

УДК 531.53

© 2001 г. М.С. АРТЕМЬЕВА, Д.Ю. СКУБОВ

ДИНАМИКА ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ МАЯТНИКОВОГО ТИПА В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На основе метода усреднения исследуются движения проводящих твердых тел маятникового типа в высокочастотном магнитном поле. В отличие от [1] в явном виде найдены условия существования и устойчивости положений равновесия, а также автоколебательных и вращательных движений одно- и двухконтурного маятников. Проанализирована возможность автоколебаний маятника в виде проводящего шара в переменном магнитном поле.

В многочисленных литературных источниках указывалось на возможность потери устойчивости равновесного положения или стационарного вращения при движении проводящих твердых тел в переменном магнитном поле. В частности, в [1] на основе метода усреднения, найдены достаточные условия появления "раскачивающих" ponderомоторных сил при анализе медленных движений в высокочастотном магнитном поле. В [2] приведено исследование устойчивости плоских колебаний проводящего шара относительно горизонтальной оси в однородном переменном магнитном поле. Известны также экспериментальные проверки дестабилизирующего влияния переменного магнитного поля, сюда относятся эксперименты Бетено и Дубошинского, описание которых можно найти в книге [3]. Вместе с тем, число примеров таких движений остается весьма ограниченным. Нельзя считать полным и теоретическое описание влияния переменного магнитного поля на равновесие и движение проводящих твердых тел.

В настоящей работе детально исследуются движения проводящих твердых тел маятникового типа в переменном магнитном поле. Показывается возможность стабилизации за счет осциллирующих электромагнитных сил неустойчивых в поле сил тяжести равновесных положений, а также изучаются бифуркации стационарных движений в виде автоколебаний или вращений на примере маятников, несущих проводящие контура или массивные проводящие тела.

1. Движения маятника с одним контуром тока. Рассмотрим маятниковую систему, роль твердого тела в которой играет замкнутый контур тока, жестко соединенный с подвесом невесомым стержнем (фиг. 1). Предположим, что маятник находится в переменном однородном магнитном поле, частота которого ν много больше, чем частота малых свободных колебаний маятника. Обозначим за θ угол отклонения маятника от вертикальной оси, принимая, что $\theta = 0$ соответствует его нижнему положению. Выражения для кинетической энергии T , энергии магнитного поля W и потенциальной энергии Π имеют вид

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad W = \frac{1}{2} L i^2 + B_0 S i \sin \nu t \sin \theta, \quad \Pi = mgl(1 - \cos \theta) \quad (1.1)$$

где I – момент инерции контура относительно оси, проходящей через точку подвеса, m – масса контура, l – длина стержня, L – коэффициент самоиндукции контура тока i , B_0 – амплитуда внешнего поля.

Уравнения Лагранжа – Максвелла исследуемой электромеханической системы имеют вид

$$I\ddot{\theta} - B_0 S i \sin vt \cos \theta + mgl \sin \theta = 0 \quad (1.2)$$

$$Li + B_0 S \sin vt \cos \theta + B_0 S v \cos vt \sin \theta + Ri = 0$$

Считая, что частота магнитного поля много больше собственной частоты колебаний маятника $k = (mgl/I)^{1/2} \ll v$, введем малый параметр $\varepsilon^2 = k^2/v^2$. Переходя в уравнениях (1.2) к безразмерному (быстрому) времени $\tau = vt$ и безразмерному току $i_u = i/i_*$, где базисное значение тока $i_* = B_0 S/L$, получим следующие уравнения в безразмерных переменных:

$$\ddot{\theta} - \varepsilon^2 \gamma i_u \sin \tau \cos \theta + \varepsilon^2 \sin \theta = 0, \quad (1.3)$$

$$i_u + \sin \tau \cos \theta + \cos \tau \sin \theta + r i_u = 0$$

В этих уравнениях введены безразмерные параметры $\gamma = (B_0 S)^2 / (LmgI)$ и $r = R/(Lv)$. В дальнейшем сохраним за безразмерными переменными прежние обозначения. Имея в виду исследование медленных движений, близких к свободным колебаниям маятника, перепишем систему (1.3) в виде

$$\dot{\theta} = \varepsilon \omega, \quad \dot{\omega} = \varepsilon \gamma i_u \sin \tau \cos \theta - \varepsilon \sin \theta \quad (1.4)$$

$$i_u + \sin \tau \cos \theta + \cos \tau \sin \theta + r i_u = 0$$

Система (1.4) – квазилинейная с одной не критической быстрой переменной. Как было показано в [1] первое приближение асимптотической процедуры описывает консервативную систему. Электромагнитные силы в первом приближении имеют потенциал – среднюю энергию вихревых токов, вычисленных в том же приближении. Консервативность может быть нарушена во втором приближении к электромагнитным силам. При этом, как показано в [1], если частота поля превышает величину обратную постоянной времени проводящего контура $v > R/L$, то второе приближение электромагнитных сил может носить "раскачивающий" характер. Поэтому, не останавливаясь на получении первого приближения, найдем сразу усредненные уравнения медленных движений во втором приближении. Принимая $\omega, \theta = \text{const}$, получим второе приближение для тока

