

УДК 531.36

© 2001 г. А.П. ИВАНОВ, В.И. ПЕРЕВЕРЗЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХМАССОВОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ

Рассматривается коллинеарная система из двух материальных точек, движущихся в промежутке между двумя стенками. Одна из частиц связана со стенкой пружиной, вторая движется по инерции, упруго соударяясь с другой стенкой и первой частицей. С физической точки зрения, данная система может служить моделью взаимодействия идеального газа со стенками содержащего его сосуда, в которой учитывается молекулярная структура стенок и их собственное движение. С математической точки зрения, обсуждаемая проблема обобщает задачу Улама об ускорении космических лучей [1] и является модификацией двухмассового "молоточка Андреева" [2], в котором одна из пружин заменена жестким ограничителем перемещения.

Построены простые периодические движения системы в случае неподвижных стенок, исследована их устойчивость и обсуждены бифуркации. Проведен качественный анализ динамики в случае, когда отношение масс частиц мало. Обсуждена эволюция системы в случае, когда стенки медленно движутся.

1. Уравнения движения. Введем на прямой инерциальную систему координат Ox и обозначим x_1 , x_2 координаты частиц (фиг. 1). Положение ограничителей задается функциями $a(t)$ и $b(t)$. Пружина, связывающая первую частицу с левой стенкой, предполагается достаточно жесткой, чтобы исключить соударения между ними.

Уравнения движения выглядят так

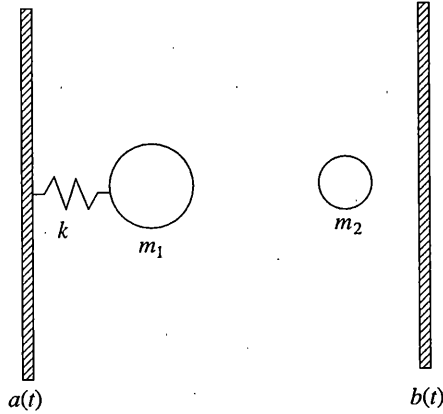
$$m_1 \ddot{x}_1 = k(a(t) + a_0 - x_1) - I_1 \delta(t - t'_1); \quad m_2 \ddot{x}_2 = I_1 \delta(t - t'_1) - I_2 \delta(t - t'_2)$$
$$x_1 \leq x_2 \leq b(t) \quad (1.1)$$

Здесь m_1 , m_2 – массы частиц, k – жесткость пружины, a_0 – ее длина в ненапряженном состоянии, I_1 – импульс, возникающий при столкновении частиц в момент t'_1 (при этом $x_1 = x_2$), I_2 – импульс, возникающий при столкновении второй частицы с правой стенкой в момент t'_2 (при этом $x_2 = b(t)$), δ – функция Дирака. Удары считаем абсолютно упругими, так что относительная скорость соударяемых тел изменяется на противоположную. Отсюда при учете закона сохранения импульса получаем такие выражения:

$$I_1 = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_1^- - \dot{x}_2^-), \quad I_2 = 2 m_2 (b - \dot{x}_2^-) \quad (1.2)$$

где индекс $(-)$ соответствует началу соударения.

В промежутке между соударениями первая частица совершает колебательное движение, а вторая движется по инерции, наталкиваясь поочередно на правую стенку и первую частицу (в принципе, при некоторых значениях параметров возможны и повторные соударения частиц, когда первая из них "догоняет" вторую благодаря



Фиг. 1

действию пружины). Эти движения несложно построить, интегрируя систему (1.1). Наличие ударов (1.2) делает систему нелинейной, а ее динамику очень сложной: численный анализ аналогичной одномассовой системы показывает [1] нерегулярный, хаотический характер движения для обширных диапазонов параметров.

