МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2001

УДК 624.072.21/23

© 2001 г. Ю.И. БУТЕНКО

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА. Ч 1

В последнее время в литературе идет дискуссия о путях обоснования теории пластин, в которой противопоставляются классическая теория, основанная на гипотезах Кирхгофа, и теория Рейснера–Тимошенко. Известно, что уточнение основного напряженного состояния (проникающего решения) или по терминологии асимптотических методов – внутренней задачи идет за счет уточнения уравнений изгиба пластины и более точной формулировки краевых условий. В публикуемой статье на примере плоской задачи для ортотропной полосы строятся многочленные асимптотические разложения, которые позволяют уточнить внутреннюю задачу, задачу типа погранслоя (быстроубывающее от края решение) и на этой базе уточнить краевые условия. Построены симметричная задача и задача изгиба полосы с точностью ε^2 ($\varepsilon = h/a$ – малый параметр). Показано, что модель Рейснера–Тимошенко для стержня не учитывает решения типа погранслоя, и поэтому уточнения в основное напряженное состояние связаны только с уточнением уравнений равновесия. В то же время принятие более сложной модели для изгиба стержня (например, с точностью ε^2 для всех параметров задачи) дает уточнения при геометрических краевых условиях во внутреннюю задачу с параметром ε. Эту особенность необходимо учитывать при построении теории расчета пластин.

Известно [1 – 4], что давняя инженерная проблема построения теории балок, пластин и оболочек является по своей сути проблемой асимптотической. В [3, 4] предложен асимптотический метод интегрирования уравнений теории упругости для получения соответствующих уравнений теории пластин и оболочек. Этот метод фактически приводит к поэтапному интегрированию искомых величин по поперечной координате и представлению их в виде степенного ряда по этой координате.

С другой стороны можно сразу представить искомые величины в виде ряда по поперечной координате, а соответствующие дифференциальные уравнения получить с использованием вариационных принципов. Использование того или иного вариационного принципа зависит от выбора основных искомых величин.

Представление перемещений в виде степенных рядов по поперечной координате с последующим использованием вариационных принципов для пластин и оболочек даны в [5–7]. Однако этот подход приводит к большим вычислительным трудностям, которые, в первую очередь, обусловлены тем, что полученные дифференциальные уравнения и краевые условия содержат основное (внутреннее) напряженное состояние (ОНС) и решения типа погранслоя (РТП). Для прикладных теорий желательно иметь отдельные (не связанные между собой) подходы, которые позволили бы определить или только решение, которое действует на всем протяжении конструкции (ОНС), или только решение быстро убывающее от края (РТП).

Трудности по разделению напряженных состояний при построении приближенных теорий (моделей) можно преодолеть, если для полученной вариационным путем системы уравнений [5–7] использовать асимптотические методы исследования, что и будет показано в данной работе на примере построения теории балок из ортотропного материала в геометрически и физически линейных постановках.

Предложенный метод в некотором плане близок к методу символического интегрирования уравнений теории упругости [8] и приводит к результатам, во многом совпадающими с результатами асимптотического метода в [3, 9] для плоской задачи теории упругости. Представление перемещений в виде степенных рядов по поперечной координате при построении неклассических теорий пластин и оболочек используется в [10, 11].

1. Постановка задачи. Рассмотрим полосу длиной a, высотой $2h$, единичной толщины. Предполагается, что главные направления ортотропии материала совпадают с направлением координатных линий. Требуется найти решение плоской задачи теории упругости ортотропного тела в области $\Omega\{(x, y)\colon x \in [0, a], |y| \leqslant h, 2h \ll a\}$, когда на продольных сторонах прямоугольника $y = \pm h$ заданы значения напряжений

$$\tau_{xy} = \pm X^{\pm}(x), \quad \sigma_y = \pm Y^{\pm}(x) \quad \text{при} \quad y = \pm h \tag{1.1}$$

В дальнейшем будем использовать следующие безразмерные величины: $\xi = x/a$, $\zeta = y/h$ $(0 \leqslant \xi \leqslant 1, -1 \leqslant \zeta \leqslant 1)$, $U = ua$, $V = va$, $\varepsilon = h/a$.

В результате получим соотношения, содержащие малый параметр ε при производных по ζ. Для напряжений имеем соотношения упругости

$$\sigma_x = \overline{E_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu_{12}\varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right), \quad \sigma_y = \overline{E_2}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \nu_{21}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \quad \tau_{xy} = G_{12}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) \tag{1.2}$$

$$\overline{E_i} = \frac{E_i}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости в направлении осей $x(\xi)$, $y(\zeta)$ соответственно, G_{12} – модуль сдвига, ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона. Для ортотропного тела имеет место соотношение $E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}$.

Перемещения представим в виде степенного ряда по поперечной координате $y = h\zeta$:

$$u(\xi, \zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i(\xi, \varepsilon)\zeta^i, \quad v(\xi, \zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(\xi, \varepsilon)\zeta^i \tag{1.3}$$

где N – порядок аппроксимации, соответствующий выбранной модели расчета стержня. Здесь и далее нижний индекс в компонентах перемещений, напряжений и деформаций соответствует показателю степени поперечной координаты, при которой он имеет место.

Уравнения относительно u_i, v_i будут содержать малый параметр ε в различных степенях, и решения этих уравнений должны зависеть от ε [12, 13].

Решение каждой задачи расчета полосы при условиях (1.1) есть сумма решений симметричной (растяжение–сжатие) и кососимметричной (изгиб) задач, которым соответствуют граничные условия при $\zeta = \pm 1$:

симметричная задача

$$\tau_{xy} = \pm X_1, \quad \sigma_y = Y_1 \tag{1.4}$$

кососимметричная задача

$$\tau_{xy} = X_2, \quad \sigma_y = \pm Y_2 \tag{1.5}$$

$$X_i = (X^+ \pm X^-)/2, \quad Y_i = (Y^+ \mp Y^-)/2 \quad (i = 1, 2)$$

В симметричной задаче u, σ_x, σ_y – четные, а v, τ_{xy} – нечетные функции от ζ, а в кососимметричной задаче – наоборот.

Для получения уравнений равновесия стержня используем вариационный принцип возможных перемещений

$$\iint_{\Omega} \sigma^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta}d\Omega = \iint_{\Omega} \mathbf{Q}\delta\mathbf{u}d\Omega + \int_{\Sigma} \mathbf{P}\delta\mathbf{u}d\Sigma \tag{1.6}$$

где $\sigma^{\alpha\beta}$ – тензор напряжений и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – тензор деформаций плоской задачи ($\alpha = 1, 2$), $\mathbf{Q}$ – вектор массовых сил, $\mathbf{P}$ – вектор поверхностной нагрузки, $\mathbf{u}$ – вектор перемещения, Σ – поверхность стержня, на которой задана поверхностная нагрузка.

Из вариационного принципа Лагранжа следуют системы дифференциальных уравнений и статических краевых условий задачи.

