

УДК 359.3

Б.А. ЖУКОВ

## ОДИН ВАРИАНТ МЕТОДА СИНЬОРИНИ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В НЕСЖИМАЕМОМ МАТЕРИАЛЕ

Одним из методов решения статических задач нелинейной теории упругости является метод разложения решения в абсолютно сходящиеся ряды по малому параметру [1], предложенный Синьорини в рамках полиномиального представления удельной энергии деформации от инвариантов тензора деформации. В сжимаемом материале для каждого члена ряда получается граничная задача линейной теории упругости. Это позволяет при плоской деформации применять мощный аппарат теории функций комплексной переменной [2]. В несжимаемом материале члены разложения условия несжимаемости являются нелинейными, начиная со второго, и не разрешаются потенциалами Колосова – Мусхелишвили. Т.е. задачи в перемещениях и смешанные граничные задачи содержат уравнение, которому необходимо удовлетворить в плоской области. В [3] предложен вариант учета условия несжимаемости, в рамках оригинальной постановки плоской задачи, предложенной Толоконниковым Л.А. [4] на основе дополнительных постулатов о характере связи между напряжениями и деформациями. В данной работе предлагается вариант исключения условия несжимаемости в рамках подхода Синьорини. Выделяются эффекты второго порядка. Приводится пример решения задачи в перемещениях.

**1. Описание перемещений, сохраняющих объем при плоской деформации.** При плоской деформации, сохраняющей объем, сохраняется площадь фигур в плоской деформации, т.е. сохраняется некоторая дифференциальная два-форма. Преобразования плоскости, сохраняющие дифференциальную два-форму, являются симплектическими [5]. Симплектические преобразования можно описать с помощью производящей функции, и такой подход использовался в механике. Недостатком такого подхода является необходимость задания части поверхности тела в деформированной конфигурации<sup>1</sup>.

Симплектические преобразования можно описать и в терминах потока, порожденного гамильтоновым векторным полем [5]. Поток – однопараметрическое семейство отображений – можно записать в виде

$$X = X(x, y, \eta), \quad Y = Y(x, y, \eta), \quad X(x, y, 0) = x, \quad Y(x, y, 0) = y \quad (1.1)$$

где  $x, y$  – координаты точки в отсчетной конфигурации,  $X, Y$  – координаты точки в текущей конфигурации,  $\eta$  – параметр. Факт, что поток порожден гамильтоновым векторным полем  $v = \{\partial F/\partial y, -\partial F/\partial x\}$  с функцией Гамильтона  $F$ , выражается в том, что (1.1) является решением системы [5]:

$$\left. \frac{dX}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \left. \frac{dY}{d\eta} \right|_{\eta=0} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> См.: Б.А. Жуков. Описание конечных деформаций, сохраняющих объем. Волгоград, 1986. 17 с. / Деп. в ВИНТИ 13. 2. 1986. 1469-В86.

Вводя обозначения симплектического градиента  $\overset{s}{\nabla} F = i\partial F / \partial y - j\partial F / \partial x$  и радиус-вектора  $\mathbf{R} = Xi + Yj$ , можно (1.2) переписать в виде

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \overset{s}{\nabla} F \quad (1.3)$$

С другой стороны, с векторным полем можно связать оператор дифференцирования вдоль этого поля [5]:

$$d/d\eta|_{\eta=0} = \overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla} \quad (1.4)$$

Предполагая аналитичность (1.1) по параметру  $\eta$ , решение (1.3) можно искать в виде ряда

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{d^n \mathbf{R}}{d\eta^n} \right|_{\eta=0} \frac{\eta^n}{n!}$$

или, с учетом (1.4), в форме

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} (\overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla})^{n-1} \overset{s}{\nabla} F \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) удовлетворяет (1.3) с точностью до суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (\overset{s}{\nabla} H_k \cdot \overset{o}{\nabla})^{n-k} \overset{s}{\nabla} H_k \quad (1.6)$$

где  $H_k$  – произвольные функции.

