МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2001

УДК 531.53

© 2001 г. А.П. МАРКЕЕВ, С.В. МЕДВЕДЕВ, Д.А. СУХОРУЧКИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, ПОДВЕШЕННОЙ НА УПРУГОЙ НИТИ

Исследуется плоское движение материальной точки, подвешенной на нити. Движение происходит в однородном поле тяжести. Нить предполагается невесомой, абсолютно гибкой, растяжимой и упругой. Решена задача об орбитальной устойчивости вертикальных периодических колебаний точки произвольной амплитуды.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Пусть материальная точка P закреплена на одном из концов невесомой абсолютно гибкой нити, другой конец которой прикреплен к неподвижной точке O (фиг. 1). Нить предполагается растяжимой и упругой, сила упругости подчиняется закону Гука. Движение происходит в однородном поле тяжести в фиксированной вертикальной плоскости Oxy (на фиг. 1 ось Ox направлена вертикально вниз).

Пусть l_0 – длина нерастянутой нити, k – ее жесткость, m – масса точки P, g – ускорение свободного падения. Положение точки задается координатами x, y.

Если $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant l_0$, то нить не напряжена и, следовательно, не оказывает влияния на движение точки P. Точка движется только под действием силы тяжести по параболе, лежащей в плоскости Oxy. Если же $r > l_0$, то нить напряжена, и точка P движется под влиянием силы тяжести и силы упругости нити.

Для функции Гамильтона имеем следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \Pi \tag{1.1}$$

$$\Pi = \begin{cases} -mgx, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant l_0 \\ -mgx + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)^2, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} > l_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$; точкой обозначается дифференцирование по времени t.

Точка P может находиться в положении равновесия на оси Ox. В этом положении нить напряжена и ее длина равняется l, причем

$$l = l_0 + mg/k = l_0/(1 - \mu^2), \quad \mu = \sqrt{mg/(kl)} \quad (0 \leqslant \mu < 1) \tag{1.3}$$

Существует также такое, отличное от равновесия, периодическое движение, когда точка P все время остается на вертикали Ox. Пусть в этом движении точка подскакивает при ослабленной нити над положением $x = l_0$ на высоту h. Считаем, что $h < l_0$, т.е. точка P не соударяется с точкой подвеса O. В дальнейшем высоту подскока точки над ее положением, отвечающим нерастянутой нити, будем характеризовать при помощи безразмерного параметра ν, определяемого формулой

$$\nu = h / l_0 \quad (0 \leqslant \nu < 1) \tag{1.4}$$

Упомянутое периодическое движение материальной точки вдоль вертикали принимаем за невозмущенное. Цель данной работы состоит в исследовании его орбитальной устойчивости.

Отметим, что устойчивость вертикального периодического движения материальной точки, подвешенной на нерастяжимой нити или на невесомой пружине, исследована ранее [1, 2].

Опишем невозмущенное движение более подробно. На нем $y \equiv 0$, а движение вдоль вертикальной оси Ox описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом вида

$$H^{(0)} = \frac{1}{2m} p_x^2 + \Pi^{(0)} \tag{1.5}$$

$$\Pi^{(0)} = \begin{cases} -mgx, & \text{если } 0 < x \leqslant l_0 \\ -mgx + \frac{1}{2} k(x - l_0)^2, & \text{если } x > l_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

На невозмущенном движении имеет место интеграл энергии $H^{(0)} = -mg(l_0 - h)$. Отсюда и из (1.5), (1.6) можно получить уравнение невозмущенной фазовой траектории в плоскости x, p_x. При $x \leqslant l_0$ эта траектория представляет собой участок параболы

$$x = l_0 - h + p_x^2 / (2m^2 g) \tag{1.7}$$

а при $x > l_0$ – участок эллипса

$$(x - l)^2 / a^2 + p_x^2 / b^2 = 1 \tag{1.8}$$

$$a = \mu\sqrt{\mu^2 + 2\nu(1 - \mu^2)}\, l, \quad b = \sqrt{\mu^2 + 2\nu(1 - \mu^2)}\, m\sqrt{gl}$$