1.1. Симметричная задача. Для симметричной задачи перемещения имеют вид

$$u(\xi,\zeta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} u_{2i}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i}\zeta^{2i}, \quad v(\xi,\zeta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} v_{2i+1}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i+1}\zeta^{2i+1} \tag{1.7}$$

для определения которых имеет место система дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=0}^{N} a_{i0}\varepsilon^{2i}\frac{d\sigma_{x,2i}}{d\xi} + \frac{X_1}{\varepsilon} = 0 \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=0}^{N} b_{ik}\varepsilon^{2i}\left[\frac{d\sigma_{x,2i}}{d\xi} - (2k+2)\tau_{xy,2i+1}\right] + \frac{X_1}{\varepsilon} = 0 \tag{1.9}$$

$$\sum_{i=0}^{N} \left[b_{ik}\varepsilon^{2i+2}\frac{d\tau_{xy,2i+1}}{d\xi} - c_{ik}\varepsilon^{2i}\sigma_{y,2i}\right] + Y_1 = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,N) \tag{1.10}$$

$$a_{ik} = \frac{1}{2i+2k+1}, \quad b_{ik} = \frac{1}{2i+2k+3}, \quad c_{ik} = \frac{2k+1}{2i+2k+1}$$

Из общей системы уравнений (1.8)–(1.10) выделено уравнение (1.8), которое соответствует вариации δu_0. Это связано с тем, что данное уравнение является в дальнейшем основным при рассмотрении внутренней задачи.

Напряжения (1.2) вычисляются по соотношениям

$$\sigma_x = \sum_{i=0}^{N} \sigma_{x,2i}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i}\zeta^{2i}, \quad \sigma_y = \sum_{i=0}^{N} \sigma_{y,2i}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i}\zeta^{2i}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=0}^{N} \tau_{xy,2i+1}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i+1}\zeta^{2i+1} \tag{1.11}$$

$$\sigma_{x,2i} = \overline{E_1}\gamma_{x,2i}(\xi,\varepsilon) = \overline{E_1}\left[\frac{du_{2i}}{d\xi} + \nu_{12}(2i+1)v_{2i+1}\right]$$

$$\sigma_{y,2i} = \overline{E_2}\gamma_{y,2i}(\xi,\varepsilon) = \overline{E_2}\left[(2i+1)v_{2i+1} + \nu_{21}\frac{du_{2i}}{d\xi}\right] \tag{1.12}$$

$$\tau_{xy,2i+1} = G_{12}\gamma_{xy,2i+1}(\xi,\varepsilon) = G_{12}\left[(2i+2)u_{2i+2} + \frac{dv_{2i+1}}{d\xi}\right]$$

Статические краевые условия для края $\xi = \mathrm{const}$ при компонентах внешней краевой нагрузки p_x и p_y имеют вид

$$\sum_{i=0}^{N} a_{ik}\varepsilon^{2i}\sigma_{x,2i} = \int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^{2k}d\zeta, \quad \sum_{i=0}^{N} b_{ik}\varepsilon^{2i+1}\tau_{xy,2i+1} = \int_0^1 p_y(\zeta)\zeta^{2k+1}d\zeta \tag{1.13}$$

при $k = 0, 1, \ldots, N$, или соответствующие им вариации кинематических величин

$$\delta\left(\sum_{k=0} a_{ik}\varepsilon^{2k}u_{2k}\right) = 0, \quad \delta\left(\sum_{k=0} b_{ik}\varepsilon^{2k+1}\upsilon_{2k+1}\right) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots) \tag{1.14}$$

В частном случае условиям (1.14) соответствуют следующие соотношения

$$\delta u_{2k} = 0, \quad \delta\upsilon_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1.15}$$

Вариациям (1.14)–(1.15) могут соответствовать различные геометрические краевые условия. Например, условиям (1.14) ставятся в соответствие краевые соотношения

$$\sum_{k=0} a_{ik}\varepsilon^{2k}u_{2k} = \int_0^1 \zeta^{2i}u_\Sigma d\zeta, \quad \sum_{k=0} b_{ik}\varepsilon^{2k+1}\upsilon_{2k+1} = \int_0^1 \zeta^{2i+1}\upsilon_\Sigma d\zeta \quad (i = 0, 1, \ldots) \tag{1.16}$$

которые следуют и из вариационного принципа Кастильяно, учитывая, что все уравнения плоской задачи и статические граничные условия выполнены. Для вариаций (1.15) возможна следующая постановка краевых условий

$$u_0 = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta, \quad u_{2k} = 0, \quad \upsilon_1 = \frac{3}{\varepsilon}\int_0^1 \zeta\upsilon_\Sigma d\zeta, \quad \upsilon_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.17}$$

Если на кромке Σ перемещения u_Σ и υ_Σ можно представить в виде степенного ряда по поперечной координате, то будем иметь

$$u_\Sigma = \sum_{k=0} u_{\Sigma,2k}\zeta^{2k}, \quad \upsilon_\Sigma = \sum_{k=0} \upsilon_{\Sigma,2k+1}\zeta^{2k+1} \tag{1.18}$$

Откуда следует $u_{2k} = u_{\Sigma,2k}$, $\upsilon_{2k+i} = \upsilon_{\Sigma,2k+1}$ при $k = 0, 1, \ldots$.

Возможны и другие представления геометрических краевых условий, которые соответствуют вариациям (1.14)–(1.15).

При решении задачи в перемещениях система уравнений (1.8)–(1.10) со статическими краевыми условиями (1.13) или любым из вариантов геометрических условий (1.16)–(1.18) с учетом соотношений упругости полна по отношению к искомым функциям. Каждому из вариантов краевых условий (1.16)–(1.18) соответствует свое напряженно-деформированное состояние. При однородных краевых условиях ($u_\Sigma = 0$, $\upsilon_\Sigma = 0$) варианты постановки геометрических краевых условий (1.17)–(1.18) сводятся к одинаковым соотношениям.

1.2. Кососимметричная задача. Перемещения имеют вид

$$u(\xi,\zeta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} u_{2i+1}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i+1}\zeta^{2i+1}, \quad \upsilon(\xi,\zeta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \upsilon_{2i}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i}\zeta^{2i} \tag{1.19}$$

которые определяются из уравнений равновесия

$$\sum_{i=0}^{N}\left[b_{ik}\varepsilon^{2i+2}\frac{d\sigma_{x,2i+2}}{d\xi} - c_{ik}\varepsilon^{2i}\tau_{xy,2i}\right] + \varepsilon^2\frac{m}{3J} = 0 \tag{1.20}$$

$$\sum_{i=0}^{N} a_{i0}\varepsilon^{2i}\frac{d\tau_{xy,2i}}{d\xi} + \varepsilon^2\frac{q}{3J} = 0 \tag{1.21}$$

$$\sum_{i=0}^{N} b_{ik}\varepsilon^{2i}\left[\frac{d\tau_{xy,2i}}{d\xi} - (2k+2)\sigma_{y,2i+1}\right] + \varepsilon^2\frac{q}{3J} = 0 \tag{1.22}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, N); \quad q = 2Y_2a^3, \quad m = 2X_2a^2h$$

где $J = 2h^3/3$ – момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси z.