Складывая (1.5) и (1.6), получим разложение по малому параметру перемещений, сохраняющих объем при плоской деформации

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = \eta \overset{s}{\nabla} F + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{n+1}}{(n+1)!} \left[ (\overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla})^n \overset{s}{\nabla} F + \sum_{k=1}^n (\overset{s}{\nabla} H_k \cdot \overset{o}{\nabla})^{n-k} \overset{s}{\nabla} H_k \right] \quad (1.7)$$

Вычисление эффектов порядка выше второго связано с большими техническими трудностями [6]. Ограничиваясь квадратичными по параметру слагаемыми, получим

$$\mathbf{U} = \eta \overset{s}{\nabla} F + \frac{\eta^2}{2} (\overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla}) \overset{s}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla} H \quad (1.8)$$

где  $F, H$  – произвольные функции от  $(x, y)$  (удовлетворяющие необходимым условиям гладкости). Выражение (1.8) удовлетворяет условию несжимаемости с точностью до членов, пропорциональных  $\eta^3$ .

**2. Разложение напряжений, уравнений равновесия и граничных условий.** Согласно (1.8) тензор напряжений Пиолы для гиперупругого материала, потенциал энергии деформации которого является полиномом от инвариантов тензора деформации, представляется в виде:

$$\mathbf{D} = \eta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\mu \eta^2}{2} [2\boldsymbol{\epsilon}_2 + \overset{s}{\nabla} F \cdot (\overset{o}{\nabla} \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F) - 2q_1 \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F + q_2 (\mathbf{E} + \mathbf{k}\mathbf{k})] \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu [2\boldsymbol{\epsilon}_1 + q_1 (\mathbf{E} + \mathbf{k}\mathbf{k})], \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 = \frac{1}{2} (\overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{1}{2} (\overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} H + \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} H), \quad \mathbf{E} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}$$

где  $\overset{o}{\nabla}$  – оператор Гамильтона,  $q_1, q_2$  – функции гидростатического давления,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Уравнения равновесия приводятся к двум для эффектов первого и второго порядка

$$\overset{o}{\nabla} q_1 + \overset{s}{\nabla} \Delta F = 0 \quad (2.2)$$

$$\overset{o}{\nabla} q_2 + \overset{s}{\nabla} \Delta H = -[2 \overset{s}{\nabla} \Delta F \cdot \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} F \cdot (\overset{o}{\nabla} \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F) + \overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \Delta F]$$

Условия интегрируемости получаются в виде системы

$$\Delta \Delta F = 0, \quad \Delta \Delta H = 0 \quad (2.3)$$

Таким образом,  $F$  и  $H$  – бигармонические функции. Этот факт позволяет ввести комплексные потенциалы для разрешимости (2.3) в стандартной форме формулы Гурса.

Пользуясь разложением  $\mathbf{u} = \eta \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \eta^2 \mathbf{u}_2$ , граничные условия в перемещениях представим в виде

$$\overset{s}{\nabla} F = \mathbf{u}_1, \quad \overset{s}{\nabla} H = \mathbf{u}_2 - \overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} F \quad (2.4)$$

Используя представление  $\mathbf{f} = \eta \mathbf{f}' + \frac{1}{2} \eta^2 \mathbf{f}''$  на границе в деформированной конфигурации, граничные условия в напряжениях можно записать в отсчетной конфигурации в форме

$$\mathbf{n} \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + q_1 \mathbf{E}) = \mathbf{f}_1$$

$$\mathbf{n} \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + q_2 \mathbf{E}) = \mathbf{f}_2 - \mathbf{n} \cdot [\overset{s}{\nabla} F \cdot (\overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F) - 2q_1 \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F] \quad (2.5)$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}'/\mu, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}''/\mu - 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{n} \mathbf{f}'/\mu$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к граничному контуру  $l$  в отсчетной конфигурации.

Условия самоуравновешенности системы внешних сил на боковой поверхности приводятся к выражениям

$$\int_l \mathbf{f}_1 dl = 0, \quad \int_l \mathbf{r} \times \mathbf{f}_1 dl = 0, \quad \int_l \mathbf{f}_2 dl = 0 \quad (2.6)$$

$$\int_l [2\mathbf{R}' \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_2] dl = 0, \quad \mathbf{R}' = \overset{s}{\nabla} F$$

*Ограничения на граничные условия в первой краевой задаче.* Естественным условием, налагаемым на граничные условия в напряжениях, является их самоуравновешенность. Для того, чтобы использовать теорему о существовании решения линейной теории для эффектов второго порядка в первой краевой задаче, этой задаче придают вид линейной краевой задачи в напряжениях. Для этого вводят фиктивные поверхностные и объемные плотности усилий.