Цель данной работы состоит в исследовании системы (1.1), (1.2) в предположениях, что $m_1 \gg m_2$, а амплитуда колебаний пружины намного меньше характерного расстояния между стенками. Эти требования, позволяющие применять к исследованию асимптотические методы, оправданы в рамках модели взаимодействия идеального газа (частица m_2) со стенками сосуда, молекулы которого (частица m_1) совершает колебательное движение относительно некоторого среднего положения. Некоторые из полученных результатов остаются верными и после снятия данных ограничений.

2. Периодические движения в случае неподвижных стенок. Допустим сначала, что стенки неподвижны: $a(t) + a_0 \equiv 0$, $b(t) \equiv b$, т.е. система консервативна. Таким системам присуще наличие семейств периодических движений. Найдем простейшие движения этого вида, для которых кинетическая энергия свободной частицы остается неизменной, т.е. скорость при ударах меняется на противоположную. Вследствие соотношений (1.2), данное требование при ударе о стенку выполняется автоматически, а при соударении частиц оно означает, что

$$m_1 \dot{x}_1^- + m_2 \dot{x}_2^- = 0 \quad (2.1)$$

т.е. в момент соударения суммарный импульс частиц равен нулю.

Второе условие периодичности выражает синхронность движений частиц. Если в моменты соударений частиц $x_1 = x_2 = x^*$, а скорость полета второй частицы равна $\pm v$, то период равен продолжительности перелета второй частицы: $\tau = 2(b - x^*)/v$. В течение этого времени первая частица движется по гармоническому закону:

$$x_1 = x^* \cos \omega(t - t_1') + \frac{\dot{x}_1^+}{\omega} \sin \omega(t - t_1'), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad (2.2)$$

Через время τ первая частица подходит в ту же точку x^* , но с противоположной скоростью

$$x^* \cos \omega\tau + \frac{\dot{x}_1^+}{\omega} \sin \omega\tau = x^*, \quad -\omega x^* \sin \omega\tau + \dot{x}_1^+ \cos \omega\tau = -\dot{x}_1^+ \quad (2.3)$$

Поскольку $m_1 \dot{x}_1^+ = -m_2 v \neq 0$, то система (2.3) принимает вид

$$m_2 v \cos \beta + m_1 \omega x^* \sin \beta = 0, \quad v\tau = 2(b - x^*), \quad \beta = \omega\tau/2$$

Откуда после несложных преобразований получаем

$$v\tau + 2x^* = 2b, \quad \omega x^* = \dot{x}_1^+ \operatorname{ctg} \beta, \quad \dot{x}_1^+ = -\eta v, \quad \eta = m_2 / m_1 \quad (2.4)$$

Выражая x^* через v из второго и третьего равенства (2.4) и подставляя результат в первое равенство, получим

$$v(\beta - \eta \operatorname{ctg} \beta) = b\omega \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) можно рассматривать как уравнение относительно v . Для того, чтобы оно имело единственный положительный корень, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\beta - \eta \operatorname{ctg} \beta > 0 \quad (2.6)$$

Определив v , можно вычислить x^* и \dot{x}_1^+ по формулам (2.4).

Неравенство (2.6) выполнено в двух случаях: либо $\operatorname{tg} \beta < 0$, либо $\beta \operatorname{tg} \beta > \eta$. Таким образом, наличие простых периодических движений у рассматриваемой системы определяется двумя безразмерными параметрами: η и β .

Дополнительный отбор связан с проверкой геометрического условия существования периодического движения указанного типа, выражаемого неравенством $x_1 < x_2$ для всех $t \in (t'_1, t'_1 + \tau)$. При учете этого условия, можно прийти к выводу о наличии счетного числа семейств периодических движений Γ_k , каждое из которых существует в некотором интервале $\tau \in B_k$. Индекс k здесь имеет смысл числа прохождений координаты первой частицы через свое минимальное значение в промежутке между столкновениями частиц: с ростом k период τ растет.