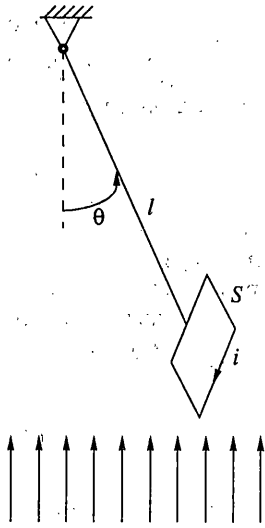
$$i_u = -\frac{\sin \theta}{1+r^2} (\sin \tau + r \cos \tau) + \varepsilon \frac{\omega r \cos \theta}{(1+r^2)^2} ((1-r^2) \sin \tau + 2r \cos \tau) \quad (1.5)$$

Подставляя это выражение в первые два уравнения системы (1.4) и усредняя по быстрому времени τ , получим автономное дифференциальное уравнение второго порядка, которое в медленном времени $t' = kt$ имеет вид

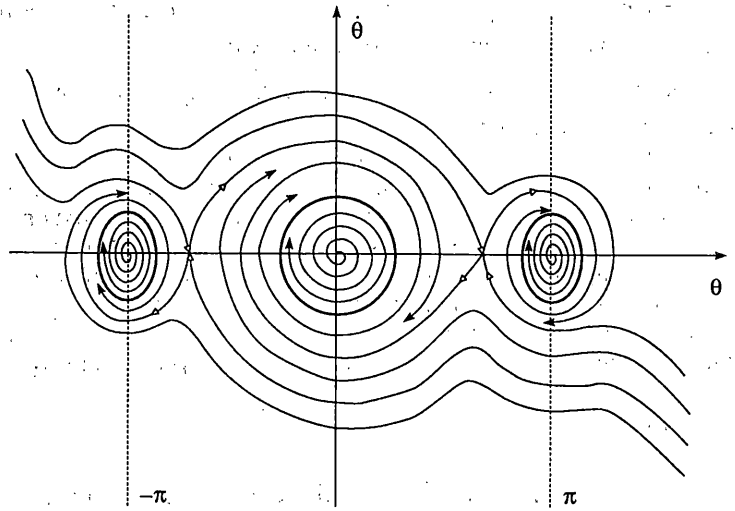
$$\ddot{\theta} - \varepsilon \alpha \cos^2 \theta + (\beta \cos \theta + 1) \sin \theta = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha = \frac{\gamma r(1-r^2)}{2(1+r^2)^2}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2(1+r^2)}$$

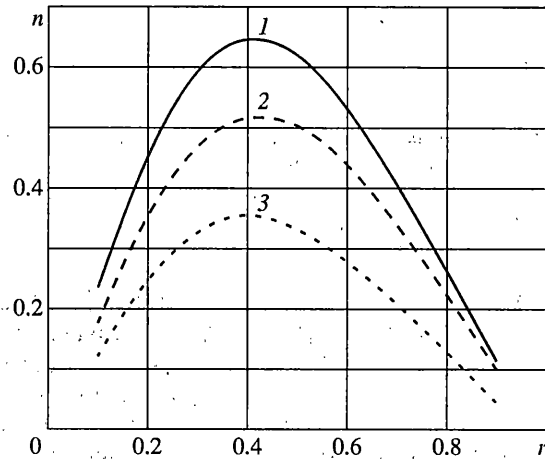
Слагаемое $\beta \cos \theta \sin \theta$ описывает потенциальные электромагнитные силы в первом приближении, а слагаемое $-\varepsilon \alpha \cos^2 \theta$ – "формально диссипативные" силы, которые в полном соответствии с вышесказанным имеют раскачивающий характер при $r < 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В дальнейшем будем рассматривать только случай $r < 1$, при этом, имея в виду возможность развития автоколебаний, добавим в (1.6) чисто диссипативное слагаемое, характеризующее внешнее вязкое трение, в результате чего уравнение медленных колебаний маятника приобретет вид

$$\ddot{\theta} + \varepsilon(n - \alpha \cos^2 \theta)\dot{\theta} + (\beta \cos \theta + 1)\sin \theta = 0 \quad (1.7)$$

В зависимости от величины β маятник может иметь либо два, либо четыре положения равновесия. При $\beta \leq 1$ положения равновесия $\theta = 0, \pi$ – нижнее устойчиво, а верхнее неустойчиво. В случае $\beta > 1$ появляются еще два седловых положения равновесия $\theta = \pi \pm \arccos(1/\beta)$. При этом в диапазоне параметров $n > \alpha$ верхнее и нижнее положение маятника устойчивы, т.е. имеет место эффект стабилизации неустойчивого верхнего положения равновесия за счет действия осциллирующих электромагнитных сил. При $n = \alpha$ устойчивый фокус в положениях равновесия $\theta = 0, \pi$ переходит в сложный фокус первого порядка. При дальнейшем уменьшении n эти поло-

жения равновесия теряют устойчивость с мягким рождением предельных циклов, что означает возникновение в системе автоколебаний с частотой $\sqrt{1+\beta}$ около нижнего положения и $\sqrt{\beta-1}$ – около верхнего. Фазовый портрет системы при наличии двух предельных циклов показан на фиг. 2.