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_2 - \mathbf{n} \cdot [\overset{s}{\nabla} F \cdot (\overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F) - 2q_1 \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F]$$

$$\mathbf{F}_x = 2 \overset{s}{\nabla} \Delta F \cdot \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} F \cdot (\overset{o}{\nabla} \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \overset{o}{\nabla} F) + \overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \Delta F$$

Легко проверяется, что главный вектор и главный момент этих плотностей равны нулю при выполнении (2.6).

Выражение

$$\int_l [2\mathbf{R}' \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_2] dl = 0$$

называется условием Синьорини. Это условие на вектор перемещения  $\mathbf{R}'$ , который определяется в линейной задаче в напряжениях с точностью до  $\mathbf{R}'_0 + \omega_0 \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{R}'_0$  –

векторная, а  $\omega_0$  – вещественная постоянные. Постоянная  $\omega_0$  и определяется из условия Синьорини

$$\omega_0 = \int_l [2\mathbf{R}' \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_2] dl / 2 \int_l \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r} dl \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{R}'$  определен решением линейной задачи. Таким образом, выражение  $\int_l \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r} dl \neq 0$

является необходимым условием разрешимости первой граничной задачи.

*Ограничения на граничные условия во второй краевой задаче.* Для несжимаемого материала граничные условия во второй граничной задаче не могут быть произвольными. Используя формулу Грина из условия несжимаемости можно получить

$$\oint_l (u_{1x} \cos \alpha + u_{1y} \sin \alpha) dl = 0 \quad (2.8)$$

$$\oint_l (u_{2x} \cos \alpha + u_{2y} \sin \alpha) dl = \oint_l \left[ \left( u_{1x} \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + u_{1y} \frac{\partial u_{1x}}{\partial y} \right) \cos \alpha + \left( u_{1x} \frac{\partial u_{1y}}{\partial x} + u_{1y} \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} \right) \sin \alpha \right] dl$$

где  $u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}$ , – декартовы компоненты векторов  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ , а  $\alpha$  – угол наклона к оси  $Ox$  вектора внешней нормали к граничному контуру  $l$ .

**3. Комплексные потенциалы, разрешающие уравнения равновесия и условие интегрирования уравнений равновесия.** Уравнениям (2.2), (2.3) можно удовлетворить тождественно с помощью выражений

$$F = \bar{z}\vartheta + z\bar{\vartheta} + \varphi + \bar{\varphi}, \quad q_1 = 4i(\bar{\vartheta}' - \vartheta' - ic_1), \quad H = \bar{z}\psi + z\bar{\psi} + \chi + \bar{\chi} \quad (3.1)$$

$$q_2 = q_{20} - 8(a\bar{a} + b\bar{\vartheta}'' + \overline{b\vartheta}'''), \quad q_{20} = 4i(\bar{\psi}' - \psi' - ic_2), \quad a = \bar{z}\vartheta'' + \varphi'', \quad b = z\bar{\vartheta}' + \bar{\varphi}' + \vartheta$$

где  $c_1, c_2$  – вещественные постоянные интегрирования. Буквами  $\varphi, \chi, \psi, \vartheta$  обозначены аналитические функции комплексной переменной  $z = x + iy$ . Штрихи у аналитических функций комплексного переменного означают производные по  $z$ . Введя обозначения  $g = \bar{z}\psi' + \chi'$ ,  $d = z\bar{\psi}' + \bar{\chi}' + \psi$ , разложения выражений в правых частях (1.8) и (2.1) по малому параметру  $\eta$  можно записать в виде [7]:

$$U_1 + iU_2 = \eta(-2ib) + \frac{\eta^2}{2}[-2id + 4(\bar{b}\bar{a} - cb)] \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2\mu}[D_{11} + D_{22} + i(D_{12} - D_{21})] = \eta q_1 + \frac{\eta^2}{2}(q_{20} + P) \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2\mu}[D_{22} - D_{11} - i(D_{12} + D_{21})] = \eta 4i\bar{a} + \frac{\eta^2}{2}(4i\bar{g} + Q)$$

$$P = -4iq_1c - 8(a\bar{a} + b\bar{\vartheta}'' + \overline{b\vartheta}'''), \quad Q = -4iq_1\bar{a} - 8(\bar{b}\bar{h} - b\bar{\vartheta}''')$$

$$c = \vartheta' + \bar{\vartheta}', \quad h = \bar{z}\vartheta''' + \varphi'''$$

Формулы (3.2), (3.3) являются аналогом формул Колосова – Мусхелишвили в рамках эффектов второго порядка для несжимаемого материала при плоской деформации.