Невозмущенная фазовая траектория показана на фиг. 2, где дуга ABC – участок параболы (1.7), а дуга CDA – участок эллипса (1.8). Дуга ABC соответствует движению точки P вдоль вертикали при ослабленной нити: вверх от $x = l_0$ до $x = l_0 - h$ и обратно вниз от $x = l_0 - h$ до $x = l_0$; время движения t_1 вычисляется по формуле

$$t_1 = 2\sqrt{2h / g} \tag{1.9}$$

Дуга CDA отвечает вертикальному движению точки P при напряженной нити: вниз от $x = l_0$ до $x = l + a$ и обратно вверх от $x = l + a$ до $x = l_0$; для времени движения t_2 имеем выражение

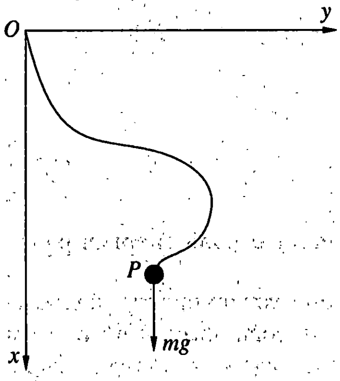
$$t_2 = \frac{\pi}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\sqrt{2\nu(1 - \mu^2)}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.10}$$

Период невозмущенного движения равен $t_1 + t_2$.

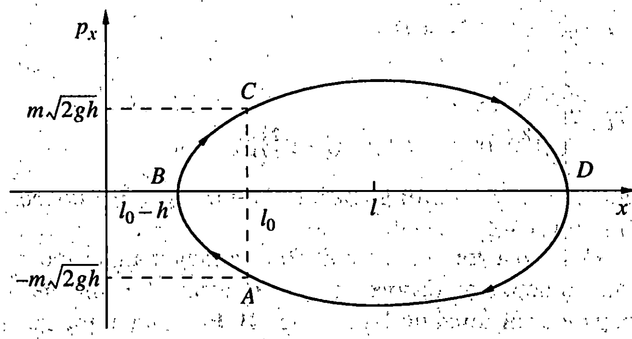
В гамильтониане (1.1) перейдем к безразмерным координатам и импульсам Q_i, P_i $(i = 1, 2)$ по формулам

$$x = lQ_1, \quad y = lQ_2, \quad p_x = ml\sigma P_1, \quad p_y = ml\sigma P_2 \tag{1.11}$$

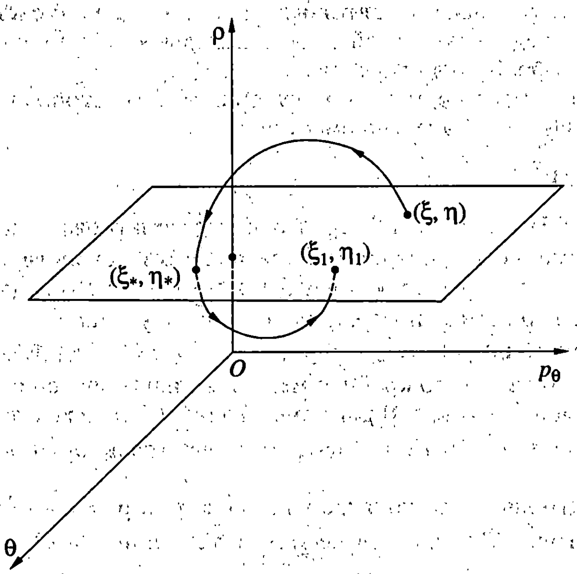
Эта замена переменных является канонической с валентностью, равной $1/(ml^2\sigma)$ [3]. Если еще вместо t ввести безразмерное время $\tau = \sigma t$, то новый гамильтониан будет равен умноженной на коэффициент $1/(ml^2\sigma^2)$ функции (1.1), в которой сделана замена