В этом случае из общей системы уравнений задачи изгиба выделено уравнение (1.21), которое соответствует вариации δv_0. Это уравнение является ведущим при выделении ОНС вместе с (1.20) при $k = 0$, что соответствует вариации δu_1. Напряжения (1.2) вычисляются по соотношениям

$$\sigma_x = \sum_{i=0}^{N} \sigma_{x,2i+1}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i+1}\zeta^{2i+1}, \quad \sigma_y = \sum_{i=0}^{N} \sigma_{y,2i+1}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i+1}\zeta^{2i+1}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=0}^{N} \tau_{xy,2i}(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{2i}\zeta^{2i} \tag{1.23}$$

$$\sigma_{x,2i+1} = \overline{E_1}\gamma_{x,2i+1}(\xi,\varepsilon) = \overline{E_1}\left[\frac{du_{2i+1}}{d\xi} + \nu_{12}(2i+2)v_{2i+2}\right]$$

$$\sigma_{y,2i+1} = \overline{E_2}\gamma_{y,2i+1}(\xi,\varepsilon) = \overline{E_2}\left[(2i+2)v_{2i+2} + \nu_{21}\frac{du_{2i+1}}{d\xi}\right] \tag{1.24}$$

$$\tau_{xy,2i} = G_{12}\gamma_{xy,2i}(\xi,\varepsilon) = G_{12}\left[(2i+1)u_{2i+1} + \frac{dv_{2i}}{d\xi}\right]$$

Статические краевые условия на краю стержня записываются в виде

$$\sum_{i=0}^{N} b_{ik}\varepsilon^{2i+1}\sigma_{x,2i+1} = \int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^{2k+1}d\zeta, \quad \sum_{i=0}^{N} a_{ik}\varepsilon^{2i}\tau_{xy,2i} = \int_0^1 p_y(\zeta)\zeta^{2k}d\zeta \quad (k=0,1,\ldots,N) \tag{1.25}$$

или соответствующие им вариации геометрических величин

$$\delta\left(\sum_{k=0} b_{ik}\varepsilon^{2k+1}u_{2k+1}\right) = 0, \quad \delta\left(\sum_{k=0} a_{ik}\varepsilon^{2k}v_{2k}\right) = 0 \quad (i=0,1,\ldots) \tag{1.26}$$

Частным случаем соотношений (1.26) являются выражения

$$\delta u_{2k+1} = 0, \quad \delta v_{2k} = 0 \quad (k=0,1,\ldots) \tag{1.27}$$

Вариациям (1.26) соответствуют геометрические краевые условия

$$\sum_{k=0} b_{ik}\varepsilon^{2k+1}u_{2k+1} = \int_0^1 \zeta^{2i+1}u_\Sigma d\zeta, \quad \sum_{k=0} a_{ik}\varepsilon^{2k}v_{2k} = \int_0^1 \zeta^{2i}v_\Sigma d\zeta \quad (i=0,1,\ldots) \tag{1.28}$$

Эти условия следуют, как и в задаче растяжения–сжатия, из вариационного принципа Кастильяно, учитывая, что все уравнения плоской задачи и статические граничные условия выполняются.

Возможна и следующая интерпретация геометрических краевых условий:

$$u_1 = \frac{3}{\varepsilon}\int_0^1 \zeta u_\Sigma d\zeta, \quad u_{2k+1} = 0, \quad v_0 = \int_0^1 v_\Sigma d\zeta, \quad v_{2k} = 0 \quad (k=1,2\ldots) \tag{1.29}$$

которая соответствует соотношениям (1.27).

Будем считать что на кромке Σ перемещения можно представить в виде степенного ряда по поперечной координате

$$u_\Sigma(\zeta) = \sum_{k=0} u_{\Sigma,2k+1}\zeta^{2k+1}, \quad v_\Sigma(\zeta) = \sum_{k=0} v_{\Sigma,2k}\zeta^{2k}$$

Тогда краевые условия будут иметь вид

$$u_{2k+1} = u_{\Sigma,2k+1}, \quad v_{2k} = v_{\Sigma,2k} \quad (k=0,1,\ldots) \tag{1.30}$$

Возможны и другие формы представления краевых условий. Из условий симметричной задачи (1.14)–(1.18) и задачи изгиба (1.25)–(1.30) видно, что статические краевые условия имеют единственную форму представления, а кинематические – многовариантную. При решении задачи в перемещениях система уравнений (1.20)–(1.22) при краевых условиях (1.35) и любого из вариантов (1.28)–(1.30) с учетом соотношений упругости полна по отношению к искомым функциям. Каждому из вариантов краевых условий (1.28)–(1.30) соответствует свое напряженно-деформированное состояние.

Получены статические и различные интерпретации геометрических краевых условий, которые являются вариационной формулировкой краевых условий плоской задачи теории упругости. В точной постановке плоской задачи рассматриваются следующие варианты краевых условий:

статические краевые условия

$$p_x = \varphi_1(\zeta), \quad p_y = \varphi_2(\zeta) \tag{1.31}$$

смешанные краевые условия

$$u_\Sigma = \varphi_1(\zeta), \quad p_y = \varphi_2(\zeta) \tag{1.32}$$

$$p_x = \varphi_1(\zeta), \quad v_\Sigma = \varphi_2(\zeta) \tag{1.33}$$

геометрические краевые условия

$$u_\Sigma = \varphi_1(\zeta), \quad v_\Sigma = \varphi_2(\zeta) \tag{1.34}$$

Представление перемещений в виде степенного ряда по ζ (1.7) и (1.19) позволяет построить теорию расчета стержня с любой необходимой точностью. Случай $N = 0$ (модель первого приближения) в задаче изгиба стержня соответствует модели Тимошенко. В литературе рассматривались и другие различные комбинации усечения степенных рядов. Однако необходимо учитывать, что каждое увеличение N приводит к повышению порядка системы дифференциальных уравнений до $4(N + 1)$, и, следовательно, к трудностям в их решении. В дальнейшем рассмотрим точную вариационную постановку плоской задачи теории упругости, поэтому используем бесконечные ряды напряжений и перемещений по координате ζ и в записи бесконечной системы уравнений появляются многоточия, позволяющие обрывать записи на любой требуемой точности. В качестве прикладной теории остановимся на построении теории расчета стержня с точностью ε^2, которая для задачи растяжения – сжатия имеет вид

$$u = u_0 + \varepsilon^2\zeta^2 u_2 + \varepsilon^4\zeta^4 u_4, \quad v = \varepsilon\zeta v_1 + \varepsilon^3\zeta^3 v_3 \tag{1.35}$$

а для задачи изгиба

$$u = \varepsilon\zeta u_1 + \varepsilon^3\zeta^3 u_3, \quad v = v_0 + \varepsilon^2\zeta^2 v_2 + \varepsilon^4\zeta^4 v_4 \tag{1.36}$$

В этом случае для симметричной задачи u, σ_x, σ_y вычисляются с точностью ε^2, но частично учтены члены, содержащие ε^4, которые позволяют вычислить τ_{xy} с точностью до двух слагаемых. И хотя величина $\tau_{xy,3}$ незначительна, она позволяет более полно удовлетворить всем соотношениям плоской теории упругости. Аналогично в кососимметричной задаче u, σ_x, σ_y, τ_{xy} вычисляются с точностью ε^2, а v содержит слагаемое v_4, которое выбросить не удастся, ибо нарушится логика выбора базовых величин. Такая точность расчета необходима по двум причинам: для ортотропного материала отношение E_1/G_{12} может быть достаточно большим (≈ 30) и поэтому учет второго слагаемого обязателен; для более полного выполнения всех соотношений упругости необходимо выбирать больше членов ряда перемещений.

