МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2001

УДК 539.3 : 534.1

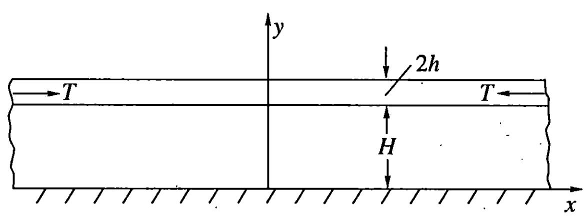
© 2001 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПОКРЫТИЕ – ПОДЛОЖКА ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ ПОКРЫТИЯ

Исследована задача об устойчивости бесконечной пластины (покрытия) под действием продольного усилия, находящейся в условиях цилиндрического изгиба в двухстороннем контакте с упругим слоем (подложкой), защемленным по основанию. Предварительная деформация конструкции при действии продольного усилия меньшего критического не учитывается. При приближении свойств материала слоя к несжимаемому установлен эффект существенного снижения величины критического усилия по сравнению с критическим усилием, рассчитанным с заменой упругого слоя эквивалентным основанием Фусса – Винклера. Результаты могут найти применение при расчете работоспособности тел с покрытиями, слоистых композитов, в вопросах геофизики.

Ранее задача об устойчивости бесконечной пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба в двухстороннем контакте с основанием Фусса – Винклера, рассматривалась, например, в [1].

1. Рассмотрим в условиях плоскостей деформации задачу о взаимодействии бесконечной упругой пластины (покрытия) толщины $2h$ с бесконечным упругим слоем (подложкой) толщины H, жестко защемленным по основанию. Будем предполагать, что между нижней гранью пластины и верхней гранью слоя осуществлено полное сцепление. Пусть также пластина сжата в продольном направлении усилием T (фигура).



Слой с упругими характеристиками G и ν будем описывать моделью линейной теории упругости, а для описания деформации пластины будем использовать уравнения

$$4\theta h^2 u_+^{(3)}(x) = -2h[2\tau_+'(x)+\tau_-'(x)] - 3[\sigma_+(x)-\sigma_-(x)]$$

$$4\theta h^2 u_-^{(3)}(x) = 2h[2\tau_+'(x)+2\tau_-'(x)] + 3[\sigma_+(x)-\sigma_-(x)] \tag{1.1}$$

$$4\theta h^3 v^{(4)}(x) + 3Tv^{(2)}(x) = 3[\sigma_+(x)-\sigma_-(x)] + 3h[\tau_+'(x)+\tau_-'(x)]$$

$$(\theta = G_*(1-\nu_*)^{-1})$$

полученные отбрасыванием членов порядка h^2 и выше в правых частях уточненных уравнений цилиндрического изгиба пластины [2] (глава 1, § 3, формулы (3.3)) и добавлением к левой части третьего уравнения известного моментного члена со второй производной функции $v(x)$.

Здесь $u_+(x)$ и $u_-(x)$ – горизонтальные перемещения точек соответственно верхней и нижней граней пластины, $v(x)$ — ее вертикальные перемещения, $\tau_+(x)$ и $\sigma_+(x)$ – нагрузки, действующие на верхнюю грань пластины, а $\tau_-(x)$ и $\sigma_-(x)$ – на нижнюю, G_* и ν_* – упругие характеристики пластины. Далее будем полагать, что верхняя грань пластины свободна от усилий, т.е. $\tau_+(x) = \sigma_+(x) \equiv 0$.

В силу условий полного контакта между поверхностями пластины и слоя будем на основании (1.1) для слоя иметь следующие граничные условия при $y = H$:

$$4\theta h^2 u^{(3)}(x, H) = 4h\tau'(x) - 3\sigma(x)$$

$$4\theta h^3 v^{(4)}(x, H) + 6thv^{(2)}(x, H) = -3\sigma(x) + 3h\tau'(x) \tag{1.2}$$

$$(t = T/(2h))$$

а при $y = 0$:

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \tag{1.3}$$

где $\tau(x)$ и $\sigma(x)$ – контактные напряжения, действующие между поверхностями пластины и слоя.