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

(1.11). В результате получим

$$H = \tfrac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + \Pi \tag{1.12}$$

$$\Pi = \begin{cases} -\mu^2 Q_1, & \text{если } \sqrt{Q_1^2+Q_2^2} \leqslant 1-\mu^2 \\ -\mu^2 Q_1 + 1/2[\sqrt{Q_1^2+Q_2^2} - (1-\mu^2)]^2, & \text{если } \sqrt{Q_1^2+Q_2^2} > 1-\mu^2 \end{cases} \tag{1.13}$$

Для дальнейшего удобно перейти к полярным координатам. С этой целью сделаем замену переменных по формулам

$$Q_1 = \rho\cos\theta, \quad Q_2 = \rho\sin\theta \tag{1.14}$$

$$P_1 = p_\rho \cos\theta - \frac{\sin\theta}{\rho} p_\theta, \quad P_2 = p_\rho \sin\theta + \frac{\cos\theta}{\rho} p_\theta$$

Эти формулы задают унивалентное каноническое преобразование Q_1, Q_2, P_1, $P_2 \to \theta$,

ρ, p_θ, p_ρ. Новая функция Гамильтона имеет вид

$$H = \tfrac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2}\right) + \Pi \tag{1.15}$$

$$\Pi = \begin{cases} -\mu^2\rho\cos\theta, & \text{если } \rho \leqslant 1-\mu^2 \\ -\mu^2\rho\cos\theta + 1/2[\rho-(1-\mu^2)]^2, & \text{если } \rho > 1-\mu^2 \end{cases} \tag{1.16}$$

На невозмущенном движении $\theta \equiv 0$, $p_\theta \equiv 0$, а постоянная интеграла энергии равна $\mu^2(1-\mu^2)(\nu-1)$.

2. О методе исследования. При исследовании орбитальной устойчивости невозмущенного периодического движения точки P вдоль вертикали воспользуемся методом поверхностей сечения Пуанкаре [4]. Возмущенное движение будем рассматривать на том же уровне энергии, что и само невозмущенное движение. Метод поверхностей сечения Пуанкаре позволяет свести задачу об изоэнергетической орбитальной устойчивости периодического движения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы к исследованию устойчивости неподвижной точки некоторого сохраняющего площадь отображения плоскости в себя.

Опишем в общих чертах процедуру получения такого отображения в изучаемой конкретной задаче. Интеграл энергии имеет вид

$$H(\theta,\ \rho,\ p_\theta,\ p_\rho) = \mu^2(1-\mu^2)(\nu-1) \tag{2.1}$$

где H – функция (1.15). Величины θ, p_θ, ρ будем рассматривать как прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, задаваемом равенством (2.1). Невозмущенному движению отвечают точки оси $O\rho(\rho > 0)$. Плоскость $\rho = 1 - \mu^2$ в этом пространстве (фиг. 3) примем за поверхность сечения Пуанкаре.

Пусть при $\tau = 0$ имеем $\rho = 1-\mu^2$, $\theta = \xi$, $p_\theta = \eta$ ($|\xi| \ll 1$, $|\eta| \ll 1$), а $p_\rho > 0$ (точка P падает вниз). Тогда при $\tau > 0$ (по крайней мере для малых значений величины τ) нить напряжена и до момента $\tau = \tau_* > 0$ движение точки P происходит при напряженной нити. Этому этапу движения отвечает на фиг. 3 дуга траектории, лежащая над плоскостью $\rho = 1-\mu^2$.

При $\tau = \tau_*$ траектория снова попадает на плоскость $\rho = 1 - \mu^2$, при этом $\theta = \xi_*$, $p_\theta = \eta_*$, а $p_\rho < 0$ (точка P движется вверх). Затем, при $\tau > \tau_*$, движение точки P происходит при ослабленной нити. Но только до момента $\tau = \tau_1$, где τ_1 – наименьшее значение τ, большее τ_*, когда траектория, отвечающая свободному полету точки P при ослабленной нити, вновь попадает на плоскость $\rho = 1 - \mu^2$. Свободному полету отвечает дуга траектории, лежащая на фиг. 3 под плоскостью $\rho = 1 - \mu^2$. При $\tau = \tau_1$ имеем $\theta = \xi_1$, $p_\theta = \eta_1$.