Исследуем в первом приближении устойчивость построенных периодических движений. Для построения характеристического уравнения воспользуемся алгоритмом, описанным в [3]. В промежутках между соударениями система (1.1) линейна, и ее матрица фундаментальных решений $X(t, t_0)$ имеет вид

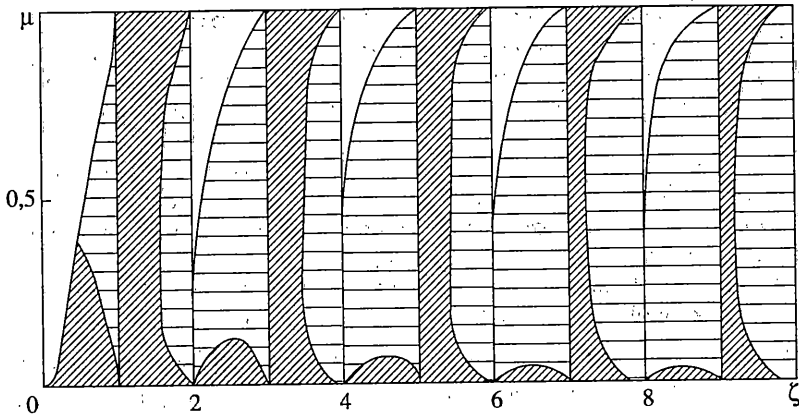
$$X(t, t_0) = \begin{vmatrix} \cos \omega(t - t_0) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - t_0) & 0 & 0 \\ -\omega \sin \omega(t - t_0) & \cos \omega(t - t_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t - t_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

При ударах матрица X изменяется скачком, это изменение можно учесть, умножив ее на матрицу удара J . Расчеты, проведенные по формулам, приведенным в [3], приводят при учете (2.4) к таким результатам:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 - 2\mu & 0 & 2\mu & 0 \\ 2\omega\mu^2\xi & 1 - 2\mu & -2\omega\mu^2\xi & 2\mu \\ 2 - 2\mu & 0 & 2\mu - 1 & 0 \\ 2\omega\mu(\mu - 1)\xi & 2 - 2\mu & 2\omega\mu(1 - \mu)\xi & 2\mu - 1 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \xi = \operatorname{ctg} \beta$$



Фиг. 2

где матрица J_1 отвечает соударению частиц, J_2 – соударению второй частицы со стенкой.

Определяющую матрицу Z строим как произведение вида $Z = J_1 X(\tau, \tau/2) J_2 X(\tau/2, 0)$. Характеристическое уравнение для матрицы Z таково:

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0 \quad (2.9)$$

$$a_1 = 2(1 - \mu)^2 (1 + \cos \omega \tau) - 2\mu(1 - \mu)\omega \tau \xi, \quad a_2 = 2a_1 - 2$$

Уравнение (2.9) имеет двойной единичный корень, что объясняется консервативностью системы. Остальные два мультипликатора удовлетворяют квадратному уравнению

$$\rho^2 + (2 - a_1)\rho + 1 = 0$$

Следовательно, условие устойчивости в первом приближении выглядит так:

$$0 \leq a_1 \leq 4 \quad (2.10)$$

Неравенство (2.10) содержит два параметра $\zeta = \omega \tau / \pi$ и μ . На фиг. 2 на плоскости этих параметров построены области устойчивости (выделенные косой штриховкой), а также существования неустойчивых движений обсуждаемого типа (прямая штриховка), без учета вышеупомянутого геометрического условия существования. При $\zeta > 10$ эти области имеют сходную структуру, причем "холмики" устойчивости, примыкающие к отрезкам $\zeta \in (2k, 2k + 1)$ становятся все ниже, а "телефонные трубки" в интервалах $\zeta \in (2k - 1, 2k)$ сужаются с ростом k . Границы "холмиков" отвечают условию $a_1 = 0$, за исключением левой границы первого из них ($k = 0$), описываемой уравнением (2.6). Левые и правые границы "телефонных трубок" соответствуют равенствам $a_1 = 0$ и $a_1 = 4$ соответственно. Границы областей существования описываются уравнениями (2.6).

