

УДК 539.374; 539.214

© 2001 г. М.Я. БРОВМАН

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ПРОЦЕССЕ ВОЛОЧЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Для правильного выбора технологических режимов в таких процессах, как волочение, прессование цилиндрических заготовок необходимо знать распределение напряжений и скоростей в деформируемом материале.

Большинство решений этих задач получено для плоской деформации [1–3], а расчеты для осесимметричной деформации вызывают значительные трудности.

Известно решение о течении деформируемой среды в конической полости, когда линиями тока являются прямые, проходящие через начало координат [1, 2].

В данной работе рассматривается деформация, интенсивность которой уменьшается по мере удаления от зоны активного обжатия цилиндрической заготовки, а ее движение приближается к поступательному вдоль оси симметрии.

При расположении осей координат r, z в меридиональной плоскости можно ввести функцию тока $\Phi(r, z)$, обеспечивающую выполнение условия несжимаемости

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

где v_r, v_z – компоненты вектора скорости течения вдоль осей r, z ; линии тока определены условием $\Phi(r, z) = \text{const}$.

При плоской и осесимметричной деформации функция тока должна удовлетворять нелинейному дифференциальному уравнению четвертого порядка [3]. При осесимметричной деформации точные решения можно получить, приняв

$$\Phi(r, z) = f_1(r) + f_2(r) \exp(-nz) \tag{1}$$

$$\Phi(r, z) = f_1(r) + f_2(r) \text{sh}(nz) \tag{2}$$

$$\Phi(r, z) = f_1(r) + f_2(r) \sin nz \tag{3}$$

где $f_1(r), f_2(r)$ – дифференцируемые функции r ; n – постоянная; вместо функций $\text{sh}(nz)$ и $\sin(nz)$ также можно использовать $\text{ch}(nz)$ и $\cos(nz)$. Формула (1) представляет точное решение, если функции $f_1(r), f_2(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} = 0$$

$$\frac{d^2 f_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} - n^2 f_2(r) = 0$$

Таким образом будем иметь

$$f_1(r) = c_1 + c_2 r^2 = c_1 + 0,5v_0 r^2, \quad f_2(r) = v_0 u \Phi_1(u) \\ \Phi_1(u) = c_3 I_1(u) + c_4 K_1(u), \quad u = nr \tag{4}$$

Здесь c_1, c_2, c_3, c_4 – постоянные, определяемые краевыми условиями; $v_0 = 2c_2$ – постоянная, характеризующая скорость при $z \rightarrow \infty$; $\varphi_1(u)$ – общее решение модифицированного уравнения Бесселя

$$\frac{d^2\varphi_1}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\varphi_1}{du} - \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\varphi_1(u) = 0$$

где $I_1(u), K_1(u)$ – модифицированные функции Бесселя и Ханкеля первого порядка. Функция тока (1) позволяет описать движение сплошной среды вдоль оси симметрии z при сжатии к этой оси. Из (1) следует, что при $n > 0, z \rightarrow \infty$ функция $\Phi(r, z) \rightarrow f_1(r)$, т.е. линии тока приближаются к прямым $r = \text{const}$ и при этом $z \rightarrow \infty, v_r \rightarrow 0, v_z \rightarrow -v_0 = \text{const}$; с увеличением z скорость приближается к постоянной величине ($-v_0$). Определим скорости и компоненты тензора скорости деформации

$$v_r = -v_0 n^2 \exp(-nz) \varphi_1(u)$$

$$v_z = -v_0 - v_0 n^2 \exp(-nz) \left[\frac{d\varphi_1}{du} + \frac{1}{u} \varphi_1(u) \right]$$

$$\varepsilon_r = -v_0 n^3 \exp(-nz) \frac{d\varphi_1}{du}, \quad \varepsilon_\theta = -v_0 n^3 \exp(-nz) \frac{\varphi_1(u)}{u}$$

$$\varepsilon_z = v_0 n^3 \exp(-nz) \left[\frac{d\varphi_1}{du} + \frac{1}{u} \varphi_1(u) \right]$$

Найдем компоненты девиаторов скорости деформации и напряжения для жестко-пластической среды с пределом текучести на сдвиг равным k :