Величины ξ_1, η_1 будут аналитическими функциями от ξ, η. Эти функции задают искомое отображение плоскости $\rho = 1 - \mu^2$ в себя. Точка $\xi = \eta = 0$ этой плоскости будет неподвижной точкой отображения, она соответствует исследуемому невозмущенному периодическому движению точки P вдоль вертикали. Задачи об орбитальной устойчивости этого движения эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки отображения. Функции ξ_1, η_1, задающие отображение, будут в дальнейшем находиться в виде рядов по степеням ξ, η. Коэффициенты рядов зависят от двух безразмерных параметров μ, ν, определяемых равенствами (1.3) и (1.4).

Упомянутое отображение ξ, $\eta \to \xi_1$, η_1 сохраняет площадь, так как на изоэнергетическом уровне (2.1) уравнения движения точки P можно записать в виде уравнений Уиттекера [3]. Эти уравнения имеют форму уравнений Гамильтона с независимой переменной ρ; роль гамильтониана играет функция $-p_\rho(\theta, p_\theta, \rho; \mu, \nu)$, где p_ρ – корень уравнения (2.1). Свойство отображения сохранять площадь следует из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема.

Отображение $\xi, \eta \to \xi_1, \eta_1$ будет ниже получено в виде композиции двух отображений: $\xi, \ \eta \to \xi_*, \ \eta_*$ и $\xi_*, \ \eta_* \to \xi_1, \ \eta_1$. Первое отображение будет получено путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения, определяемых функцией Гамильтона (1.15); при этом будет учитываться интеграл (2.1), величина Π – из второй строки формулы (1.16). Построение второго отображения не требует численного интегрирования дифференциальных уравнений движения, так как при ослабленной нити движение точки P известно: она движется по параболе в однородном поле тяжести.

После получения отображения $\xi, \eta \to \xi_1, \eta_1$ вопрос об устойчивости неподвижной точки $\xi = \eta = 0$ можно решить при помощи результатов статьи [5], где условия устойчивости и неустойчивости выписаны в виде неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты разложений функций ξ_1, η_1 в ряды по степеням ξ, η.

3. Алгоритм построения отображения $\xi, \ \eta \to \xi_*, \ \eta_*$. *3.1. Дифференциальные уравнения для коэффициентов разложения решений уравнений движения в ряды.* Рассмотрим этап движения точки P, происходящий при напряженной нити. Ему отвечает гамильтониан (1.15), в котором функция Π задается второй строкой формулы (1.16). При малых $|\theta|$, $|p_\theta|$ уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{\rho^2} p_\theta, \quad \frac{dp_\theta}{d\tau} = -\mu^2\rho\theta + \frac{1}{6}\mu^2\rho\theta^3 + O_4 \\
&\frac{d\rho}{d\tau} = p_\rho, \quad \frac{dp_\rho}{d\tau} = 1 - \rho - \frac{1}{2}\mu^2\theta^2 + \frac{1}{\rho^3} p_\theta^2 + O_4
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь и в дальнейшем символом O_4 обозначается совокупность слагаемых не ниже четвертой степени относительно величин θ, p_θ.