Дальнейшее уменьшение трения приводит к срыву автоколебаний. При этом сперва путем слияния с сепаратрисой, идущей из седла $\pi - \arccos(1/\beta)$ в седло $\pi + \arccos(1/\beta)$, разрушается предельный цикл около верхнего положения равновесия, а затем тем же путем, при слиянии со "своей" сепаратрисой, около нижнего положения. Границы в области параметров, на которых происходит разрушение предельных циклов можно найти, используя метод малого параметра для квазиконсервативной системы (1.7). Слиянию предельного цикла с сепаратрисой соответствующей консервативной системы соответствует нуль функции Понтрягина [4]:

$$\Psi(h, \phi_1, \phi_2) = 2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} (n - \alpha \cos^2 \theta) \sqrt{\beta \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 2h} d\theta \quad (1.8)$$

где ϕ_1, ϕ_2 – координаты седловых точек, соединенные соответствующей сепаратрисой, $h = 1/(2\beta)$ – уровень энергии, отвечающий сепаратрисному движению. Таким образом, для определения $n = n_1(\alpha, \beta)$, при котором пропадает предельный цикл вокруг $\theta = \pi$, получим соотношение

$$\Psi\left(\frac{1}{2\beta}, \pi - \arccos \frac{1}{\beta}, \pi + \arccos \frac{1}{\beta}\right) = 0 \quad (1.9)$$

Аналогично находим выражение для определения параметров $n = n_2(\alpha, \beta)$, при которых исчезает цикл вокруг положения $\theta = 0$:

$$\Psi\left(\frac{1}{2\beta}, -\pi + \arccos \frac{1}{\beta}, \pi - \arccos \frac{1}{\beta}\right) = 0 \quad (1.10)$$

Переходя в соотношениях (1.9), (1.10) от параметров α, β к γ и r , получим соответствующие неявные зависимости $n_1(r, \gamma)$ и $n_2(r, \gamma)$. Бифуркационные кривые $n(r)$ при фиксированном γ ($\gamma = 5$) приведены на фиг. 3. Эти зависимости совпадают с результатами, полученными при численном интегрировании исходной системы (1.3). На фиг. 4 показаны фазовые траектории, полученные при одних и тех же параметрах ($n = 0.45$, $r = 0.4$, $\gamma = 5$, $\varepsilon = 0.2$) путем численного интегрирования усредненного уравнения и исходной системы соответственно.

Кроме медленных колебаний рассматриваемая электромеханическая система допускает также быстрые вращательные движения. Их можно исследовать, сделав в уравнениях (1.3) замену переменных $\psi = \theta - \Omega v t = \theta - \Omega \tau$:

$$\ddot{\psi} - \varepsilon \gamma i \cos(\psi + \Omega \tau) \sin \tau + \varepsilon^2 \sin(\psi + \Omega \tau) + \varepsilon^2 n(\psi + \Omega) = 0 \quad (1.11)$$

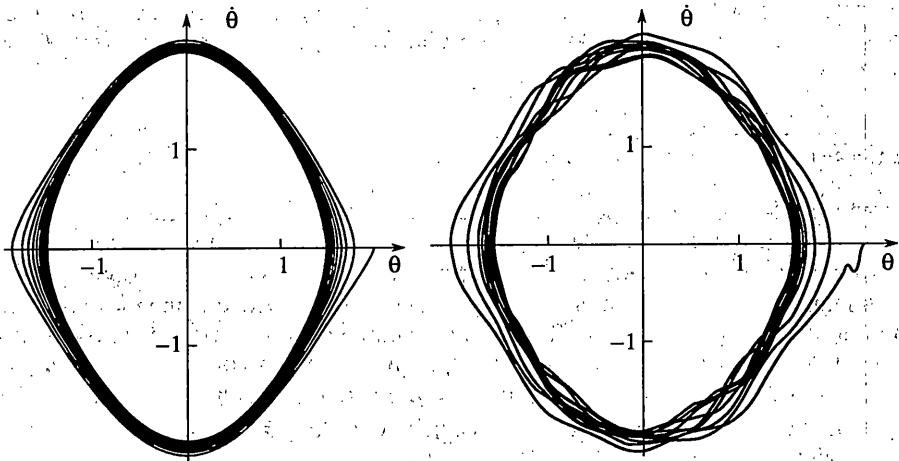
$$i + \cos(\psi + \Omega \tau) \sin \tau(\psi + \Omega) + \sin(\psi + \Omega \tau) \cos \tau + r i = 0$$

Здесь в отличие от (1.3) уже учтена механическая диссипация. Физически ψ задает отклонение траекторий движения маятника от вращения с постоянной угловой скоростью Ωv . Полагая скорость изменения ψ малой, уравнения (1.11) можно переписать в следующем виде:

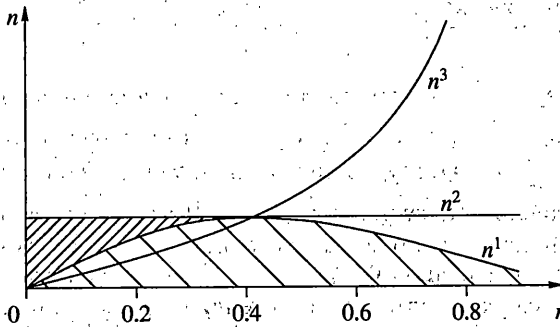
$$\dot{\psi} = \varepsilon \omega$$

$$\dot{\omega} = \varepsilon \gamma i \cos(\psi + \Omega \tau) \sin \tau - \varepsilon \sin(\psi + \Omega \tau) - \varepsilon n(\psi + \Omega) \quad (1.12)$$

