание газовой струи в грунт // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1979. № 5. С. 60–64.
2. *Багдоев А.Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1961. 267 с.
3. *Колесников В.А., Флитман Л.М.* Автомодельная задача о расширяющемся и движущемся вдоль своей оси цилиндре, окруженном упругопластической средой // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: 1984. Изд-во АН АрмССР. С. 175–176.
4. *Кукуджанов В.Н.* Ударные волны в уплотняющейся вязкопластической среде // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. 1958. Т. 11. № 6. С. 61–72.
5. *Ишлинский А.Ю., Зволинский Н.В., Степаненко И.З.* К динамике грунтовых масс // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 4. С. 729–731.
6. *Колесников В.А.* Расширение цилиндрической полости в упругопластической среде при динамическом воздействии // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 65–71.

Москва

Поступила в редакцию
12.04.2001