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{k}{\sqrt{d_0}} \left[-u \frac{d\varphi_1}{du} + \varphi_1(u) \right]$$

$$\sigma_\theta - \sigma_z = -\frac{k}{\sqrt{d_0}} \left[u \frac{d\varphi_1}{du} + 2\varphi_1(u) \right]$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \frac{k}{\sqrt{d_0}} \left[2u \frac{d\varphi_1}{du} + \varphi_1(u) \right], \quad \tau_{rz} = 0$$

$$d_0 = u^2 \left(\frac{d\varphi_1}{du} \right)^2 + u\varphi_1(u) \frac{d\varphi_1}{du} + \varphi_1^2(u)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ – компоненты тензора напряжений. Уравнения равновесия выполнены и решение является точным при

$$\sigma_r = C + k \int \left[\frac{d\varphi_1}{du} - \frac{1}{u} \varphi_1(u) \right] \frac{du}{\sqrt{d_0}}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{k}{\sqrt{d_0}} \left[u \frac{d\varphi_1}{du} - \varphi_1(u) \right], \quad \tau_{rz} = 0$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \frac{k}{\sqrt{d_0}} \left[2u \frac{d\varphi_1}{du} + \varphi_1(u) \right] \quad (5)$$

где C – функция переменной z , определяемая краевыми условиями для напряжений.

Формулы можно упростить, используя для модифицированных функций Бесселя и

Ханкеля соотношения

$$\frac{dI_1(u)}{du} = 0.5[I_2(u) + I_0(u)], \quad \frac{dK_1(u)}{du} = -0.5[K_2(u) + K_0(u)]$$

$$I_2(u) = I_0(u) - \frac{2}{u} I_1(u), \quad K_2(u) = K_0(u) + \frac{2}{u} K_1(u)$$

$$\frac{dI_1(u)}{du} = I_0(u) - \frac{1}{u} I_1(u), \quad \frac{dK_1(u)}{du} = -K_0(u) - \frac{1}{u} K_1(u)$$

где $I_0(u)$, $K_0(u)$, $I_2(u)$, $K_2(u)$ – функции Бесселя и Ханкеля нулевого и второго порядка. Тогда

$$\frac{d\varphi_1}{du} = c_3 \left[I_0(u) - \frac{1}{u} I_1(u) \right] - c_4 \left[K_0(u) + \frac{1}{u} K_1(u) \right]$$

и общее решение, соответствующее функции (1), будет

$$v_r = -v_0 n^2 \exp(-nz) [c_3 I_1(u) + c_4 K_1(u)] \quad (6)$$

$$v_z = -v_0 - v_0 n^2 \exp(-nz) [c_3 I_0(u) - c_4 K_0(u)]$$

$$\sigma_r = C + k \int \left\{ c_3 \left[I_0(u) - \frac{2}{u} I_1(u) \right] - c_4 \left[K_0(u) + \frac{2}{u} K_1(u) \right] \right\} \frac{du}{\sqrt{d_0}}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{k}{\sqrt{d_0}} \{ c_3 [u I_0(u) - 2I_1(u)] - c_4 [u K_0(u) + 2K_1(u)] \}$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \frac{k}{\sqrt{d_0}} \{ c_3 [2u I_0(u) - I_1(u)] - c_4 [2u K_0(u) + K_1(u)] \}$$

$$d_0 = c_3^2 [u^2 I_0^2(u) - u I_0(u) I_1(u) + I_1^2(u)] + c_4^2 [u^2 K_0^2(u) + u K_0(u) K_1(u) + K_1^2(u)] + \\ + c_3 c_4 [-2u^2 I_0(u) K_0(u) - u I_0(u) K_1(u) + u I_1(u) K_0(u) + 2I_1(u) K_1(u)]$$