Граничным условиям в перемещениях придается вид

$$-2ib = u_{1x} + iu_{1y}, \quad -2ud = u_{2x} + iu_{2y} - 4(\bar{b}\bar{a} - cb) \quad (3.4)$$

а силовым граничным условиям придается форма

$$nq_1 - \bar{n}4i\bar{a} = f_{11} + if_{12}, \quad nq_{20} - \bar{n}4i\bar{g} = f_{21} + if_{22} - nP + \bar{n}Q \quad (3.5)$$

$$f_{1i} = \frac{1}{\mu} f'_i, \quad f_{2i} = \frac{1}{\mu} [f_i'' - 2i(nan - \bar{n}\bar{a}\bar{n})f'_i]$$

Декартовы компоненты главного вектора внутренних усилий на произвольной дуге  $AB$  в отсчетной конфигурации, представляются разложением

$$\frac{1}{\mu}(X+iY) = \eta 4(z\bar{\vartheta}' + \bar{\varphi}' - \vartheta - ic_1 z)|_A^B + \frac{\eta^2}{2} \left\{ 4(z\bar{\psi}' + \bar{\chi}' - \psi - ic_2 z)|_A^B + 8i[(\vartheta' - \bar{\vartheta}' + 2ic_1)b + \bar{a}\bar{b} - z\bar{\vartheta}'^2]|_A^B + \int_{AB} 8i\vartheta'^2 dz - (16i\bar{\vartheta}'\bar{\varphi}' + C_1 i\bar{\omega}'^2)d\bar{z} \right\} \quad (3.6)$$

Формула (3.4) получена в предположении, что при движении вдоль дуги от точки  $A$  к точке  $B$  поворот от вектора нормали к вектору касательной выглядит против часовой стрелки. Осевое усилие определяется по формуле

$$\frac{Q}{\mu} = \eta \iint_{\partial V} q_1 ds + \frac{\eta^2}{2} \iint_{\partial V} [q_{20} - 8(a\bar{a} + b\vartheta'' + \bar{b}\bar{\vartheta}'')] ds \quad (3.7)$$

Разложение декартовых компонент главного момента внешних сил на граничной дуге  $AB$ :  $M_z = \eta M_{z1} + \frac{1}{2}\eta^2 M_{z2}$  можно выразить через компоненты главного вектора внешних сил на этой дуге по формулам

$$M_{z1} = \frac{i}{2}[z(Y_1 - iX_1) - \bar{z}(Y_1 + iX_1)]|_A^B + \frac{i}{2} \int_{AB} (X_1 + iY_1)d\bar{z} - (X_1 - iY_1)dz$$

$$M_{z2} = 2[b(Y_1 - iX_1) - \bar{b}(Y_1 + iX_1)]|_A^B + \frac{i}{2} z(Y_2 - iX_2) - \bar{z}(Y_2 + iX_2)|_A^B -$$

$$- 2 \int_{AB} [(X_1 - iY_1)c + (X_1 + iY_1)a] dz - 2 \int_{AB} [(X_1 + iY_1)c + (X_1 - iY_1)\bar{a}] d\bar{z} +$$

$$+ \frac{i}{2} \int_{AB} (X_2 + iY_2)d\bar{z} - (X_2 - iY_2)dz \quad (3.8)$$

Если дуга замкнута, а компоненты первого порядка главного вектора и вектора перемещений на ней непрерывны, то внеинтегральные члены в (3.8) исчезают.

Формула (2.7) для определения вещественной постоянной  $A = \omega_0$  в выражении для линейного вектора перемещений представляется в виде

$$A = [M_{z2}]_l / [S]_l \quad (3.9)$$

$$[S]_l = \frac{1}{2}[z(Y_1 - iX_1) + \bar{z}(Y_1 + iX_1)]_l - \frac{1}{2} \int_l (X_1 + iY_1)d\bar{z} + (X_1 - iY_1)dz$$

где  $l$  – граничный контур.