Далее введем безразмерные координаты и перемещения

$$x' = x/h, \quad y' = y/h, \quad H' = H/h, \quad u' = u/h, \quad v' = v/h \tag{1.4}$$

(ниже штрихи опускаем) и будем искать решение уравнений Ламе для слоя в виде

$$u(x, y) = U(\alpha, y)\cos(\alpha x), \quad v(x, y) = V(\alpha, y)\sin(\alpha x) \tag{1.5}$$

где α – параметр, характеризующий периодичность задачи по x с длиной полуволны $l = \pi/\alpha$. Такое общее решение имеет вид

$$U(\alpha, y) = (A_1 + \alpha y A_2)\mathrm{ch}(\alpha y) + (B_1 + \alpha y B_2)\mathrm{sh}(\alpha y) \tag{1.6}$$

$$V(\alpha, y) = (B_1 - \varkappa A_2 + \alpha y B_2)\mathrm{ch}(\alpha y) + (A_1 - \varkappa B_2 + \alpha y A_2)\mathrm{sh}(\alpha y)$$

где A_i и B_i ($i = 1, 2$) – пока произвольные функции от α, $\varkappa = 3 - 4\nu$. По формулам закона Гука для нужных в дальнейшем напряжений в слое найдем

$$\tau_{xy}(x, y) = \mathrm{T}_{xy}(\alpha, y)\cos(\alpha x), \quad \sigma_y(x, y) = \Sigma_y(\alpha, y)\sin(\alpha x)$$

$$\mathrm{T}_{xy}(\alpha, y) = G\alpha[(-(\varkappa - 1)A_2 + 2B_1 + 2\alpha y B_2)\mathrm{ch}(\alpha y) + (-(\varkappa - 1)B_2 + 2A_1 + \alpha y A_2)\mathrm{sh}(\alpha y)] \tag{1.7}$$

$$\Sigma_y(\alpha, y) = G\alpha[(-(\varkappa + 1)B_2 + 2A_1 + 2\alpha y A_2)\mathrm{ch}(\alpha y) + (-(\varkappa + 1)A_2 + 2B_1 + 2\alpha y B_2)\mathrm{sh}(\alpha y)]$$

2. Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу для слоя: при $y = H$:

$$u(x, H) = U(\alpha)\cos(\alpha x), \quad v(x, H) = V(\alpha)\sin(\alpha x) \tag{2.1}$$

при $y = 0$ – вновь условия (1.3). С помощью формул (1.6) и (1.7) найдем

$$\tau(x) = \mathrm{T}_{xy}(\alpha, H)\cos(\alpha x) = \mathrm{T}(\alpha)\cos(\alpha x)$$

$$\sigma(x) = \Sigma_y(\alpha, H)\sin(\alpha x) = \Sigma(\alpha)\sin(\alpha x) \tag{2.2}$$

Определяя A_i и B_i по граничным условиям (1.3) и (2.1), имеем

$$\Sigma(\alpha) = \alpha G[V(\alpha)M_{11}(\alpha H) + U(\alpha)M_{12}(\alpha H)] \tag{2.3}$$

$$\mathrm{T}(\alpha) = \alpha G[V(\alpha)M_{12}(\alpha H) + U(\alpha)M_{22}(\alpha H)]$$

$$M_{jj}(u) = \frac{(\varkappa + 1)}{2}\frac{\varkappa\,\mathrm{sh}(2u) - (-1)^j 2u}{\varkappa^2\,\mathrm{sh}^2 u - u^2} \quad (j = 1, 2)$$

$$M_{12}(u) = \frac{\varkappa(\varkappa - 1)\mathrm{sh}^2 u - 2u^2}{\varkappa^2\,\mathrm{sh}^2 u - u^2}$$

Подставляя (2.1)–(2.3) в формулы (1.2), придем к однородной системе алгебраических уравнений относительно функций $U(\alpha)$ и $V(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
&[f_1(\alpha) - K\alpha^2]V(\alpha) + f_2(\alpha)\alpha U(\alpha) = 0 \\
&f_3(\alpha)V(\alpha) + f_4(\alpha)U(\alpha) = 0 \\
&f_1(\alpha) = \alpha^4 + g\alpha M_{11}(\alpha H) + g\alpha^2 M_{12}(\alpha H) \\
&f_2(\alpha) = gM_{12}(\alpha H) + g\alpha M_{22}(\alpha H) \\
&f_3(\alpha) = 4g\alpha^2 M_{12}(\alpha H)/3 + g\alpha M_{11}(\alpha H) \\
&f_4(\alpha) = \alpha^2 + 4g\alpha M_{22}(\alpha H)/3 + gM_{12}(\alpha H) \\
&K = 3t/(2\theta), \quad g = 3G/(4\theta)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Для существования нетривиального решения системы необходимо, чтобы

$$[f_1(\alpha) - K\alpha^2]f_4(\alpha) - f_2(\alpha)f_3(\alpha) = 0 \tag{2.5}$$

Задавая разные α, т.е. разную длину полуволны, можем получить любое значение для безразмерного критического усилия потери устойчивости K. Однако существует значение α_*, при котором критическое усилие K_* минимально. Значения α_* и K_* соответствуют кратному корню уравнения (2.5) по α или, что равносильно, α_* и K_* могут быть одновременно найдены из системы уравнений (2.5) и

$$[f_1'(\alpha) - 2K\alpha]f_4(\alpha) + [f_1(\alpha) - K\alpha^2]f_4'(\alpha) - f_2'(\alpha)f_3(\alpha) - f_2(\alpha)f_3'(\alpha) = 0 \tag{2.6}$$

Далее полученным таким образом значениям α_* и K_* будем придавать индекс 1.