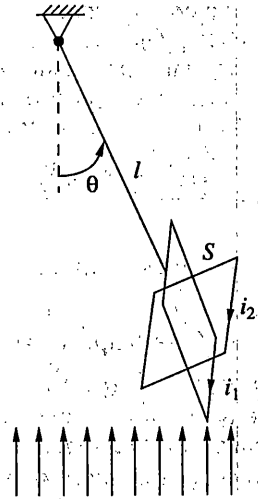
$$i + (\psi + \Omega) \cos(\psi + \Omega \tau) \sin \tau + \sin(\psi + \Omega \tau) \cos \tau + r i = 0$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Так же как и в случае медленных колебаний, система (1.12) содержит две медленных переменных и одну некритическую быструю. Используя ту же процедуру, что и ранее, найдем первое приближение для тока

$$\begin{aligned}
 i_0 = & -\frac{1-\Omega}{2((1-\Omega)^2+r^2)}(((1-\Omega)\sin\psi-r\cos\psi)\sin(1-\Omega)\tau + \\
 & + (r\sin\psi+(1-\Omega)\cos\psi)\cos(1-\Omega)\tau) - \\
 & -\frac{1+\Omega}{2((1+\Omega)^2+r^2)}(((1+\Omega)\sin\psi+r\cos\psi)\sin(1+\Omega)\tau + \\
 & + (r\sin\psi-(1+\Omega)\cos\psi)\cos(1+\Omega)\tau)
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Подставив (1.13) в первые два уравнения системы (1.12) и усреднив полученные выражения по времени, приходим к уравнению первого приближения для ψ :

$$\ddot{\psi} - \varepsilon^2 \frac{\gamma r}{8} \left(\frac{1-\Omega}{(1-\Omega)^2+r^2} - \frac{1+\Omega}{(1+\Omega)^2+r^2} \right) + \varepsilon^2 n\Omega = 0 \quad (1.14)$$

Решениям системы (1.12) близким к равномерным вращениям отвечает решение $\psi = \text{const}$ усредненного уравнения. Такое решение существует, если для Ω выполняется условие

$$\frac{\gamma r}{8} \left(\frac{1 - \Omega}{(1 - \Omega)^2 + r^2} - \frac{1 + \Omega}{(1 + \Omega)^2 + r^2} \right) - n\Omega = 0 \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) задает зависимость частоты вращения маятника от параметров системы γ , r , n . Очевидно, что Ω не может быть больше единицы, так как тогда не существует решений уравнения (1.15) ни при каких соотношениях между r , γ и n . Следовательно, частота стационарных вращений маятника не может превосходить частоту осцилляций магнитного поля. Для исследования устойчивости стационарных вращений необходимо рассматривать второе приближение, так как оно внесет в уравнение (1.14) дополнительное слагаемое, пропорциональное ψ . Однако в данном случае, как будет показано ниже, об устойчивости вращений можно судить из качественных соображений.

Алгебраическое уравнение (1.15) можно представить в виде равенства нулю полинома пятой степени относительно Ω , не содержащего свободного члена. Оно при любых параметрах имеет корень $\Omega = 0$. Это решение является посторонним, так как при $\Omega = 0$ нарушается сама процедура получения уравнения (1.14): По существу этому корню отвечают движения в виде медленных колебаний, найденные ранее.

Для определения возможных частот стационарных вращений маятника получается биквадратное уравнение, корни которого

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{-(r\gamma - 8n + 8nr^2) \pm \sqrt{r^2\gamma^2 - 256n^2r^2}}{8n} \quad (1.16)$$

Для удобства дальнейшей записи введем следующие обозначения: $n^{(1)} = \frac{1}{4}\gamma r(1 - r^2)/(1 + r^2)^2$, $n^{(2)} = \gamma/16$, $n^{(3)} = \frac{1}{8}\gamma r/(1 - r^2)$. При анализе выражения (1.16) видно, что $\Omega \rightarrow 0$ при значениях $n \rightarrow n^{(1)}$. Нетрудно получить, что при $n^{(2)} < n$, а также при $n^{(1)} < n < n^{(3)}$ ($r > \sqrt{2} - 1$) вращений не существует, при $n^{(1)} > n$ существуют два вращения с частотами равными по модулю и разными по знаку, что отвечает вращениям в противоположных направлениях. Так как при $n^{(1)} > n$ медленные движения маятниковой системы являются уходящими от положения равновесия и автоколебаний не возникает, то полученные вращения должны быть устойчивы. При выполнении условия $n^{(1)} < n < n^{(2)}$ ($r < \sqrt{2} - 1$) система допускает четыре вращения. В фазовом пространстве траектории этих вращений располагаются симметрично относительно оси $\theta = 0$. В области, задаваемой этими параметрами, медленные движения системы являются устойчивыми, т.е. существуют предельные циклы или устойчивые положения равновесия, к которым стремятся все медленные движения. Таким образом, вращения с меньшими по модулю угловыми скоростями будут неустойчивы, а с большими – устойчивы. Области параметров на плоскости r , n , в которых существуют качественно различные типы движений показаны на фиг. 5.