Принимая во внимание интеграл (2.1), получаем в соответствии с алгоритмом п. 2, следующие начальные, при $\tau = 0$, условия для системы (3.1):

$$\begin{aligned}
&\theta = \xi, \quad p_\theta = \eta \\
&\rho = 1 - \mu^2, \quad p_\rho = \alpha_{00} - \alpha_{20}\xi^2 - \alpha_{02}\eta^2 + O_4
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{00} = \mu\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}, \quad \alpha_{20} = \mu/2\sqrt{(1-\mu^2)/(2\nu)} \\
&\alpha_{02} = 1/[2\mu(1-\mu^2)^2\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Рассмотрим вспомогательную систему, получающуюся из третьего и четвертого уравнений системы (3.1), если в них положить $\theta \equiv 0$, $p_\theta \equiv 0$ и ввести обозначения $\rho = \rho^0$, $p_\rho = p_\rho^0$:

$$d\rho^0 / d\tau = p_\rho^0, \quad dp_\rho^0 / d\tau = 1 - \rho^0$$

Решение этой системы при начальных условиях из (3.2) будет таким:

$$\rho^0 = 1 + C_1 \sin\tau + C_2 \cos\tau, \quad p_\rho^0 = C_1 \cos\tau - C_2 \sin\tau \tag{3.4}$$

$$C_1 = \alpha_{00} - \alpha_{20}\xi^2 - \alpha_{02}\eta^2 + O_4, \quad C_2 = -\mu^2$$

Выражение для ρ^0 из (3.4) для дальнейших вычислений удобнее переписать в виде $\rho^0 = R_0(\tau) + R_2(\tau) + O_4$, где

$$\begin{aligned}
&R_0(\tau) = 1 + \mu\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}\sin\tau - \mu^2\cos\tau, \quad R_2(\tau) = f_{20}(\tau)\xi^2 + f_{02}(\tau)\eta^2 \\
&f_{20}(\tau) = -\alpha_{20}\sin\tau, \quad f_{02}(\tau) = -\alpha_{02}\sin\tau
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Решение системы (3.1) с начальными условиями (3.2) представим в виде следующих рядов по степеням ξ, η:

$$\begin{aligned}
&\theta = q_{10}(\tau)\xi + q_{01}(\tau)\eta + q_{30}(\tau)\xi^3 + q_{21}(\tau)\xi^2\eta + q_{12}(\tau)\xi\eta^2 + q_{03}(\tau)\eta^3 + O_4\\
&p_\theta = r_{10}(\tau)\xi + r_{01}(\tau)\eta + r_{30}(\tau)\xi^3 + r_{21}(\tau)\xi^2\eta + r_{12}(\tau)\xi\eta^2 + r_{03}(\tau)\eta^3 + O_4\\
&\rho = R_0(\tau) + R_2(\tau) + a_{20}(\tau)\xi^2 + a_{11}(\tau)\xi\eta + a_{02}(\tau)\eta^2 + O_4\\
&p_\rho = p_\rho^0(\tau) + c_{20}(\tau)\xi^2 + c_{11}(\tau)\xi\eta + c_{02}(\tau)\eta^2 + O_4
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подставив разложения (3.6) в систему дифференциальных уравнений (3.1) и приравняв затем коэффициенты при одинаковых степенях ξ, η в их левой и правой частях, получим следующую систему уравнений относительно восемнадцати неизвестных коэффициентов $q_{i,j}$, $r_{i,j}$, $a_{i,j}$, $c_{i,j}$ разложений (3.6):