В частных случаях при $c_3 = 0$ или при $c_4 = 0$ удобнее использовать формулы

$$v_r = -v_0 n^2 \exp(-nz) \varphi_1(u) \quad (7)$$

$$v_z = -v_0 \mp v_0 \exp(-nz) \varphi_0(u)$$

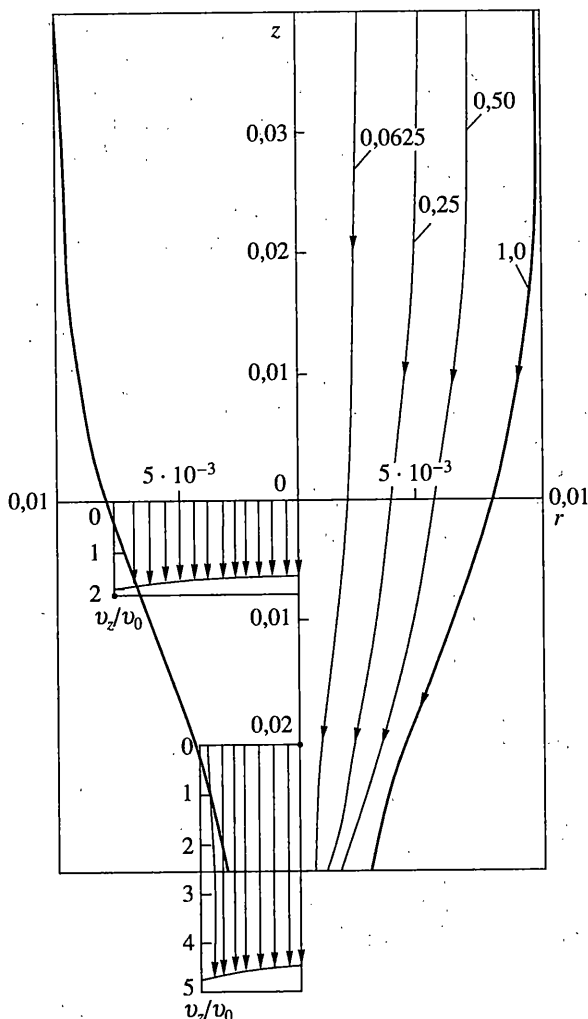
$$\sigma_r = C + k \int \left[\pm \varphi_0(u) - \frac{2\varphi_1(u)}{u} \right] \frac{du}{\sqrt{d_0}}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{k}{\sqrt{d_0}} [\pm u \varphi_0(u) - 2\varphi_1(u)]$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \frac{k}{\sqrt{d_0}} [\pm 2u \varphi_0(u) - \varphi_1(u)]$$

$$d_0 = u^2 \varphi_0^2(u) \mp u \varphi_0(u) \varphi_1(u) + \varphi_1^2(u)$$

где верхние знаки имеют место при $c_4 = 0$, $\varphi_0 = c_3 I_0(u)$, $\varphi_1 = c_3 I_1(u)$, а нижние при $c_3 = 0$ ($c_4 \neq 0$), $\varphi_0 = c_4 K_0(u)$, $\varphi_1 = c_4 K_1(u)$. Для рассмотрения деформации сплошных заготовок следует принять $c_4 = 0$; чтобы скорости были конечными при $r = 0$, поскольку при $u \rightarrow 0$; $K_1(u) \rightarrow \infty$, в то время как $I_1(u) \rightarrow 0$; $I_0(u) \rightarrow 1$.



Фиг. 1

Форма линий тока показана на фиг. 1, где стрелки показывают направления движения. При $\Phi = \text{const} = c_5 = 0.5v_0r^2 + c_3v_0u \exp(-nz)I_1(u)$, $n = 100 \text{ м}^{-1}$, $c_4 = 0$; цифры у кривых на фиг. 1 равны величине $c_5 \cdot 10^4 \text{ [м}^2\text{]}$.

Граничная поверхность деформируемого тела при $c_5 = 10^{-4} \text{ м}^2$ близка к профилю волок, часто используемых при волочении проволоки. В случае $c_4 = 0$, $v_r = 0$ при $r = 0$, а если $c_4 \neq 0$, то поле скоростей может быть использовано для анализа деформации полых заготовок, например, с постоянным наружным диаметром, соответствующим одному из корней уравнения $\Phi_1(u) = 0$.

Ниже рассмотрена только деформация сплошных заготовок. На фиг. 1 также показаны эпюры скоростей $|v_z/v_0|$ в сечениях $z = 0$ и $z = -0.02 \text{ м}$ причем, при $z = 0$ радиус сечения $r = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Скорость v_r изменяется от нуля до $(-0.024 v_0)$ на поверхности, а при $z = 0.02 \text{ м}$ скорость v_r на поверхности равна $-0.18 v_0$.