Численные исследования интеграла (1.10) показали, что значения $n = n_2(r, \gamma)$, при которых медленные движения становятся уходящими (пропадает предельный цикл около положения равновесия $\theta = 0$) практически совпадают с $n = n^{(1)}$. Таким образом, переход от четырех вращений к двум происходит путем слияния неустойчивого вращения и предельного цикла около $\theta = 0$ с соответствующей сепаратрисой.

В результате можно заключить, что маятник, содержащий один проводящий контур, в зависимости от соотношения параметров и начальных условий имеет движения, либо сходящиеся к одному из положений равновесия $\theta = 0, \pi$, либо к предельным циклам около этих положений равновесия, что соответствует его автоколебаниям,

либо к вращениям в ту или другую сторону с частотой, меньшей частоты внешнего магнитного поля.

2. Маятник с двумя проводящими контурами. Рассмотрим движения двухконтурного маятника в однородном переменном магнитном поле (фиг. 6). Такого типа системы могут служить моделью симметричного относительно подвеса проводящего твердого тела, например, шара. Как показано в [2], равновесие маятника с подвешенным проводящим шаром в однородном высокочастотном поле неустойчиво. Этот вывод основан в [2] на анализе линеаризованной задачи, поэтому вопрос об автоколебаниях остается открытым. Используя двухконтурную аппроксимацию, удастся полностью исследовать возможные движения симметричного твердого тела в магнитном поле.

Пусть, как и ранее, угол отклонения маятника от вертикальной оси обозначается θ и $\theta = 0$ соответствует его нижнему положению. Примем, что по одному из контуров течет ток i_1 , а по другому — i_2 . Уравнения Лагранжа — Максвелла для такой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} - B_0 S \cos \theta \sin(\nu t) i_1 + B_0 S \sin \theta \sin(\nu t) i_2 + mgl \sin \theta &= 0 \\ L_1 \dot{i}_1 + B_0 S \cos \theta \sin(\nu t) \dot{\theta} + B_0 S \sin \theta \cos(\nu t) \nu + R_1 i_1 &= 0 \\ L_2 \dot{i}_2 - B_0 S \sin \theta \sin(\nu t) \dot{\theta} + B_0 S \cos \theta \cos(\nu t) \nu + R_2 i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $L_{1,2}$ — коэффициенты самоиндукции контуров токов $i_{1,2}$ соответственно; остальные обозначения имеют тот же смысл, что и ранее. Переходя к быстрому времени и вводя безразмерные величины аналогично тому, как это было сделано в случае одноконтурного маятника, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \varepsilon^2 \gamma_1 i_1 \cos \theta \sin \tau + \varepsilon^2 \gamma_2 i_2 \sin \theta \sin \tau + \varepsilon^2 \sin \theta &= 0 \\ \dot{i}_1 + \cos \theta \sin \tau \dot{\theta} + \sin \theta \cos \tau + r_1 i_1 &= 0 \\ \dot{i}_2 - \sin \theta \sin \tau \dot{\theta} + \cos \theta \cos \tau + r_2 i_2 &= 0 \\ \gamma_{1,2} = \frac{(B_0 S)^2}{L_{1,2} mgl}, \quad r_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{L_{1,2} \nu} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $R_{1,2}$ — активные сопротивления контуров токов i_1 и i_2 соответственно. При отыскании медленных движений системы, описываемой уравнениями (2.2), перепишем их в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \varepsilon \omega \\ \dot{\omega} = \varepsilon \gamma_1 i_1 \cos \theta \sin \tau - \varepsilon \gamma_2 i_2 \sin \theta \sin \tau - \varepsilon \sin \theta &= 0 \\ \dot{i}_1 + r_1 i_1 &= -\varepsilon \omega \cos \theta \sin \tau - \sin \theta \cos \tau \\ \dot{i}_2 + r_2 i_2 &= \varepsilon \omega \sin \theta \sin \tau - \cos \theta \cos \tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этой системе уравнений присутствуют две медленных и две быстрых переменных. Для нахождения второго приближения выражения для токов разыскиваются в виде

$$i_k = i_{0k}(\theta, \omega, \tau) + \varepsilon i_{1k}(\theta, \omega, \tau) \quad (k = 1, 2)$$

Из двух последних уравнений (2.3) получим

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{\sin \theta}{1 + r_1^2} (\sin \tau + r_1 \cos \tau) + \varepsilon \frac{\omega r_1 \cos \theta}{(1 + r_1^2)^2} ((1 - r_1^2) \sin \tau + 2r_1 \cos \tau) \\ i_2 &= -\frac{\cos \theta}{1 + r_2^2} (\sin \tau + r_2 \cos \tau) + \varepsilon \frac{\omega r_2 \sin \theta}{(1 + r_2^2)^2} ((r_2^2 - 1) \sin \tau - 2r_2 \cos \tau) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя полученные зависимости в первые два уравнения (2.2) и усредняя их по времени, приходим к уравнению медленных движений маятника, записанному в медленном времени $t' = kt$:

$$\ddot{\theta} - \varepsilon \left(\frac{\gamma_2 r_2 (1 - r_2^2)}{2(1 + r_2^2)^2} \sin^2 \theta + \frac{\gamma_1 r_1 (1 - r_1^2)}{2(1 + r_1^2)^2} \cos^2 \theta \right) \dot{\theta} + \left(\left(\frac{\gamma_1}{1 + r_1^2} - \frac{\gamma_2}{1 + r_2^2} \right) \frac{\cos \theta}{2} + 1 \right) \sin \theta = 0 \quad (2.5)$$