Уравнения (1.8)–(1.10) с краевыми условиями (1.13), (1.16)–(1.18) для растяжения – сжатия и уравнения (1.20)–(1.22) с краевыми условиями (1.25), (1.28)–(1.30) для изгиба стержня содержат малый параметр ε при старшей производной и, следовательно, система уравнений является сингулярно возмущенной. Решение сингулярно возмущенной краевой задачи складывается из регулярной составляющей и составляющей типа пограничного слоя. Таким образом решение задачи включает следующие этапы [9, 12, 13]:

(*1*) построение решений невозмущенного уравнения, которые разыскиваются в виде ряда по степеням малого параметра ε. При этом предполагается, что известны решения невозмущенного уравнения при $\varepsilon = 0$. В теории балок, пластин и оболочек соответствующие решения часто называют решением внутренней задачи или основным решением;

(*2*) определение пограничных слоев при помощи второго расщепления исходного возмущенного оператора;

(*3*) сращивание (сопряжение) найденных качественно различных решений при помощи краевых условий.

Следовательно, все перемещения и напряжения сформулированной задачи содержат как ОНС, не затухающего при удалении от границы в глубь области, так и решение типа погранслоя, описывающего быстро затухающее от края решение. Но некоторые уравнения и краевые условия описывают только ОНС. Уравнения равновесия и статические краевые условия при вариации δu_0 задачи растяжения – сжатия содержат только ОНС. Аналогично в задаче изгиба уравнения равновесия и статические краевые условия, соответствующие вариациям при δu_1 и δv_0. Это связано с тем, что в РТП напряжение σ_x задачи растяжения – сжатия и напряжения σ_x, τ_{xy} задачи изгиба являются самоуравновешенными по высоте, таким образом выполняются условия:

симметричная задача

$$\int_{-1}^{1} \sigma_x d\zeta = 0$$

задача изгиба

$$\int_{-1}^{1} \sigma_x \zeta d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \tau_{xy} d\zeta = 0$$

Перемещения задачи погранслоя не являются самоуравновешенными по высоте сечения.

2. Основное напряженное состояние (внутренняя задача). *2.1. Симметричная задача.* С точностью ε^4 из системы уравнений (1.8)–(1.10) имеем

$$\frac{d}{d\xi}\left(\varepsilon^0\sigma_{x,0} + \frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{x,2} + \frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{x,4} + \ldots\right) + \frac{X_1}{\varepsilon} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\varepsilon^0\sigma_{x,0} + \frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{x,2} + \frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{x,4} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{3}\varepsilon^0\tau_{xy,1} + \frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xy,3} + \frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xy,5} + \ldots\right) + \frac{X_1}{\varepsilon} = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\varepsilon^0\sigma_{x,0} + \frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{x,2} + \frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{x,4} + \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{5}\varepsilon^0\tau_{xy,1} + \frac{1}{7}\varepsilon^2\tau_{xy,3} + \frac{1}{9}\varepsilon^4\tau_{xy,5} + \ldots\right) + \frac{X_1}{\varepsilon} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xy,1} + \frac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xy,3} + \frac{1}{7}\varepsilon^6\tau_{xy,5} + \ldots\right) - \left(\varepsilon^0\sigma_{y,0} + \frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{y,2} + \frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{y,4} + \ldots\right) + Y_1 = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xy,1} + \frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xy,3} + \frac{1}{9}\varepsilon^6\tau_{xy,5} + \ldots\right) - 3\left(\frac{1}{3}\varepsilon^0\sigma_{y,0} + \frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{y,2} + \frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{y,4} + \ldots\right) + Y_1 = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{7}\varepsilon^2\tau_{xy,1} + \frac{1}{9}\varepsilon^4\tau_{xy,3} + \frac{1}{11}\varepsilon^6\tau_{xy,5} + \ldots\right) - 5\left(\frac{1}{5}\varepsilon^0\sigma_{y,0} + \frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{y,2} + \frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{y,4} + \ldots\right) + Y_1 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Известно [12], что если ε малый параметр и при $\varepsilon = 0$ система уравнений имеет решение, то решение уравнений (2.1) можно представить в виде разложения по малому параметру ε:

$$u_{2i}(\xi,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{N_s} u_{2i}^s(\xi)\varepsilon^s, \quad \upsilon_{2i+1}(\xi,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{N_s} \upsilon_{2i+1}^s(\xi)\varepsilon^s \tag{2.2}$$

Порядок разложения N_s должен быть связан с точностью используемой модели балки ($N_s = 2N$).

Представление (2.2) подставляем в (1.12), (2.1) и группируем слагаемые при каждой степени параметра ε. Поскольку эти уравнения должны удовлетворятся для всех значений ε и последовательность степеней ε линейно независима, то выражения при каждой степени малого параметра обращаются в нуль независимо [12].

Тогда при ε^s ($s = 0, 1$) имеем

$$E_1 \frac{d^2u_0^s}{d\xi^2} = p^s \tag{2.3}$$

$$\sigma_{y,0}^s = \overline{E_2}\left(\upsilon_1^s + \nu_{21}\frac{du_0^s}{d\xi}\right) = p_1^s, \quad \tau_{xy,1}^s = G_{12}\left(2u_2^s + \frac{d\upsilon_1^s}{d\xi}\right) = p_2^s$$

$$\sigma_{x,0}^s = \overline{E_1}\left(\frac{du_0^s}{d\xi} + \nu_{12}\upsilon_1^s\right) \tag{2.4}$$

$$p^0 = -X_1/\varepsilon - \nu_{21}dY_1/d\xi, \quad p_1^0 = Y_1, \quad p_2^0 = X_1/\varepsilon, \quad p^1 = p_1^1 = p_2^1 = 0$$

Структура выражений (2.3), (2.4) такова, что имеем дифференциальное уравнение для определения u_0^s (2.3) и соотношения для определения компонент напряжений $\sigma_{y,0}^s, \sigma_{x,0}^s, \tau_{xy,1}^s$ и компонент перемещений υ_1^s, u_2^s. При $s = 0$ уравнение (2.3) совпадает с классическим уравнением растяжения – сжатия стержня. Однако, соотношения (2.4) при $s = 0$ дают большую информацию, чем классическая теория растяжения – сжатия, основанная на гипотезе плоских сечений, так как позволяет определить $\sigma_{y,0}^0, \tau_{xy,1}^0, \upsilon_1^0, u_2^0$, которыми пренебрегают в классической теории.