Скорость v_z изменяется от $(-1.6v_0)$ до $(-1.5v_0)$ при $z = 0$ и от $(-4.9v_0)$ до $(-4.7v_0)$ при $z = -0.02 \text{ м}$. Задача о волочении поставлена при обычных уравнениях равновесия для осесимметричной деформации [1, 2], а также известных соотношениях между компо-

нентами девиаторов напряжения и скорости деформации [2, 3]. Краевые условия для скоростей, помимо очевидного $v_r = 0$ при $r = 0$, требуют, чтобы контур очага деформации совпадал по конфигурации с одной из возможных линий тока. Задача решалась полуобратным способом, принимая поле скоростей, соответствующее формулам (1) и (6), а затем определяя при какой форме волокна это возможно (т.е. при какой ее форме вектор скорости будет направлен по касательной к граничной поверхности). Поскольку линии тока определены условием $\Phi(r, z) = \text{const}$, то из (1) следует, что найденное решение возможно, если форма инструмента соответствует линии

$$z = -\frac{1}{n} \ln \left[\frac{c_5 - f_1(r)}{f_2(r)} \right]$$

где c_5 – постоянная, а функции $f_1(r)$, $f_2(r)$ определены формулами (4).

Из фиг. 1, на которой приведены несколько линий тока, следует, что они близки к форме волок, используемых в ряде случаев при волочении.

Известное решение о течении сплошной среды вдоль прямых, проходящих через начало координат $z = r = 0$, можно найти, предположив, что $\Phi(r, z)$ зависит только от z/r и тогда из условия несжимаемости следует

$$\Phi(r, z) = c_1 \left(1 - \frac{z}{r} \right), \quad v_r = -\frac{c_1}{r^2}, \quad v_z = -\frac{c_1 z}{r^3} \quad (8)$$

Известному решению о выдавливании пластического материала из сжимающейся цилиндрической втулки (см. [1]) соответствует функция тока

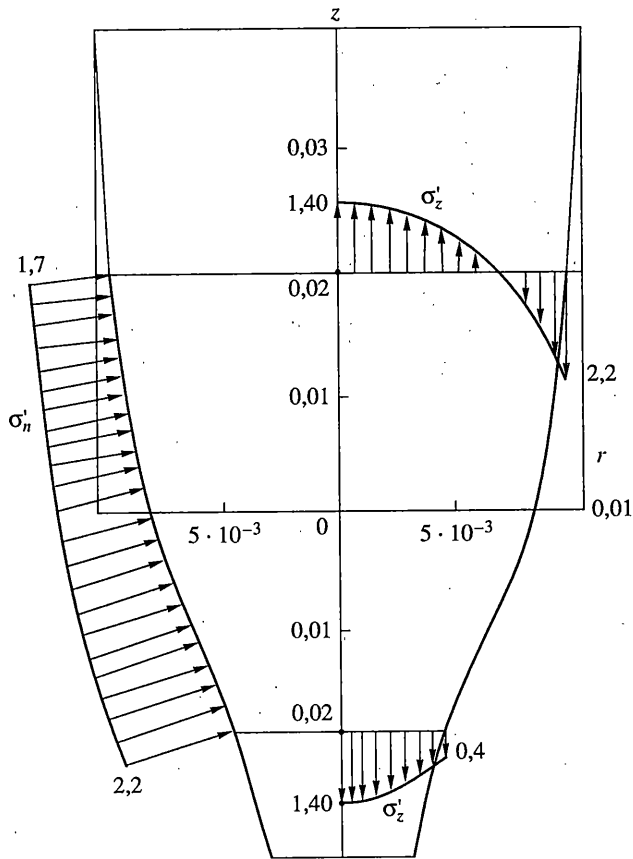
$$\Phi(r, z) = -0,5zr^2 + f_1(r) \quad (9)$$