Интересно проследить за поведением периодических движений при возрастании параметра τ при фиксированном μ . Вначале простых периодических движений нет, затем рождается периодическое движение, для которого скорость v убывает от бесконечно больших положительных значений. Это движение устойчиво внутри первого "холмика", но теряет устойчивость (не исчезает) при пересечении правой его границы по сценарию бифуркации удвоения периода [4].

Далее могут происходить каскады бифуркаций этого типа и переход к хаотическому движению [1, 4].

Выход на левую границу трубки $\zeta = 2k + 1$ сопровождается обратной бифуркацией удвоения периода с восстановлением устойчивости. Последующий выход на правую границу трубки отвечает бифуркации "седло – узел", означающей слияние данного устойчивого периодического движения с неустойчивым движением того же периода и исчезновение обоих этих движений.

При пересечении ветвей линии (2.6) в интервалах $\zeta \in (2k, 2k + 1)$ происходит рождение неустойчивого периодического движения. Кроме того, границы выступов (при фиксированном μ возможно пересечение некоторого конечного их числа) соответствуют бифуркациям удвоения периода.

Примечательной особенностью бифуркации "седло–узел" в рассматриваемой системе является ее кажущийся двусторонний характер: устойчивые периодические движения существуют при значениях τ , меньших некоторых критических τ_k^* , а неустойчивые – при $\tau > \tau_k^*$. Такое несоответствие стандартному сценарию бифуркации объясняется искусственностью выбора параметра τ : если рассмотреть вместо него естественный параметр – полную энергию системы

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 \quad (2.11)$$

то ситуация становится штатной.

Действительно, если подставить в равенство (2.11) условия периодичности (2.4), то полученная функция $E(\tau)$ окажется немонотонной: как показывают несложные расчеты, она имеет экстремумы (минимумы) как раз в точках τ_k . Следовательно, при переходе значения E через одно из критических в системе происходит рождение пары периодических движений – устойчивого и неустойчивого.

3. Исследование динамики при малых μ . Воспользуемся для глобального анализа рассматриваемой системы методом сечений Пуанкаре. Перейдем предварительно к безразмерной форме, полагая $x_1 = \alpha y_1$, $x_2 = b y_2$ и вводя новое время $dt'/dt = m_2 b^2$ (здесь $\alpha = \sqrt{m_2/m_1}$). Функция Лагранжа и наложенные на систему односторонние связи примут вид (для производных по новому времени сохранены прежние обозначения):

$$L = \frac{1}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} \omega^2 y_1^2, \quad \alpha y_1 \leq y_2 \leq 1 \quad (3.1)$$

Проще всего в качестве сечения взять поверхность $y_2 = \alpha y_1$, соответствующую соударению частиц. Используем консервативность системы и зафиксируем (удвоенную) постоянную энергии

$$E = \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \omega^2 y_1^2 \quad (3.2)$$

За координаты на поверхности сечения примем y_1, \dot{y}_1 сразу после удара: при этом $y_2 = y_1$, $\dot{y}_2 = \sqrt{E - \dot{y}_1^2 - \omega^2 y_1^2} = W$.

На промежутке времени до следующего соударения T выполнены равенства (2.2), откуда

$$\dot{y}_1(T) = y_1 \cos \omega T + \frac{\dot{y}_1}{\omega} \sin \omega T, \quad \dot{y}_1(T-0) = -\omega y_1 \sin \omega T + \dot{y}_1 \cos \omega T \quad (3.3)$$

Вследствие соотношений (1.2) имеем

$$\dot{y}_1(T+0) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \dot{y}_1(T-0) - 2 \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} W \quad (3.4)$$

Соединяя формулы (3.3), (3.4), получим такое выражение для отображения Пуан-

каре

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= y_1 \cos \omega T + \frac{\dot{y}_1}{\omega} \sin \omega T \\ \bar{y}_1 &= (1 - 2\mu)(-\omega y_1 \sin \omega T + \dot{y}_1 \cos \omega T) - 2\sqrt{\mu(1-\mu)}W\end{aligned}\quad (3.5)$$