При $s \geqslant 2$ систему уравнений (2.1) с учетом (2.2) удобно представить в виде

$$\sigma_{y,0}^s + \frac{1}{3}\sigma_{y,2}^{s-2} + \frac{1}{5}\sigma_{y,4}^{s-4} + \ldots = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,1}^{s-2} + \frac{1}{5}\tau_{xy,3}^{s-4} + \ldots\right)$$

$$3\left(\frac{1}{3}\sigma_{y,0}^s + \frac{1}{5}\sigma_{y,2}^{s-2} + \frac{1}{7}\sigma_{y,4}^{s-4} + \ldots\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\tau_{xy,1}^{s-2} + \frac{1}{7}\tau_{xy,3}^{s-4} + \ldots\right) \tag{2.5}$$

$$5\left(\frac{1}{5}\sigma_{y,0}^s + \frac{1}{7}\sigma_{y,2}^{s-2} + \frac{1}{9}\sigma_{y,4}^{s-4} + \ldots\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{7}\tau_{xy,1}^{s-2} + \frac{1}{9}\tau_{xy,3}^{s-4} + \ldots\right)$$

. . . .

$$\frac{d}{d\xi}\left(\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{3}\sigma_{x,2}^{s-2} + \frac{1}{5}\sigma_{x,4}^{s-4} + \ldots\right) = 0 \tag{2.6}$$

$$2\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,1}^s + \frac{1}{5}\tau_{xy,3}^{s-2} + \ldots\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{5}\sigma_{x,2}^{s-2} + \frac{1}{7}\sigma_{x,4}^{s-4} + \ldots\right)$$

$$4\left(\frac{1}{5}\tau_{xy,1}^s + \frac{1}{7}\tau_{xy,3}^{s-2} + \ldots\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{7}\sigma_{x,2}^{s-2} + \frac{1}{9}\sigma_{x,4}^{s-4} + \ldots\right) \tag{2.7}$$

. . . .

где $Q^s \equiv 0$ при $s < 0$, а Q^s – любое из $\sigma_{ij,n}^s$.

Из этой системы уравнений следует, что при $s \geqslant 2$ бесконечная алгебраическая система уравнений (2.5) служит для нахождения $\sigma^s_{y,2i}$ через $\tau^s_{xy,2i+1}$, которые уже известны из предыдущих этапов

$$\sigma^s_{y,0} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\tau^{s-2}_{xy,1} + \frac{1}{4}\tau^{s-4}_{xy,3} + \ldots\right), \quad \sigma^{s-2}_{y,2} = -\frac{1}{2}\frac{d\tau^{s-2}_{xy,1}}{d\xi}, \quad \sigma^{s-4}_{y,4} = -\frac{1}{4}\frac{d\tau^{s-4}_{xy,3}}{d\xi}, \ldots \tag{2.8}$$

По полученным $\sigma^s_{y,2i}$, с учетом уравнения (2.6), получаем дифференциальное уравнение для определения u^s_0 следующих приближений, которые можно записать в виде (2.3), где

$$p^s = -\nu_{12}\frac{E_1}{E_2}\frac{d\sigma^s_{y,0}}{d\xi} - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\sigma^{s-2}_{x,2} + \frac{1}{5}\sigma^{s-4}_{x,4} + \ldots\right) \tag{2.9}$$

Затем по известным u^s_0 определяем $\sigma^s_{x,2i}$, что позволяет по еще одной бесконечной алгебраической системе уравнений (2.7) определить $\tau^s_{xy,2i+1}$:

$$\tau^s_{xy,1} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\sigma^{s-2}_{x,2} + \frac{1}{5}\sigma^{s-4}_{x,4} + \ldots\right), \quad \tau^{s-2}_{xy,3} = -\frac{1}{3}\frac{d\sigma^{s-2}_{x,2}}{d\xi}, \quad \tau^{s-4}_{xy,5} = -\frac{1}{5}\frac{d\sigma^{s-4}_{x,4}}{d\xi}, \ldots \tag{2.10}$$

С учетом соотношений (2.8), (2.10) выполняются статические краевые условия для τ_{xy} и σ_y на лицевых поверхностях $\zeta = \pm 1$:

$$\sigma_y = Y_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-\zeta^2)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\tau^s_{xy,1}}{d\xi} + \frac{1}{4}\varepsilon^4(1-\zeta^4)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\tau^s_{xy,3}}{d\xi} + \ldots$$

$$\tau_{xy} = \varepsilon\zeta X_1 + \frac{1}{3}\varepsilon^3(1-\zeta^2)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\sigma^s_{x,2}}{d\xi} + \frac{1}{5}\varepsilon^5\zeta(1-\zeta^4)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\sigma^s_{x,4}}{d\xi} + \ldots \tag{2.11}$$

Из всех соотношений видно, на каком этапе (s) необходимо остановиться при построении теории стержней с заданной точностью, но при этом учитывается порядок отношения E_1/E_2, E_1/G_{12}.

Так для $s = 2,3$ имеем уравнение (2.3) при

$$p^2 = -\frac{1}{6\varepsilon}\left(\nu_{21} + \frac{E_1}{G_{12}}\right)\frac{d^2X_1}{d\xi^2} + \frac{1}{6}\frac{E_1}{E_2}\frac{d^3Y_1}{d\xi^3}, \quad p^3 = 0$$

$$\sigma^s_{y,0} = \overline{E_2}\left(\upsilon^s_1 + \nu_{21}\frac{du^s_0}{d\xi}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\tau^{s-2}_{xy,1}}{d\xi} \tag{2.12}$$

$$\sigma^{s-2}_{y,2} = \overline{E_2}\left(3\upsilon^{s-2}_3 + \nu_{21}\frac{du^{s-2}_2}{d\xi}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\tau^{s-2}_{xy,1}}{d\xi}$$

Из этих выражений находим $\upsilon^s_1, \upsilon^s_3$. Далее

$$\sigma^s_{x,0} = \overline{E_1}\left(\frac{du^s_0}{d\xi} + \nu_{12}\upsilon^s_1\right), \quad \sigma^{s-2}_{x,2} = \overline{E_1}\left(\frac{du^{s-2}_2}{d\xi} + \nu_{12}3\upsilon^{s-2}_3\right)$$

$$\tau^s_{xy,1} = G_{12}\left(2u^s_2 + \frac{d\upsilon^s_1}{d\xi}\right) = \frac{1}{3}\frac{d\sigma^{s-2}_{x,2}}{d\xi}, \quad \tau^{s-2}_{xy,3} = G_{12}\left(4u^{s-2}_4 + \frac{d\upsilon^{s-2}_3}{d\xi}\right) = -\frac{1}{3}\frac{d\sigma^{s-2}_{x,2}}{d\xi}$$

По аналогии можно построить любое приближение $s \geqslant 4$. Алгебраические системы уравнений (2.5) и (2.7) имеют специальную структуру и решены при произвольном N.

Для реальных материалов обычно E_1/E_2 оказывается числом небольшим, а отношение E_1/G_{12} может оказаться таковым. Поэтому, если даже внешняя нагрузка в (2.12) не будет обладать большой изменяемостью, то с учетом E_1/G_{12} вносимая поправка может быть значительной. Отсюда следует, что гипотеза плоских сечений, формально перенесенная на анизотропные стержни, изготовленные из материалов с ярко выраженной анизотропией, может привести к неверным результатам [9].

Необходимо подчеркнуть, что на каждом этапе только u_0^s определяется из дифференциального уравнения, имеющего постоянную структуру и правая часть которого зависит от предыдущих приближений. Все остальные характеристики ОНС определяются по простым дифференциальным соотношениям. Следовательно, краевые условия должны быть поставлены для u_0^s. Естественно, что этих краевых условий недостаточно для удовлетворения всех краевых условий (1.13), (1.16)–(1.18). Для этого необходимо иметь еще одно решение – решение типа погранслоя. Отметим, что избыток краевых условий в решении внутренней задачи косвенным образом подтверждает, что мы имеем дело с сингулярно возмущенной системой уравнений.

Анализ уравнений при $s \geqslant 1$ показывает, что правые части дифференциального и алгебраических систем уравнений при нечетных s равны нулю и, следовательно, нулевыми являются и соответствующие решения при однородных краевых условиях. Поэтому для задачи симметричной по нагрузкам и краевым условиям вопрос о необходимости использования этих приближений решается только с использованием краевых условий для ОНС и РТП. Иначе можно использовать в качестве малого параметра $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$.