Если маятник содержит два одинаковых проводящих контура, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $r_1 = r_2 = r$ и уравнение (2.5) принимает вид

$$\ddot{\theta} - \varepsilon \frac{\gamma r (1 - r^2)}{2(1 + r^2)^2} \dot{\theta} + \sin \theta = 0 \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что в первом приближении медленные движения рассматриваемой системы описываются уравнением физического маятника. Во втором приближении электромагнитные силы вносят диссипацию при $r > 1$, а при $r < 1$ являются "раскачивающими", что соответствует случаю одноконтурного маятника. Если в системе присутствует механическое трение, а электромагнитные силы раскачивающие, то положение равновесия $\theta = 0$ будет устойчивым при $n > 2n^{(1)} = \alpha$. Так как средние электромагнитные силы не зависят от обобщенной координаты — угла отклонения маятника от вертикальной оси, то автоколебания в системе, содержащей два перпендикулярно расположенных одинаковых контура токов, невозможны.

Для того, чтобы найти стационарные вращения маятника, введем в рассмотрение переменную $\psi = \theta - \Omega t$, которая отвечает отклонению движения маятника от равномерного вращения. Относительно новой переменной уравнения (2.2) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} - \varepsilon^2 \gamma_1 i_1 \cos(\psi + \Omega t) \sin \tau + \varepsilon^2 \gamma_2 i_2 \sin(\psi + \Omega t) \sin \tau + \varepsilon^2 \sin(\psi + \Omega t) &= 0 \\ i_1 + (\dot{\psi} + \Omega) \cos(\psi + \Omega t) \sin \tau + \sin(\psi + \Omega t) \cos \tau + r_1 i_1 &= 0 \\ i_2 - (\dot{\psi} + \Omega) \sin(\psi + \Omega t) \sin \tau + \cos(\psi + \Omega t) \cos \tau + r_2 i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Считая, что ψ медленно меняющаяся величина, (2.7) можно свести к системе четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \varepsilon \omega \\ \dot{\omega} &= \varepsilon \gamma_1 i_1 \cos(\psi + \Omega t) \sin \tau - \varepsilon \gamma_2 i_2 \sin(\psi + \Omega t) \sin \tau - \varepsilon \sin(\psi + \Omega t) - \varepsilon n(\varepsilon \omega + \Omega) \\ i_1 + (\dot{\psi} + \Omega) \cos(\psi + \Omega t) \sin \tau + \sin(\psi + \Omega t) \cos \tau + r_1 i_1 &= 0 \\ i_2 - (\dot{\psi} + \Omega) \sin(\psi + \Omega t) \sin \tau + \cos(\psi + \Omega t) \cos \tau + r_2 i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя, как и ранее, метод малого параметра и рассматривая только первое приближение для токов, найдем

$$\begin{aligned} i_{10} &= -\frac{1 - \Omega}{2((1 - \Omega)^2 + r_1^2)} ((1 - \Omega) \sin \psi - r_1 \cos \psi) \sin(1 - \Omega)\tau + \\ &+ (r_1 \sin \psi + (1 - \Omega) \cos \psi) \cos(1 - \Omega)\tau - \frac{1 + \Omega}{2((1 + \Omega)^2 + r_1^2)} ((1 + \Omega) \sin \psi + \\ &+ r_1 \cos \psi) \sin(1 + \Omega)\tau + (r_1 \sin \psi - (1 + \Omega) \cos \psi) \cos(1 + \Omega)\tau \\ i_{20} &= -\frac{1 - \Omega}{2((1 - \Omega)^2 + r_2^2)} ((1 - \Omega) \cos \psi + r_2 \sin \psi) \sin(1 - \Omega)\tau + \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$+ (r_2 \cos \psi - (1 - \Omega) \sin \psi) \cos(1 - \Omega)\tau - \frac{1 + \Omega}{2((1 + \Omega)^2 + r_2^2)} ((1 + \Omega) \cos \psi - r_2 \sin \psi) \sin(1 + \Omega)\tau + (r_2 \cos \psi + (1 + \Omega) \sin \psi) \cos(1 + \Omega)\tau$$

Подставляя (2.9) в первые два уравнения (2.8) и осредняя их по времени, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\Psi} - \frac{\varepsilon^2 \gamma_1 r_1}{8} \Phi(\Omega, r_1) - \frac{\varepsilon^2 \gamma_2 r_2}{8} \Phi(\Omega, r_2) + \varepsilon^2 n \Omega = 0$$

$$\Phi(\Omega, r) = \left(\frac{1 - \Omega}{(1 - \Omega)^2 + r^2} - \frac{1 + \Omega}{(1 + \Omega)^2 + r^2} \right) \quad (2.10)$$