где продолжительность перелета T неявно определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$TW = 2 - \sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}} \left((1 + \cos \omega T)y_1 + \frac{\sin \omega T}{\omega} \dot{y}_1 \right) \quad (3.6)$$

Отображение (3.5), (3.6) – простейшее для данной задачи, и его можно использовать при численных расчетах. С другой стороны, затратив дополнительные усилия, можно построить для данной системы отображение, сохраняющее площадь. Последнее будет иметь несколько более сложный вид, зато оно дает возможность получить ряд результатов на основе общей теории. Опишем кратко процедуру построения такого отображения в случае, когда параметр μ достаточно мал.

Прежде всего упростим вид наложенных на систему односторонних связей (3.1), вводя новую координату s по формуле

$$y_2 = s(1 - \alpha y_1) + \alpha y_1, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (3.7)$$

Дифференцируя соотношение (3.7) и подставляя полученный результат в лагранжиан (5.1), получим для него такое новое выражение:

$$L = \frac{1}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} (\dot{s}(1 - \alpha y_1) + \alpha \dot{y}_1(1 - s))^2 - \frac{1}{2} \omega^2 y_1^2 \quad (3.8)$$

Формула (3.8) сложнее, нежели (3.1), ввиду наличия произведения обобщенных скоростей, что является платой за упрощение вида односторонних связей. Следующее преобразование $y_1 = \psi(s, q)$ будем строить так, чтобы исключить произведение $\dot{s}\dot{q}$ (аналогичная идея применялась в [6] в применении к системе с одной односторонней связью). В результате такой замены (3.8) примет вид

$$L = \frac{1}{2} (\psi'_s \dot{s} + \psi'_q \dot{q})^2 + \frac{1}{2} (\dot{s}(1 - \alpha \psi + \alpha(1 - s)\psi'_s) + \alpha(1 - s)\psi'_q \dot{q})^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \psi^2 \quad (3.9)$$

где ψ'_s, ψ'_q – соответствующие частные производные.

Требование отсутствия в лагранжиане (3.9) произведения $\dot{q}\dot{s}$ приводит к следующему линейному дифференциальному уравнению:

$$(1 + \alpha^2(s-1)^2)\psi'_s + \alpha^2(s-1)\psi = \alpha(s-1)$$

Решая данное уравнение стандартным методом, получим

$$\psi = \frac{1}{\alpha} + C(q)(1 + \alpha^2(s-1)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

где $C(q)$ – произвольная функция. Распорядимся ей так, чтобы замена была регулярна при малых α , причем $\psi = q$ при $\alpha = 0$. Для этого достаточно положить $C(q) = q - 1/\alpha$; в итоге будем иметь

$$\psi = \frac{q}{R} + \frac{\alpha(s-1)^2}{R(R+1)}, \quad R = \sqrt{1 + \alpha^2(s-1)^2} \quad (3.10)$$

Подставляя функцию (3.10) в лагранжиан (3.9), получим

$$L = \frac{(1 - \alpha q)^2}{2R^4} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{q}{R} + \frac{\alpha(s-1)^2}{R(R+1)} \right)^2, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (3.11)$$

Исключим односторонние связи в системе (3.11) при помощи негладкой замены переменной, предложенной в [7]:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \Pi(z), \quad \Pi(z) = \int_0^z \text{sign} \cos u du$$

Здесь $\Pi(z)$ — 2π -периодическая кусочно-линейная функция, производная которой равна ± 1 .

В результате функция (3.11) примет вид:

$$L = \frac{(1 - \alpha q)^2}{2\pi^2 R^4} z^2 + \frac{1}{2} \dot{q}^2 + U, \quad U = -\frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{q}{R} + \frac{\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \Pi(z) \right)^2}{R(R+1)} \right)^2 \quad (3.12)$$

Система (3.13) уже не содержит односторонних связей, но ее силовая функция U не дифференцируема по переменной z . Примем эту переменную за независимую, переходя к уравнениям Уиттекера [8, 9]:

$$\frac{dq}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad p = \dot{q}, \quad H = \frac{\alpha q - 1}{\pi R^2} \sqrt{E - p^2 + U} \quad (3.13)$$

имеющим гамильтонову форму с периодичным по z гамильтонианом.