2.2. Кососимметричная задача. Из системы уравнений (1.20)–(1.22) для стержня с точностью ε^4 имеем

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{x,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{x,3}+\frac{1}{7}\varepsilon^6\sigma_{x,5}+\ldots\right)-\left(\tau_{xy,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xy,4}+\ldots\right)+\varepsilon^2\frac{m}{3J}=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{x,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{x,3}+\frac{1}{9}\varepsilon^6\sigma_{x,5}+\ldots\right)-$$
$$-3\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xy,4}+\ldots\right)+\varepsilon^2\frac{m}{3J}=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{x,1}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{x,3}+\frac{1}{11}\varepsilon^6\sigma_{x,5}+\ldots\right)-$$
$$-5\left(\frac{1}{5}\tau_{xy,0}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\tau_{xy,4}+\ldots\right)+\varepsilon^2\frac{m}{3J}=0$$

. . . .

$$\frac{d}{d\xi}\left(\tau_{xy,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xy,4}+\ldots\right)+\varepsilon^2\frac{q}{3J}=0 \qquad (2.13)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xy,4}+\ldots\right)-2\left(\frac{1}{3}\sigma_{y,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{y,3}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{y,5}+\ldots\right)+\varepsilon^2\frac{q}{3J}=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\tau_{xy,0}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\tau_{xy,4}+\ldots\right)-4\left(\frac{1}{5}\sigma_{y,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{y,3}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{y,5}+\ldots\right)+\varepsilon^2\frac{q}{3J}=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{7}\tau_{xy,0}+\frac{1}{9}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{11}\varepsilon^4\tau_{xy,4}+\ldots\right)-$$

$$-6\left(\frac{1}{7}\sigma_{y,1}+\frac{1}{9}\varepsilon^2\sigma_{y,3}+\frac{1}{11}\varepsilon^4\sigma_{y,5}+\ldots\right)+\varepsilon^2\frac{q}{3J}=0$$

. . . .

Решение аналогично (2.2) представим в виде разложения по малому параметру ε:

$$u_{2i+1}(\varepsilon,\xi)=\sum_{s=0}^{N_s}u_{2i+1}^s(\xi)\varepsilon^s,\ \ v_{2i}(\varepsilon,\xi)=\sum_{s=0}^{N_s}v_{2i}^s(\xi)\varepsilon^s \tag{2.14}$$

После подстановки (2.14) в (1.19) и (2.13) и простейших операций, которые показаны для симметричной задачи, будем иметь при ε^s ($s = 0,1$):

$$\gamma_{xy,0}^s=u_1^s+dv_0^s/d\xi=0,\ \ \gamma_{y,1}^s=2v_2^s+\nu_{21}du_1^s/d\xi=0 \tag{2.15}$$

При $s = 0$ соотношения (2.15) соответствуют гипотезе плоских сечений и являются основой для последующих приближений. Таким образом, структура уравнений задачи изгиба (2.13) такова, что сначала находятся компоненты $\tau_{xy,k}^s,\sigma_{y,k}^s$, только из следующих приближений можно получить дифференциальное уравнение для v_0^s.

Система уравнений (2.13) может быть при $s \geqslant 2$ представлена в следующем виде:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\sigma_{x,1}^{s-2}+\frac{1}{5}\sigma_{x,3}^{s-4}+\frac{1}{7}\sigma_{x,5}^{s-6}+\ldots\right)-\left(\tau_{xy,0}^s+\frac{1}{3}\tau_{xy,2}^{s-2}+\frac{1}{5}\tau_{xy,4}^{s-4}+\ldots\right)+\frac{1}{3}q_x^{s-2}=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\sigma_{x,1}^{s-2}+\frac{1}{7}\sigma_{x,3}^{s-4}+\frac{1}{9}\sigma_{x,5}^{s-6}+\ldots\right)-3\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,0}^s+\frac{1}{5}\tau_{xy,2}^{s-2}+\frac{1}{7}\tau_{xy,4}^{s-4}+\ldots\right)+\frac{1}{3}q_x^{s-2}=0 \tag{2.16}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{7}\sigma_{x,1}^{s-2}+\frac{1}{9}\sigma_{x,3}^{s-4}+\frac{1}{11}\sigma_{x,5}^{s-6}+\ldots\right)-5\left(\frac{1}{5}\tau_{xy,0}^s+\frac{1}{7}\tau_{xy,2}^{s-2}+\frac{1}{9}\tau_{xy,4}^{s-4}+\ldots\right)+\frac{1}{3}q_x^{s-2}=0$$

. . . .

$$\frac{d}{d\xi}\left(\tau_{xy,0}^s+\frac{1}{3}\tau_{xy,2}^{s-2}+\frac{1}{5}\tau_{xy,4}^{s-4}+\ldots\right)+\frac{1}{3}q_y^{s-2}=0 \tag{2.17}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,0}^s+\frac{1}{5}\tau_{xy,2}^{s-2}+\frac{1}{7}\tau_{xy,4}^{s-4}+\ldots\right)-2\left(\frac{1}{3}\sigma_{y,1}^s+\frac{1}{5}\sigma_{y,3}^{s-2}+\frac{1}{7}\sigma_{y,5}^{s-4}+\ldots\right)+\frac{1}{3}q_y^{s-2}=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{5}\tau_{xy,0}^s+\frac{1}{7}\tau_{xy,2}^{s-2}+\frac{1}{9}\tau_{xy,4}^{s-4}+\ldots\right)-4\left(\frac{1}{5}\sigma_{y,1}^s+\frac{1}{7}\sigma_{y,3}^{s-2}+\frac{1}{9}\sigma_{y,5}^{s-4}+\ldots\right)+\frac{1}{3}q_y^{s-2}=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{7}\tau_{xy,0}^s+\frac{1}{9}\tau_{xy,2}^{s-2}+\frac{1}{11}\tau_{xy,4}^{s-4}+\ldots\right)-6\left(\frac{1}{7}\sigma_{y,1}^s+\frac{1}{9}\sigma_{y,3}^{s-2}+\frac{1}{11}\sigma_{y,5}^{s-4}+\ldots\right)+\frac{1}{3}q_y^{s-2}=0 \tag{2.18}$$

. . . .

$$q_y^0=q/J,\ \ q_x^0=m/J,\ \ q_y^{s-2}=0,\ \ q_x^{s-2}=0\ \ \text{при}\ \ s\geqslant 3$$

При $s \geqslant 2$ решение системы дифференциальных уравнений (2.16)–(2.18) можно провести поэтапно. Из первого уравнения системы (2.16) и уравнения (2.17) с учетом (2.15) имеем основное уравнение изгиба для определения v_0^{s-2}:

$$E_1\frac{d^4v_0^{s-2}}{d\xi^4}=q^{s-2} \tag{2.19}$$

$$q^{s-2}=q_y^{s-2}+\frac{dq_x^{s-2}}{d\xi}+\frac{E_1}{G_{12}}\frac{d^3\tau_{xy,0}^{s-2}}{d\xi^3}+\frac{E_1}{E_2}\nu_{12}\frac{d^2\sigma_{y,1}^{s-2}}{d\xi^2}+3\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{5}\sigma_{x,3}^{s-4}+\frac{1}{7}\sigma_{x,5}^{s-6}+\ldots\right)$$