и уравнения линий тока имеют вид $z = -(2r^2)[c_1 - f_1(r)]$, где функция $f_1(r)$ определяется из уравнений равновесия [1]. Формулы (1), (2) также дают возможность построить точные решения. Эти решения, как и известные, определенные формулами (8), (9), не согласуются с движением внешних жестких зон, т.е. они применимы при длинных очагах деформации. Функции (1) имеют те же ограничения, что (8), (9) (но значительно расширяют класс возможных линий тока при осесимметричной деформации). Эти ограничения относятся и к касательным напряжениям (и силам трения), которые задать произвольно нельзя. В данной задаче формулы (5) определяют $\tau_{rz} = 0$, т.е. равенство нулю касательных напряжений на всех поверхностях $r = \text{const}$. Нормальные напряжения в рассматриваемой задаче не заданы ни на каких поверхностях (как и в известных) определено лишь, что в некоторой плоскости $z = \text{const}$ суммарное усилие вдоль оси z равно нулю, если осуществляют волочение без заднего противонапряжения (в противном случае это суммарное усилие равно заданной величине). В приведенном численном примере было принято, что очаг деформации ограничен плоскостями $z = 0,02$ м (где усилие равно нулю) и $z = -0,02$ м, где действует усилие волочения, которое должно быть определено правильным выбором оборудования волочильного стана (можно выбрать и иные положения плоскостей $z = \text{const}$).

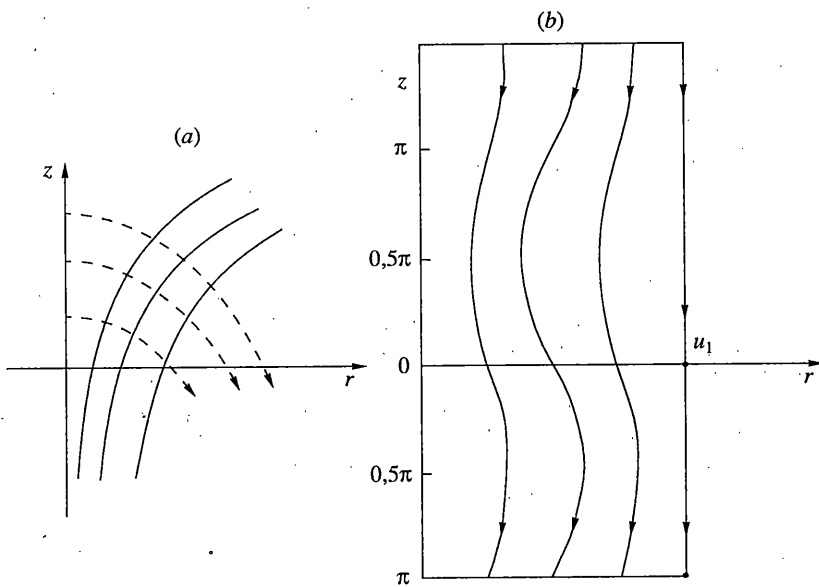
На фиг. 2 приведены эпюры безразмерных величин $\sigma'_z = \sigma_z / (2k)$ в сечениях $z = -0,02$ м и $z = -0,01$ м, а также эпюра, характеризующая нормальные напряжения σ_n на боковой поверхности $\sigma'_n = \sigma_n / (2k)$.

В сечении $z = -0,010$ м (радиусом $r_1 = 6,1 \cdot 10^{-3}$ м) среднее напряжение волочения равно $\sigma_0 = 1,7k$. Усилие волочения можно представить в виде $P = \pi r_1^2 \sigma_0(\lambda)$, где $\lambda = r_0^2 / r_1^2$ – коэффициент вытяжки, равный отношению площадей начального и конечного сечений.

С погрешностью менее 15% результаты расчета можно описать формулой $\sigma_0 = 1,8k \ln \lambda$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если в формулах (1) и (4) принять $c_2 = 0$, то конфигурация линий тока существенно иная (чем на фиг. 1), что иллюстрируется фиг. 3. При $c_2 = c_4 = 0$ линии тока показаны на фиг. 3 сплошными линиями, они могут быть использованы в процессах прессования и калибровки (при малых величинах r эти линии тока близки к графикам логарифмических функций). Линии тока при $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 \neq 0$ показаны на фиг. 3, а штриховыми линиями; такое течение при волочении не имеет места. Выбором величин $c_3 \neq 0$ и $c_4 \neq 0$ можно варьировать форму линий тока в широком диапазоне для большого класса задач при обработке давлением.