Подобно тому, как это делается в линейной теории [2] можно показать, что в задаче в перемещениях в  $p+1$  связной конечной области  $G$  комплексные потенциалы принимают вид

$$\vartheta = \sum_{k=1}^p \bar{T}_{0k} \ln(z - z_k) + \tilde{\vartheta}, \quad \vartheta' = \sum_{k=1}^p \frac{\bar{T}_{0k}}{(z - z_k)} + \tilde{\vartheta}', \quad \chi' = \sum_{k=1}^p T_{0k} \ln(z - z_k) + \tilde{\varphi}' \quad (3.10)$$

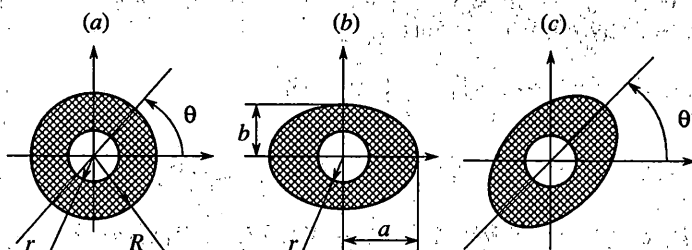
$$\psi = \sum_{k=1}^p \bar{T}_{1k} \ln(z - z_k) + \tilde{\psi}, \quad \psi' = \sum_{k=1}^p \frac{\bar{T}_{1k}}{(z - z_k)} + \tilde{\psi}', \quad \chi' = \sum_{k=1}^p T_{1k} \ln(z - z_k) + \tilde{\chi}'$$

Здесь  $T_{0k}, T_{1k}$  – комплексные постоянные.

Голоморфные в  $G$  функции  $\tilde{\varphi}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\psi}, \tilde{\chi}$  определяются с точностью до  $-\bar{\alpha}z + \beta, i\frac{1}{2}c_1z + \alpha, i\frac{1}{2}c_2z + \gamma, -\bar{\gamma}z + \delta$  соответственно. Причем  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  суть комплексные, а

$c_1$  и  $c_2$  – вещественные постоянные. Тензор напряжений в граничной задаче в перемещениях находится с точностью до шарового тензора  $4[\eta c_1 + \frac{1}{2}\eta^2 c_2]E$ . Константы  $c_1$  и  $c_2$  вычисляются по заданному осевому усилию  $Q$ .

**4. Задача о комбинированном шарнире.** В качестве примера рассматривается задача о напряженном состоянии и угловой жесткости комбинированного резинометаллического шарнира. Его упругий элемент в недеформированном состоянии имеет форму цилиндрической втулки длины  $L$  с поперечным сечением в виде кольца, ограниченного концентрическими окружностями с радиусами  $r$  и  $R$  соответственно ( $r < R$ ). По внутренней боковой поверхности втулка привулканизована к цилиндрическому пальцу с радиусом поперечного сечения  $r$ . По наружной боковой поверхности втулка запрессована в обойму с эллиптическим поперечным сечением и большой полуосью равной  $a$ . Меньшая полуось выбирается из условия удовлетворения (2.8). Палец закреплен, а наружной обойме сообщается поворот вокруг оси на угол  $\Theta$ . Поперечное сечение втулки в исходном, запрессованном, запрессованном и повернутом состояниях ( $a, b, c$ ) показано на фигуре.



**Граничные условия.** Вектор перемещения на привулканизованной к пальцу поверхности равен нулю. Пусть  $\eta = (a - R)/R$  – малый параметр и  $u = \eta u_1 + \frac{1}{2}\eta^2 u_2$  – разложение вектора перемещений на внешней поверхности при запрессовке.

Полагая, что  $\Theta$  и  $\eta$  одного порядка малости запишем разложение вектора перемещений внешней поверхности втулки с точностью до членов квадратичных по  $\eta$ :

$$u = \eta \left( u_1 - i e^{i\alpha} R \frac{\Theta}{\eta} \right) + \frac{\eta^2}{2} \left( u_2 - 2i u_1 \frac{\Theta}{\eta} - e^{i\alpha} R \left( \frac{\Theta}{\eta} \right)^2 \right) \quad (4.1)$$

Здесь  $u_i = u_{ix} + i u_{iy}$  ( $i = 1, 2$ ) – комплексные векторы перемещений при запрессовке, выраженные через декартовы координаты вещественных векторов перемещений,  $\alpha$  – параметр, задающий положение точки на окружности  $z = R e^{i\alpha}$ .

Полагая

$$\eta u_1 + \frac{\eta^2}{2} u_2 = \eta (R \cos \alpha + i b \sin \alpha) + \frac{\eta^2}{2} (i c \sin \alpha) \quad (4.2)$$

константы  $b$  и  $c$  найдем из (2.8).