После определения υ_0^s по соотношениям упругости определяем $\sigma_{x,2i+1}^s$ и затем из системы уравнений (2.16) находим $\tau_{xy,2i}^s$:

$$\tau_{xy,0}^s = \frac{1}{3}q_x^{s-2} + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\sigma_{x,1}^{s-2} + \frac{1}{4}\sigma_{x,3}^{s-4} + \ldots\right)$$

$$\tau_{xy,2}^{s-2} = -\frac{1}{2}\frac{d\sigma_{x,1}^{s-2}}{d\xi}, \quad \tau_{xy,4}^{s-4} = -\frac{1}{4}\frac{d\sigma_{x,3}^{s-4}}{d\xi}, \ \ldots \tag{2.20}$$

Затем из системы уравнений (2.18) определяем $\sigma_{y,2i+1}^s$

$$\sigma_{y,1}^s = \frac{1}{3}q_y^{s-2} + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,2}^{s-2} + \frac{1}{5}\tau_{xy,4}^{s-4} + \ldots\right)$$

$$\sigma_{y,3}^{s-2} = -\frac{1}{3}\frac{d\tau_{xy,2}^{s-2}}{d\xi}, \quad \sigma_{y,5}^{s-4} = -\frac{1}{5}\frac{d\tau_{xy,4}^{s-4}}{d\xi}, \ \ldots \tag{2.21}$$

Из выражений (2.20), (2.21) следует

$$\tau_{xy} = \frac{m}{3J}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-\zeta^2)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\sigma_{x,1}^s}{d\xi} + \frac{1}{4}\varepsilon^4(1-\zeta^4)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\sigma_{x,3}^s}{d\xi} + \ldots$$

$$\sigma_y = \frac{q}{3J}\varepsilon^3\zeta + \frac{1}{3}\varepsilon^3\zeta(1-\zeta^2)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\tau_{xy,2}^s}{d\xi} + \frac{1}{5}\varepsilon^5\zeta(1-\zeta^4)\sum_{s=0}\varepsilon^s\frac{d\tau_{xy,4}^s}{d\xi} + \ldots \tag{2.22}$$

Откуда видно, что выполняются краевые условия на лицевых поверхностях при $\zeta = \pm 1$.

Уравнение (2.19) при $s = 2$ полностью совпадает с приведенным в [9], а при постоянной по ξ нагрузке m совпадает с классическим уравнением изгиба полосы.

Далее находим по предложенной методике

$$\tau_{xy,0}^s = G_{12}\left(u_1^s + \frac{d\upsilon_0^s}{d\xi}\right) = \frac{m}{3J} + \frac{1}{2}\frac{d\sigma_{x,1}^{s-2}}{d\xi}$$

$$\tau_{xy,2}^{s-2} = G_{12}\left(3u_3^{s-2} + \frac{d\upsilon_2^{s-2}}{d\xi}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\sigma_{x,1}^{s-2}}{d\xi} \tag{2.23}$$

$$\sigma_{y,1}^s = \overline{E_2}\left(2\upsilon_2^s + \nu_{21}\frac{du_1^s}{d\xi}\right) = \frac{q}{3J} + \frac{1}{3}\frac{d\tau_{xy,2}^{s-2}}{d\xi}$$

$$\sigma_{y,3}^{s-2} = \overline{E_2}\left(4\upsilon_4^{s-2} + \nu_{21}\frac{du_3^{s-2}}{d\xi}\right) = -\frac{1}{3}\frac{d\tau_{xy,2}^{s-2}}{d\xi} \tag{2.24}$$

Выражение $\sigma_{x,1}^{s-2}$ находится после интегрирования уравнения (2.19) и используется затем в (2.23), а $\sigma_{x,3}^{s-2}$ после определения $\sigma_{y,3}^{s-2}$ из (2.24):

$$\sigma_{x,1}^{s-2} = E_1\frac{du_1^{s-2}}{d\xi} + \frac{E_1}{E_2}\nu_{12}\sigma_{y,1}^{s-2} = -E_1\frac{d^2\upsilon_0^{s-2}}{d\xi^2}$$

$$\sigma_{x,3}^{s-2} = E_1\frac{du_3^{s-2}}{d\xi} + \frac{E_1}{E_2}\nu_{12}\sigma_{y,3}^{s-2} = \frac{1}{6}\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{21}\right)\left(q_y^{s-2} + \frac{dq_x^{s-2}}{d\xi}\right) \tag{2.25}$$

При $s = 4{,}5$ для дифференциального уравнения (2.19) имеем

$$q^2 = \left(-\frac{2}{5}\frac{E_1}{G_{12}} + \frac{3}{10}\nu_{21}\right)\frac{d^2 q_y^0}{d\xi^2} - \left(\frac{1}{15}\frac{E_1}{G_{12}} + \frac{1}{30}\nu_{21}\right)\frac{d^3 q_x^0}{d\xi^3}, \quad q^3 = 0 \tag{2.26}$$

Таким образом, величина вносимой поправки зависит как от изменяемости внешней нагрузки, так и от отношения упругих коэффициентов. Для реальных материалов $\nu_{21} \ll E_1/G_{12}$, поэтому q^2 можно представить в виде

$$q^2 \approx -\frac{2}{5}\frac{E_1}{G_{12}}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_y^0 + \frac{1}{6}\frac{dq_x^0}{d\xi}\right) \tag{2.27}$$

Как и для симметричной задачи для внешней нагрузки, не обладающей большой изменяемостью, но при значительном E_1/G_{12} добавка может быть существенной. Для постоянной внешней нагрузки q^0 поправка может быть значительной за счет краевых условий. Теория же плоских сечений (теория Бернулли) для изотропных балок, если изменяемость внешней нагрузки невелика, асимптотически точна.

Остальные величины данного приближения определяются по соотношениям

$$\begin{aligned}
\tau_{xy,0}^s &= G_{12}\left(u_1^s + \frac{dv_0^s}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\sigma_{x,1}^{s-2} + \frac{1}{4}\sigma_{x,3}^{s-4}\right)\\
\tau_{xy,2}^{s-2} &= G_{12}\left(3u_3^{s-2} + \frac{dv_2^{s-2}}{d\xi}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\sigma_{x,1}^{s-2}}{d\xi}\\
\tau_{xy,4}^{s-4} &= G_{12}\left(5u_5^{s-4} + \frac{dv_4^{s-4}}{d\xi}\right) = -\frac{1}{4}\frac{d\sigma_{x,3}^{s-4}}{d\xi}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y,1}^s &= \overline{E}_2\left(2v_2^s + \nu_{21}\frac{du_1^s}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,2}^{s-2} + \frac{1}{5}\tau_{xy,4}^{s-4}\right)\\
\sigma_{y,3}^{s-2} &= \overline{E}_2\left(4v_4^{s-2} + \nu_{21}\frac{du_3^{s-2}}{d\xi}\right) = -\frac{1}{3}\frac{d\tau_{xy,2}^{s-2}}{d\xi}\\
\sigma_{y,5}^{s-4} &= \overline{E}_2\left(6v_6^{s-4} + \nu_{21}\frac{du_5^{s-4}}{d\xi}\right) = -\frac{1}{5}\frac{d\tau_{xy,4}^{s-4}}{d\xi}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Из соотношений (2.28) и (2.29) определяем соответствующие компоненты перемещений u_{2i+1}, v_{2i+1} при $i \geqslant 0$.