От дифференциальных уравнений (3.13) можно перейти к сохраняющему площадь отображению, взяв в качестве сечения $z = 0 \pmod{2\pi}$.

Усилия, затраченные на получение канонических уравнений (3.13) оправдываются теми результатами, которые можно получить на ее основе.

В области (2.10) устойчивости простых периодических движений в первом приближении имеется и устойчивость по Ляпунову при условиях отсутствия резонансов до четвертого порядка включительно и отсутствия вырождения нормальной формы [10].

К системе (3.13) применима теория Колмогорова — Арнольда — Мозера [10, 11], позволяющая получить некоторые качественные выводы. Если $\mu = 0$, то $\alpha = 0$, $R = 1$ и зависимость H от z исчезает. Система становится автономной и вполне интегрируемой: все орбиты в области $p^2 - U < E$ представляют собой эллипсы $p^2 + \omega^2 q^2 = h$, где h — постоянная, меньшая E . Угловая скорость движения по этим эллипсам неограниченно возрастает при $h \rightarrow E$ и не исчезает при $h \rightarrow 0$. Теорема Арнольда — Мозера гарантирует, что при малых μ большинство траекторий останутся условно-периодическими.

Для оценки возможной малости параметра μ было проведено численное моделирование динамики системы для значений параметров $E = 1$, $\omega = 1$ (к этому случаю можно перейти от общего за счет подходящего выбора единиц измерения). При этом изучались последовательные итерации отображения (3.5). Если $\mu = 0$, то все точки области $h < E$ движутся по окружностям. Оказалось, что такая картина движения качественно сохраняется при значениях $\mu < 0.001$ без образования видимых хаотических слоев (на самом деле, как следует из общей теории [11] и результатов п. 2, такие слои существуют при сколь угодно малых значениях μ , но большая часть фазового пространства заполнена условно-периодическими движениями). При увеличении μ в системе происходит видимая хаотизация движения: траектории различных точек "перепутываются". В интервале $\mu \in (0.001, 0.1)$ происходит увеличение толщины хаотических слоев, а при $\mu > 0.1$ движение выглядит полностью хаотическим.

С механической точки зрения, регулярный характер движения при малых μ означает, что обмен энергии частицами при ударах не приводит к ее существенному перераспределению: энергия каждой из частиц во все время остается близкой к

своему начальному значению. Напротив, при хаотическом движении роль начальных условий исчезающе мала, и энергии со временем испытывают сильные колебания.

Определим среднее значение удвоенной механической энергии первой частицы $h = \dot{y}_1^2 + \omega^2 y_1^2$ в предположении, что отображение (3.5) эргодично. В силу уравнений (3.5), имеем

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \bar{\dot{y}_1^2} + \omega^2 \bar{y_1^2} = h + 4\mu(1-\mu) \left(E - \frac{3}{2}h \right) + \gamma \\ \gamma &= 2\mu(\mu-1)((\dot{y}_1^2 - \omega^2 y_1^2) \cos 2\omega T - \omega y_1 \sin 2\omega T) - \\ &- 4\sqrt{\mu(1-\mu)(E-h)}(1-2\mu)(\dot{y}_1 \cos \omega T - \omega y_1 \sin \omega T) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Вычислим среднее (по времени) $\langle h \rangle$, заменяя в соотношении (3.14) среднее по времени на среднее по пространству. При этом по соображениям симметрии $\langle \beta \rangle = 0$, откуда

$$\langle h \rangle = 2/3 E \quad (3.15)$$

Таким образом, механическая энергия первой частицы в среднем вдвое больше, чем энергия второй частицы. Поскольку первая частица в промежутке между соударениями движется по гармоническому закону, то средние значения ее кинетической и потенциальной энергии равны. Следовательно, средние значения кинетических энергий обеих частиц совпадают.