**Линейное решение.** Подставляя первое слагаемое (4.1) с учетом (4.2) в первое уравнение (2.8), получим  $b = -R$  и  $u_1 = R e^{-i\alpha}$ .

Согласно (3.8) представления для линейных комплексных потенциалов можно записать в виде

$$\vartheta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n + \bar{T}_{01} \ln(z), \quad \vartheta' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n z^{n-1} + \frac{\bar{T}_{01}}{z}, \quad \phi' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n + T_{01} \ln(z)$$

причем  $\bar{c}_0 + d_0 = 0$ . Подставляя эти выражения и первое слагаемое в (4.1) (с учетом (4.2)) в первую систему (4.3), получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [(2-m)R^{2-m}\bar{c}_{2-m} + \bar{d}_{-m}R^{-m} + c_m R^m] e^{im\alpha} = -2\bar{T}_{01} \ln(R) - T_{01} e^{2i\alpha} + \frac{R}{2} \left( \frac{\Theta}{\eta} e^{i\alpha} + i e^{-i\alpha} \right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [(2-m)r^{2-m}\bar{c}_{2-m} + \bar{d}_{-m}r^{-m} + c_m r^m] e^{im\alpha} = -2\bar{T}_{01} \ln(r) - T_{01} e^{2i\alpha}$$

Можно показать, что достаточным условием разрешимости полученной системы является первое уравнение в (2.8).

Решая данную систему, будем иметь

$$\vartheta = A_1 z + i \left( \frac{A_2}{z} + A_3 z^3 \right), \quad \varphi' = \frac{B_1}{z} + i \left( \frac{B_2}{z^3} + B_3 z \right), \quad A_1 = \frac{R^2 \Theta}{4\eta(R^2 - r^2)} \quad (4.3)$$

$$A_2 = \frac{r^2 R^2 (r^4 + r^2 R^2 + R^4)}{2(r^2 - R^2)^3}, \quad A_3 = -\frac{r^2 R^2}{2(r^2 - R^2)^3}, \quad B_1 = \frac{r^2 R^2 \Theta}{2\eta(r^2 - R^2)}$$

$$B_2 = \frac{r^4 R^4 (r^2 + R^2)}{2(r^2 - R^2)^3}, \quad B_3 = \frac{R^2 (4r^4 + r^2 R^2 + R^4)}{2(r^2 - R^2)^3}$$

По (3.6) и (3.8) вычисляется модуль линейного выражения для крутящего момента, приложенного к внешней обойме и приходящегося на единицу длины втулки

$$M = M_{z1} \eta = \frac{4\pi\mu r^2 R^2}{(R^2 - r^2)} \Theta \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) совпадает с выражением крутящего момента для цилиндрического сварного шарнира со втулкой, совпадающей по форме с недеформированной втулкой данного комбинированного. Сварному шарниру отвечает поворот на угол  $\Theta$  внешней обоймы в состоянии  $a$  (см. фигуру). Т.е. линейный крутящий момент в комбинированном шарнире не реагирует на деформацию запрессовки.

*Эффекты второго порядка.* Вычисляя граничные значения производных от линейного вектора перемещений, и подставляя их и второе слагаемое из (4.1) в (2.8), получим

$$c = 2R \text{ и } u_2 = R(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \quad (4.5)$$

Представления для комплексных потенциалов второго порядка можно записать в виде

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n + \bar{T}_{02} \ln(z), \quad \Psi' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \frac{\bar{T}_{02}}{z}$$

$$\chi' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n + T_{02} \ln(z), \quad a_0 + \bar{b}_0 = 0$$

Подставляя эти выражения, выражение (4.5), и второе слагаемое в (4.1) во вторую систему (3.4), получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [(2-m)R^{2-m}\bar{a}_{2-m} + \bar{b}_{-m}R^{-m} + a_m R^m] e^{im\alpha} = -2\bar{T}_{02} \ln(R) - T_{02} e^{2i\alpha} + K_{21} e^{-3i\alpha} +$$

$$+ K_{22} e^{-i\alpha} + K_{23} e^{3i\alpha} + K_{24} e^{5i\alpha}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [(2-m)r^{2-m}\bar{a}_{2-m} + \bar{b}_{-m}r^{-m} + a_m r^m] e^{im\alpha} = -2\bar{T}_{02} \ln(r) - T_{02} e^{2i\alpha}$$

$$K_{21} = \frac{ir^2 R(r^2 + 2R^2)}{2(r^2 - R^2)^2}, \quad K_{22} = \frac{R\theta}{\eta} \left( 1 + \frac{r^2}{2(r^2 - R^2)} \right) + \frac{iR}{2}$$

$$K_{23} = \frac{Rr^2\theta}{2\eta(r^2 - R^2)}, \quad K_{24} = -K_{21}$$

Можно показать, что достаточным условием разрешимости полученной системы является второе уравнение в (2.8). Решая данную систему, будем иметь.