Выше было приведено несколько функций тока (1)–(3), причем точное решение определяют не только формулы (1), (2), но и формула (3), в которой $f_1(r)$ такая же, как в формулах (4), а функция f_2 должна удовлетворять уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} + n^2 f_2(r) &= 0 \\ f_2(r) &= u \varphi_1(u) \\ v_r &= v_0 n^2 \varphi_1(u) \cos(nz) \end{aligned} \tag{10}$$

$$v_z = -v_0 - v_0 n^2 \sin(nz) \left[\frac{d\varphi_1}{du} + \frac{1}{u} \varphi_1(u) \right]$$

где $\varphi_1(u)$ – решение уравнения Бесселя первого порядка. В этом случае имеют место формулы (5) при

$$\varphi_1(u) = -[c_3 J_1(u) + c_4 N_1(u)]$$

где $J_1(u)$, $N_1(u)$ – функции Бесселя и Неймана первого порядка. Производные в этих формулах можно исключить, используя соотношения

$$\frac{dJ_1(u)}{du} = J_0(u) - \frac{1}{u} J_1(u)$$

Если формулы (4), (7) определяют течение пластического материала вдоль оси z с монотонным сжатием к этой оси, то формулы (3) и (10) характеризуют течение с периодическими изменениями компонент скорости линии тока показаны на фиг. 3, *b*. Возможно течение с изменениями диаметра потока, но существуют определенные величины диаметров, соответствующие корням уравнения $J_1(nr) = 0$, при которых $v_r = 0$. Линии тока при $nr_1 = u_1$ прямые, параллельные оси z . Это будет иметь место при $u_1 = 3.8, 7.0$ и т.д. (набор этих величин, соответствующих стационарным диаметрам цилиндра, бесконечен). Возможно и течение полого цилиндра с постоянными поверхностями, если оба их радиуса являются корнями уравнения $J_1(nr) = 0$.

Постоянную C в формулах (5) можно выбрать так, чтобы обеспечить выполнение краевого условия $\sigma_r = 0$ на поверхности цилиндра радиусом $r_1 = u_1/n$, где также $\tau_{rz} = 0$, т.е. возможно стационарное течение потока пластического материала цилиндрической формы при напряжениях, равных нулю на боковой поверхности цилиндра. При этом имеется набор дискретных величин диаметров, для которых радиальная компонента скорости на поверхности равна нулю и общая конфигурация цилиндра не изменяется (но происходит периодическое изменение компонент v_r, v_z). Например, $v_r = 0$ при $r_1 = 3.8/n$ и $r = 0$, а максимальная амплитуда изменения v_r имеет место при $r = 1.64/n$.

Известны примеры пластической деформации с сохранением общей конфигурации тела, например, кручение изотропного кругового цилиндра, однако, при этом размеры тела могут быть любыми, а не соответствовать только определенному набору величин, как в данном примере.

Были проведены опыты по волочению цилиндрических прутков диаметрами 5, 10, 15 мм из алюминия, меди и Ст. 3. Форма волок соответствовала фиг. 1, 2, а коэффициент вытяжки изменялся в диапазоне 1.1–2.4 с интервалами 0.3. При проведении экспериментального исследования измерялось усилие волочения с помощью мессдозы с тензодатчиками. В волокни подавались смазки в виде минерального масла и водного раствора мыльного порошка под давлением 0.02 МПа. Результаты опытов показали, что для алюминия и меди расхождения между экспериментальными и расчетными величинами усилий не превышали 15% при $\lambda \leq 1.4$. Для стали, а также алюминия и меди при $\lambda > 1.4$ экспериментальные величины превышали расчетные, причем расхождения возрастают с увеличением λ , достигая при $\lambda = 2.1$ –2.4 величины 70%. Чем меньше подача смазки в зону деформации, тем выше трение и тем больше расхождение между расчетными и опытными величинами усилий. Видимо, в этих условиях неприемлемо условие $\tau_{rz} = 0$, поэтому применение приведенных формул допустимо только при малых силах трения: для алюминия, меди (и $\lambda \leq 1.4$) при хорошей смазке. В частности, хорошую подачу смазки в зону деформации обеспечивают пружинные волокни. Полученные решения могут быть использованы для широкого класса задач в условиях осесимметричной деформации жестко-пластической среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
3. Бровман М.Я. Применение теории пластичности в прокатке. М.: Metallургия, 1991. 265 с.

Тверь

Поступила в редакцию
27.05.1998