4. О динамике системы в случае подвижных стенок. Допустим теперь, что $a = a(\epsilon t)$, $b = b(\epsilon t)$, $\epsilon \ll 1$, т.е. стенки движутся со скоростями, намного меньшими средних скоростей частиц. В данном случае можно воспользоваться общими свойствами адиабатических инвариантов.

При $\alpha = 0$ и постоянных a, b система (3.1) вполне интегрируема, переменными "действие" в ней являются отношение энергии первой частицы к частоте ω и произведение модуля скорости второй частицы на расстояние $b - a - a_0$ [11]. Эти переменные являются адиабатическими инвариантами в системе с подвижными стенками [11].

Если $\alpha > 0$, причем в случае неподвижных стенок система эргодична, то она обладает в случае подвижных стенок почти адиабатическим инвариантом – фазовым объемом $V(E, a, b)$, ограниченным поверхностью $E = \text{const}$ [12]. При учете равенства (3.2) и ограничений $a + \alpha y_1 \leq y_2 \leq b$, вычисления соответствующего четырехкратного интеграла приводят к соотношению

$$V = \frac{4}{3} \pi (b - a - a_0) E^{3/2} \quad (4.1)$$

Таким образом, полная механическая энергия системы остается примерно пропорциональной расстоянию между стенками в степени $2/3$.

К результату об адиабатической инвариантности величины (4.1) при условии эргодичности системы с неподвижными стенками можно прийти и путем прямых расчетов. Для этого заметим, что поскольку ускорения стенок имеют порядок ϵ^2 , то при исследовании адиабатической инвариантности их скорости можно считать постоянными. Не ограничивая общности, положим $a(t) + a_0 \equiv 0$, $b(t) = u = O(\epsilon)$. При ударе второй частицы о правую стенку ее скорость уменьшается на величину $2u$. Отображение Пуанкаре для рассматриваемого случая можно построить по аналогии с (3.5), включая изменяющуюся энергию системы E в число переменных:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= y_1 \cos \omega T + \frac{\dot{y}_1}{\omega} \sin \omega T \\ \bar{\dot{y}_1} &= (1 - 2\mu)(-\omega y_1 \sin \omega T + \dot{y}_1 \cos \omega T) - 2\sqrt{\mu(1-\mu)}(W - 2u) \\ \bar{E} &= E + 4u^2 - 4uW \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для переменных h, E получим после осреднения и отбрасывания членов второго порядка малости такую систему:

$$\bar{E} = E - 4\mu\sqrt{E-h} \quad (4.3)$$

$$\bar{h} = h + 4\mu(1-\mu)(\bar{E} - \frac{3}{2}h)$$

Поскольку изменение расстояния между стенками за время T равно uT , а среднее значение T , определяемое из уравнения (3.6), равно $2/\sqrt{E-h}$, то приращение фазового объема за время T при учете формул (4.3) равно (с точностью до u^2):

$$\Delta V = E^{1/2} \left(\frac{3}{2} b \Delta E + EuT \right) = \frac{2E^{1/2}bu}{\sqrt{E-h}} (3h - 2E) \quad (4.4)$$

При $u = 0$ из системы (4.3) находим $E = \bar{E}$, $h = 2E/3$. Отсюда следует, что на конечном интервале времени величина $(3h - 2E)$ бесконечно мала при $\epsilon \rightarrow 0$. Поэтому правая часть формулы (4.4) имеет более высокий порядок малости, нежели ϵ , что и свидетельствует об адиабатической инвариантности объема (4.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00281) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 96-2138).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
2. Кобринский А.Е., Кобринский А.А. Двумерные виброударные системы. М.: Наука, 1981. 335 с.
3. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
4. Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. N. Y. etc.: Springer, 1993. 459 p.
5. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
6. Иванов А.П., Маркеев А.П. О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632-636.
7. Журавлев В.Ф. Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 781-788.
8. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937.
9. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
11. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
12. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.05.1999