$$\psi = \frac{A_1^0}{z^3} + \frac{A_2^0}{z} + A_3^0 z^3 + A_4^0 z^5, \quad \chi' = \frac{B_1^0}{z^5} + \frac{B_2^0}{z^3} + B_3^0 z + B_4^0 z^3$$

$$A_1^0 = i \frac{R^4 r^8 (r^8 + 4R^2 r^6 + 7R^4 r^4 + 10R^6 r^2 + 8R^8)}{2S_1 S_2}$$

$$A_2^0 = \frac{R^2 r^2 (3r^4 + 4r^2 R^2 + 2R^4)}{2\eta S_2} \ominus + i \frac{r^2 R^2 (r^4 + r^2 R^2 + R^4)}{S_2}$$

$$A_3^0 = \frac{3R^2 r^2}{2\eta S_2} \ominus - i \frac{R^2 r^2}{2S_2}, \quad A_5^0 = -i \frac{r^2 R^4 (3r^6 + 8r^4 R^2 + 5r^2 R^4 + 2R^6)}{2(r^{16} - 16r^{10} R^6 + 30r^8 R^8 - 16r^6 R^{10} + R^{16})}$$

$$B_1^0 = 2i \frac{R^6 r^{10} (r^6 + 4R^2 r^4 + 7r^2 R^4 + 6R^6)}{S_1 S_2}, \quad B_2^0 = \frac{r^4 R^4 (2r^2 + R^2)}{\eta S_2} \ominus + i \frac{r^4 R^4 (r^2 + R^2)}{2S_2}$$

$$B_3^0 = -\frac{R^2 (6r^4 + 2r^2 R^2 + R^4)}{\eta S_2} \ominus + i \frac{R^2 (4r^4 + r^2 R^2 + R^4)}{2S_2}$$

$$B_4^0 = 2i \frac{r^{12} R^4 (4r^8 + 11r^6 R^2 + 8r^4 R^4 + 5r^2 R^6 + 2R^8)}{S_1 S_2}$$

$$S_1 = r^{10} + 3R^2 r^8 + 6R^4 r^6 - 6R^6 r^4 - 3R^8 r^2 - R^{10}, \quad S_2 = (r^2 - R^2)^3$$

Вычисляя главный момент второго порядка на внешней обойме, получим, что он равен нулю. Таким образом, эффекты второго порядка не сказываются на интегральных характеристиках жесткости шарнира данной конструкции. Этот результат объясняется двумя причинами. С одной стороны, напряжения второго порядка от запрессовки обладают такой симметрией, что не дают вклада в крутящий момент, как и напряжения первого порядка. Это наглядно проявляется при вычислении момента на внутренней обойме. Здесь он просто пропорционален интегралу по углу  $\varphi$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  от касательного усилия  $\tau_\varphi$  (компонента тензора Коши). Выписывая выражения для  $\tau_\varphi$ , можно убедиться, что слагаемые, отвечающие за напряжения и запрессовки совместно с кручением, умножаются на синусы и косинусы углов кратных  $\varphi$  и интегралы от них равны нулю. С другой стороны, решение для чистого кручения (4.4) является точным в нелинейной постановке для потенциала Муни. Т.е. его разложение по малому параметру содержит только первый член, совпадающий с ним самим.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Громов В.Г., Толоконников Л.А. К вычислению приближений в задаче о конечных плоских



деформациях несжимаемого материала // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 81–86.

4. Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 439 – 444.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. Жуков Б.А. Сравнение моделей Гриффитса и Снеддона для трещины нормального отрыва в рамках эффектов второго порядка в несжимаемом гиперупругом материале // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. 3-ей Междунар. конф. Ростов н/Д.: "МП Книга", 1997. Т. 1. С. 154–158.

Волгоград

Поступила в редакцию  
15.06.1999