Компоненты $\sigma_{x,2i+1}^s$ определяются выражениями

$$\sigma_{x,1}^{s-2} = E_1\frac{du_1^{s-2}}{d\xi} + \frac{E_1}{E_2}\nu_{12}\sigma_{y,1}^{s-2} = -E_1\frac{d^2v_0^{s-2}}{d\xi^2} - \left(\frac{E_1}{G_{12}} - \nu_{21}\right)\left(\frac{1}{2}q_y^0 + \frac{1}{6}\frac{dq_x^0}{d\xi}\right)$$

$$\sigma_{x,3}^{s-2} = E_1\frac{du_3^{s-2}}{d\xi} + \frac{E_1}{E_2}\nu_{12}\sigma_{y,3}^{s-2} = \frac{1}{60}\left(\frac{E_1}{G_{12}} - \nu_{21}\right)\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{21}\right)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_y^0 + \frac{dq_x^0}{d\xi}\right) -$$

$$-\frac{1}{12}E_1\left(\frac{1}{\overline{E}_2} + \frac{\nu_{21}}{G_{12}}\right)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_y^0 + \frac{1}{3}\frac{dq_x^0}{d\xi}\right) - \frac{1}{6}\nu_{21}q^2$$

$$\sigma_{x,5}^{s-4}=E_1\frac{du_5^{s-4}}{d\xi}+\frac{E_1}{E_2}\nu_{12}\sigma_{y,5}^{s-4}=-\frac{1}{120}\left[\left(\frac{E_1}{G_{12}}-\nu_{21}\right)\left(\frac{E_1}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)-\right.$$

$$\left.-E_1\left(\frac{1}{E_2}+\frac{\nu_{21}}{G_{12}}-\frac{\nu_{12}^2}{E_1}\right)\right]\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_y^0+\frac{dq_x^0}{d\xi}\right) \tag{2.30}$$

Для определения v_0^4 требуется еще одно приближение $s=6$. Для асимптотического выполнения уравнений теории упругости согласно (2.28), (2.29) можно определить $\tau_{xy,4}^0, \sigma_{y,5}^0, u_5^0, v_6^0$, хотя для выбранной точности они не требуются. Согласно (2.19) имеем

$$q^4=-\left(\frac{E_1}{2G_{12}}-\frac{1}{6}\nu_{21}\right)\frac{d^2}{d\xi^2}\left[q^2+\frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{G_{12}}-\nu_{21}\right)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_y^0+\frac{1}{3}\frac{dq_x^0}{d\xi}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{24}\left(\frac{E_1}{G_{12}}-\frac{1}{5}\nu_{21}\right)\left(\frac{E_1}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)\frac{d^4}{d\xi^4}\left(q_y^0+\frac{dq_x^0}{d\xi}\right)+ \tag{2.31}$$

$$+3\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{5}\sigma_{x,3}^2+\frac{1}{7}\sigma_{x,5}^0\right),\quad q^5=0$$

и все повторяется по известным соотношениям. Выражения (2.30) и (2.31) могут быть упрощены в предположении, что $\nu_{21} \ll E_1/G_{12}$ и $E_1/E_2 \ll E_1/G_{12}$:

$$\sigma_{x,3}^{s-2}=\frac{1}{60}\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_y^0+\frac{dq_x^0}{d\xi}\right),\quad \sigma_{x,5}^{s-4}=-\frac{1}{120}\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_y^0+\frac{dq_x^0}{d\xi}\right),$$

$$q^4=-\frac{1}{525}\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)^2\frac{d^4}{d\xi^4}\left(q_y^0+\frac{dq_x^0}{d\xi}\right)$$

Следовательно, на каждом этапе v_0^s определяется из дифференциального уравнения (2.19), которое при $s=0$ совпадает с классическим уравнением изгиба балок, полученным на основе гипотезы плоских сечений. Правая часть этих уравнений при $s \geqslant 1$ зависит от предыдущих приближений. Все остальные характеристики ОНС, как и для симметричной задачи, определяются по простым соотношениям. При нечетных s имеем однородные дифференциальные уравнения и при нулевых краевых условиях решение для v_0^s тождественно равно нулю. Поэтому, если краевые условия *ОНС* и *РТП* не переплетаются, то в качестве малого параметра можно использовать $\varepsilon_1=\varepsilon^2$. В этом случае ненулевыми будут решения, соответствующие только четному порядку разложения ($s=0, 2, 4, \ldots$).

Главная особенность методики выделения ОНС из общих уравнений симметричной задачи (1.8)–(1.10) и кососимметричной задачи (1.20)–(1.22) заключается в том, что уравнение для симметричной задачи, связанное с δu_0, и уравнения для задачи изгиба при δu_1 и δv_0 содержат только напряжения внутренней задачи и служат для формулировки задачи относительно основных искомых неизвестных u_0^s (задача растяжения–сжатия) и в v_0^s (задача изгиба). Из оставшихся уравнений равновесия, содержащих ОНС и РТП, методом возмущений выделяются остальные компоненты ОНС через основные.

Как отмечалось выше, представление перемещений в виде (1.7) для симметричной задачи и (1.19) для задачи изгиба полосы приводит к системе сингулярно возмущенных уравнений. Решение таких уравнений складывается из регулярной части, которая является предметом изучения в данной части работы и решений типа погранслоя, которые строятся в дальнейшем.

Однако уже на данном этапе можно решить задачи по определению ОНС плоской задачи теории упругости. Предложенная методика по определению внутреннего напряженного состояния была проверена на целом ряде плоских задач в предположении, что кинематические краевые условия ставятся для точек оси стержня. Получено полное совпадение результатов с имеющимися в литературе [14].

Можно констатировать, что предложена простая модель для получения ОНС при расчете ортотропных стержней[1]. Ее простота связана с возможностью выделения внутренней задачи с краевыми условиями, которые не связаны с условиями существования затухающих решений.

Автор благодарит Терегулова И.Г. и коллектив кафедры сопротивления материалов и основ теории упругости Казанской государственной архитектурно-строительной академии за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00410).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Изд-во Тбил. ун-та, 1975. С. 51–149.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
5. *Муштари Х.М., Терегулов И.Г.* К теории оболочек средней толщины // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 6. С. 1144–1147.
6. *Терегулов И.Г.* К теории пластин средней толщины // Тр. конф. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1961. С. 367–375.
7. *Терегулов И.Г.* К построению уточненных теорий пластин и оболочек // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 2. С. 346–350.
8. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
9. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
10. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме построения неклассических теорий пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 158–167.
11. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 139–146.
12. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
13. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
14. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.

Казань

Поступила в редакцию
5. 02. 1999

---

[1] *Бутенко Ю.И.* Вариационно-асимптотический метод построения теории стержней // Казань: КИСИ. Деп. в ВИНИТИ 6.05.86 г. № 3227–В86. 36 с.; *Бутенко Ю.И.* К определению погранслоев в плоской задаче теории упругости // Казань: КИСИ. Деп. в ВИНИТИ 9.03.89 г. № 1525–В81. 33 с.