$\Psi = \text{const}$ является его решением, если выполнено условие:

$$1/8 \gamma_1 r_1 \Phi(\Omega, r_1) + 1/8 \gamma_2 r_2 \Phi(\Omega, r_2) - n \Omega = 0 \quad (2.11)$$

Это соотношение задает зависимость между частотой вращения маятника и его параметрами. Для маятника, проводящие контуры которого одинаковы, оно приобретает вид:

$$1/4 \gamma r \Phi(\Omega, r) - n \Omega = 0 \quad (2.12)$$

что с точностью до коэффициента совпадает с (1.15). При исследовании этого уравнения оказывается, что при $n < 2n^{(1)}$ маятниковая система, состоящая из двух одинаковых проводящих контуров, имеет два стационарных противоположных по направлению вращательных движения, которые будут устойчивыми, так как медленные движения при таком соотношении между параметрами являются неустойчивыми. При $2n^{(2)} < n$, а также при $2n^{(1)} < n < 2n^{(3)}$ ($r > \sqrt{2} - 1$), вращений не существует.

В области, где выполняется условие: $2n^{(1)} < n < 2n^{(2)}$ ($r < \sqrt{2} - 1$) имеются четыре вращения, два из которых – устойчивы (с большими по модулю частотами), а два с меньшими частотами – неустойчивы.

3. Плоские колебания проводящего шара. Согласно [2] уравнение плоских колебаний вокруг горизонтальной оси проводящего твердого тела сферической формы, находящегося в высокочастотном переменном однородном магнитном поле, записывается в виде:

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\pi}} \sin \nu t \int_0^t \frac{\sin(\theta(\tau) - \theta(t)) \sin \nu \tau d\tau}{\sqrt{t - \tau}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{3\varepsilon H^2 a^2}{2I} \quad (3.1)$$

где θ – угол отклонения шара от вертикальной оси, Ω – собственная частота малых колебаний шара, H – амплитуда напряженности магнитного поля, ν – частота осцилляции поля, a – радиус шара, I – момент инерции шара относительно оси подвеса, ε – малый параметр. Как показано в [2], положение равновесия $\theta = 0$ является неустойчивым при любых параметрах. Таким образом, представляет интерес исследование возможности существования автоколебаний с учетом нелинейности при наличии в системе механического трения. Перепишем уравнение (3.1) в следующей форме:

$$\ddot{\theta} + \varepsilon_1 n \dot{\theta} + \sin \theta = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\pi} \Omega^2} \sin(\nu t_1 / \Omega) \int_0^{t_1 / \Omega} \frac{\sin(\theta(\tau) - \theta(t_1 / \Omega)) \sin \nu \tau d\tau}{\sqrt{t_1 / \Omega - \tau}}, \quad (3.2)$$

Здесь сделана замена: $t = t_1 / \Omega$. Уравнение (3.2) квазиконсервативное, поэтому параметры, при которых существуют предельные циклы, могут быть найдены методом малого параметра. Значение полной энергии маятника h , которому соответствует

замкнутая траектория квазиконсервативной системы (3.2), можно найти приравняв к нулю функцию Понтрягина

$$I(\alpha) = \int_0^{4K(k)} \left[\frac{\sin vt_1 / \Omega}{\sqrt{\pi\Omega^2}} \int_0^{t_1/\Omega} \frac{\sin(\theta(\tau) - \theta(t_1/\Omega)) \sin v\tau d\tau}{\sqrt{t_1/\Omega - \tau}} - n\theta(t_1) \right] \theta(t_1) dt_1$$

$$\theta(t) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(u, k)), \quad \theta = \sqrt{2(\cos \theta(t) - \cos \alpha)} \quad (3.3)$$

где $h = 2 \cos \alpha$, α – амплитуда колебаний, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, sn – эллиптический синус, $k = \sin(\alpha/2)$, $u = t - K(k)$. Условие существования замкнутой фазовой траектории, отвечающей колебаниям с амплитудой α : $I(\alpha) = 0$. Вычисление корней функции $I(\alpha)$ при варьировании параметров n , v , Ω достаточно сложно, поэтому можно поступить иначе, задав уровень энергии h или амплитуду α , искать те соотношения параметров $n_*(v)$, ($\Omega = \text{const}$), при которых интеграл (3.3) обратится в нуль.

Как показали вычисления, соответствующие зависимости $n_*(v)$ при разных значениях $\alpha \in (0, \pi)$ практически совпадают (фиг. 7), что свидетельствует об отсутствии изолированной траектории, т.е. при $n = n_*(v)$ консервативность системы не нарушается. Соответственно, при $n > n_*(v)$ все траектории будут скручиваться и положение равновесия $\theta = 0$ будет асимптотически устойчиво, а при $n < n_*(v)$ – неустойчиво.

Этот результат качественно соответствует случаю двухконтурного маятника, рассмотренному в п. 2. С другой стороны остаются необъясненными эксперименты Бетено и Дубошинского, в которых наблюдались стационарные колебания маятника конечной амплитуды.

Существенным отличием физических экспериментов от рассмотренной модели является неоднородность магнитного поля, относительно которого происходят колебания маятника. В указанных экспериментах поле создается катушкой с переменным током, ось которой совпадает с вертикальным положением маятника. Поле, создаваемое катушкой, достаточно быстро убывает при отклонении от оси соленоида, поэтому представляет интерес более общая модель маятниковой системы с учетом неоднородности магнитного поля.