3. В случае отслоения покрытия от подложки (проскальзывания в горизонтальном направлении при сохранении двухсторонней связи в вертикальном) и при описании подложки по-прежнему упругим слоем в (2.4) нужно положить [3]:

$$
\begin{aligned}
&f_1(\alpha) = \alpha^4 + g\alpha M(\alpha H), \quad f_n(\alpha) = 0 \quad (n = 2, 3, 4) \\
&M(u) = \frac{4}{\varkappa + 1} \frac{2\varkappa \operatorname{ch}(2u) + 1 + \varkappa^2 + 4u^2}{2\varkappa \operatorname{sh}(2u) - 4u}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

и тогда α_* и K_* могут быть одновременно найдены из системы уравнений

$$f_1(\alpha) - K\alpha^2 = 0, \quad f_1'(\alpha) - 2K\alpha = 0 \tag{3.2}$$

Далее полученным таким образом значениям α_* и K_* будем придавать индекс 2.

Наконец рассмотрим задачу в простейшей постановке [1], когда вместо упругого слоя пластина взаимодействует без трения, но с сохранением двухсторонней связи в вертикальном направлении, с равносильным основанием Фусса – Винклера. При этом в (2.4) нужно положить [3]:

$$
\begin{aligned}
&f_1(\alpha) = \alpha^4 + g\alpha N(\alpha H), \quad f_n(\alpha) = 0 \quad (n = 2, 3, 4) \\
&N(u) = (\varkappa + 1)[(\varkappa - 1)u]^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

и тогда для α_* и K_* нетрудно получить замкнутые выражения [1]:

$$\alpha_* = \sqrt{\frac{K_*}{2}}, \quad K_* = \sqrt{\frac{3G(\varkappa + 1)}{\theta H(\varkappa - 1)}} \tag{3.4}$$

Далее этим значениям α_* и K_* будем придавать индекс 3.

Дадим сравнение результатов (таблица), полученных по трем приведенным здесь постановкам задачи. При расчетах принято: $E = 0.981$ МПа, $\nu = 0.475$–0.4995 (материал типа резины), $E_* = 1.962 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_* = 0.3$ (сталь).

Из таблицы видно, что для всех трех теорий критическое усилие увеличивается, а длина полуволны, характеризующая собой форму потери устойчивости, уменьшается при увеличении ν. В то же время критическое усилие по теории 3 больше соответствующих значений по теориям 1 и 2, причем тем значительнее, чем ν ближе к 0.5. Критическое усилие по теории 1 всегда больше соответствующих значений по теории 2. Так при $\nu = 0.4995$ оно в среднем больше на 31.6 процента. Вычислениями также установлено, что при $\nu \leqslant 0.4$ результаты по всем трем теориям практически совпадают.

H	8	4	2	1	1/2
			$\nu = 0.475$		
α_1	0.0493	0.0591	0.0703	0.0836	0.0994
α_2	0.0471	0.0581	0.0700	0.0834	0.0993
α_3	0.0496	0.0590	0.0702	0.0835	0.0993
K_1	0.00445	0.00669	0.00971	0.01386	0.01967
K_2	0.00391	0.00621	0.00939	0.01369	0.01959
K_3	0.00493	0.00697	0.00986	0.01394	0.01972
			$\nu = 0.4935$		
α_1	0.0615	0.0787	0.0965	0.1156	0.1376
α_2	0.0533	0.0710	0.0918	0.1138	0.1370
α_3	0.0687	0.0817	0.0971	0.1155	0.1374
K_1	0.00617	0.01063	0.01705	0.02564	0.03719
K_2	0.00464	0.00829	0.01438	0.02346	0.03581
K_3	0.00944	0.01334	0.01887	0.02669	0.03774
			$\nu = 0.4995$		
α_1	0.0686	0.0958	0.1329	0.1810	0.2388
α_2	0.0560	0.0778	0.1084	0.1504	0.2060
α_3	0.1299	0.1545	0.1837	0.2185	0.2598
K_1	0.00715	0.01395	0.02708	0.05139	0.09339
K_2	0.00495	0.00937	0.01805	0.03488	0.06653
K_3	0.03375	0.04773	0.06750	0.09546	0.13500

Изложенные факты важно принимать во внимание, например, при расчете на устойчивость слоистых резино-металлических шарниров.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС-РФФИ (грант 95-IN-RU-492) и РФФИ (грант 99-01-00038).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
3. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.06.1999