4. Движения маятника в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим медленные движения маятника, содержащего два одинаковых ортогональных друг другу проводящих контура, в неоднородном переменном магнитном поле. Считаем, что амплитуда поля зависит только от угла отклонения маятника от вертикали $B = B_0\Phi(\theta)$, где $\Phi(0) = 1$, $\Phi_\theta = d\Phi/d\theta < 0$, $\theta \in (0, \pi)$. Не оговаривая пока конкретной зависимости $\Phi(\theta)$, запишем уравнения Лагранжа – Максвелла маятниковой системы

$$I\ddot{\theta} - B_0 S i_1 (\Phi_\theta \sin \theta + \Phi \cos \theta) \sin vt - B_0 S i_2 (\Phi_\theta \cos \theta + \Phi \sin \theta) \sin vt + mg l \sin \theta = 0$$

$$L \dot{i}_1 + B_0 S \Phi_\theta \sin \theta \sin vt + B_0 S \Phi \cos \theta \sin vt + B_0 S \Phi \sin \theta \cos vt + R i_1 = 0$$

$$L \dot{i}_2 + B_0 S \Phi_\theta \cos \theta \sin vt - B_0 S \Phi \sin \theta \sin vt + B_0 S \Phi \cos \theta \cos vt + R i_2 = 0 \quad (4.1)$$

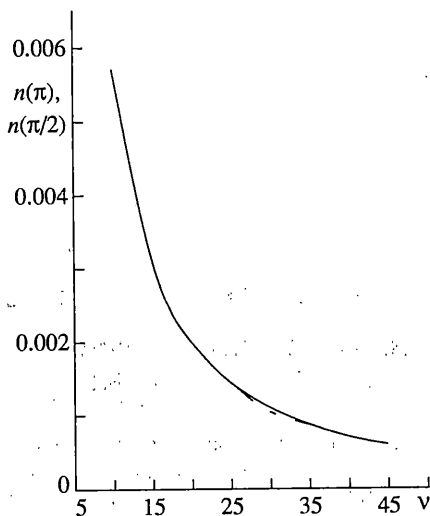
После введения безразмерных переменных и малого параметра аналогично тому как это было сделано в п. 2 приходим к уравнениям медленных движений

$$\ddot{\theta} = \varepsilon \omega$$

$$\dot{\omega} = \varepsilon \gamma_1 (\Phi_\theta \sin \theta + \Phi \cos \theta) \sin \tau + \varepsilon \gamma_2 (\Phi_\theta \cos \theta + \Phi \sin \theta) \sin \tau - \varepsilon \sin \theta$$

$$\dot{i}_1 + (\Phi_\theta \sin \theta + \Phi \cos \theta) \sin \tau + \Phi \sin \theta \cos \tau + r i_1 = 0$$

$$\dot{i}_2 + (\Phi_\theta \cos \theta - \Phi \sin \theta) \sin \tau + \Phi \cos \theta \cos \tau + r i_2 = 0$$



Фиг. 7

Уравнения (4.2) сходны по структуре с системой (2.3), поэтому не останавливаясь на описании асимптотической процедуры, приведем окончательное уравнение медленных движений маятника во втором приближении

$$\ddot{\theta} + \varepsilon \frac{\gamma r(r^2 - 1)}{2(1+r^2)^2} (\Phi^2 + \Phi_\theta^2) \dot{\theta} + \sin \theta + \frac{\gamma}{2(1+r^2)} \Phi \Phi_\theta = 0 \quad (4.3)$$

Характер медленных движений определяется конкретной зависимостью $\Phi(\theta)$. В качестве примера рассмотрим случай гиперболического убывания магнитного поля $\Phi(\theta) = (a/l + 1 - \cos \theta)^{-1}$. Здесь a — расстояние от источника поля до центра масс маятника в нижнем положении. Уравнение медленных движений рассматриваемой электромеханической системы с учетом механической диссипации запишется следующим образом:

$$\ddot{\theta} + \varepsilon \left(n - \alpha \frac{\kappa^2 - 2\kappa \cos \theta + 1}{(\kappa - \cos \theta)^4} \right) \dot{\theta} + \sin \theta \left(1 - \frac{\beta}{(\kappa - \cos \theta)^3} \right) = 0 \quad (4.4)$$

где α и β имеют то же значение, что и п. 1, а $\kappa = a/l + 1$. При $\beta < (a/l)^3$ маятник имеет только два положения равновесия $\theta = 0, \pi$. Вертикальное положение $\theta = \pi$ неустойчиво (седло), нижнее положение при $n > \alpha l^2/a^2$ устойчиво (устойчивый фокус), при $n = \alpha l^2/a^2$ и $\alpha > 2l$ оно становится сложным устойчивым фокусом, и при дальнейшем уменьшении n происходит мягкое рождение предельного цикла. При $n = \alpha l^2/a^2$ и $\alpha < 2l$ сложный фокус неустойчив, что соответствует жесткому возникновению автоколебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ходжаев К.Ш., Шаталов С.Д. О медленных движениях проводящего твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 175–181.
2. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
15.03.1999