$$\begin{aligned}
&\frac{dq_{10}}{d\tau} = \frac{1}{R_0^2}r_{10}, \quad \frac{dq_{01}}{d\tau} = \frac{1}{R_0^2}r_{01}\\
&\frac{dr_{10}}{d\tau} = -\mu^2 R_0 q_{10}, \quad \frac{dr_{01}}{d\tau} = -\mu^2 R_0 q_{01}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{da_{20}}{d\tau} = c_{20}, \quad \frac{da_{11}}{d\tau} = c_{11}, \quad \frac{da_{02}}{d\tau} = c_{02}\\
&\frac{dc_{20}}{d\tau} = -a_{20} - \frac{1}{2}\mu^2 q_{10}^2 + \frac{1}{R_0^3}r_{10}^2\\
&\frac{dc_{11}}{d\tau} = -a_{11} - \mu^2 q_{10}q_{01} + \frac{2}{R_0^3}r_{10}r_{01}\\
&\frac{dc_{02}}{d\tau} = -a_{02} - \frac{1}{2}\mu^2 q_{01}^2 + \frac{1}{R_0^3}r_{01}^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dq_{30}}{d\tau} = \frac{1}{R_0^2}r_{30} - \frac{2}{R_0^3}(f_{20} + a_{20})r_{10}\\
&\frac{dq_{21}}{d\tau} = \frac{1}{R_0^2}r_{21} - \frac{2}{R_0^3}(f_{20} + a_{20})r_{01} - \frac{2}{R_0^3}a_{11}r_{10}\\
&\frac{dq_{12}}{d\tau} = \frac{1}{R_0^2}r_{12} - \frac{2}{R_0^3}a_{11}r_{01} - \frac{2}{R_0^3}(f_{02} + a_{02})r_{10}\\
&\frac{dq_{03}}{d\tau} = \frac{1}{R_0^2}r_{03} - \frac{2}{R_0^3}(f_{02} + a_{02})r_{01}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&dr_{30}/d\tau = -\mu^2 R_0 q_{30} - \mu^2(f_{20} + a_{20})q_{10} + \tfrac{1}{6}\mu^2 R_0 q_{10}^3\\
&dr_{21}/d\tau = -\mu^2 R_0 q_{21} - \mu^2(f_{20} + a_{20})q_{01} - \mu^2 a_{11}q_{10} + \tfrac{1}{2}\mu^2 R_0 q_{10}^2 q_{01}\\
&dr_{12}/d\tau = -\mu^2 R_0 q_{12} - \mu^2 a_{11}q_{01} - \mu^2(f_{02} + a_{02})q_{10} + \tfrac{1}{2}\mu^2 R_0 q_{10} q_{01}^2\\
&dr_{03}/d\tau = -\mu^2 R_0 q_{03} - \mu^2(f_{02} + a_{02})q_{01} + \tfrac{1}{6}\mu^2 R_0 q_{01}^3
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Начальные условия находятся из равенств (3.2) – (3.6). Получаем, что $q_{10}(0) = r_{01}(0) = 1$, все остальные шестнадцать величин из $q_{i,j}$, $r_{i,j}$, $a_{i,j}$, $c_{i,j}$ при $\tau = 0$ равны нулю.

3.2. Получение первых членов разложения величины τ_* *в ряд по степеням* ξ, η. Найдем время τ_*, когда траектория впервые, после начального момента $\tau = 0$, снова попадает на плоскость $\rho = 1 - \mu^2$ (см. п. 2 и фиг. 3). Третье из разложений (3.6) дает такое уравнение для τ_*:

$$R_0(\tau_*) + R_2(\tau_*) + a_{20}(\tau_*)\xi^2 + a_{11}(\tau_*)\xi\eta + a_{02}(\tau_*)\eta^2 + O_4 = 1 - \mu^2 \tag{3.11}$$

Величину τ_* ищем в виде ряда по степеням ξ, η:

$$\tau_* = s + \tau_{20}\xi^2 + \tau_{11}\xi\eta + \tau_{02}\eta^2 + O_4 \tag{3.12}$$

где $s = \sigma t_2$, а t_2 задается равенством (1.10). Следовательно

$$s = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\frac{\mu}{\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}} \tag{3.13}$$

Подставив ряд (3.12) в уравнение (3.11), получим соотношение

$$R_0(s) + \left(\frac{dR_0}{d\tau}\right)_{\tau=s}(\tau_{20}\xi^2 + \tau_{11}\xi\eta + \tau_{02}\eta^2) + f_{20}(s)\xi^2 + f_{02}(s)\eta^2 + \tag{3.14}$$
$$+ a_{20}(s)\xi^2 + a_{11}(s)\xi\eta + a_{02}(s)\eta^2 + O_4 = 1 - \mu^2$$

Из (3.3), (3.5) и (3.13) следует, что

$$R_0(s) = 1 - \mu^2, \quad \left(\frac{dR_0}{d\tau}\right)_{\tau=s} = -\alpha_{00} \tag{3.15}$$

$$f_{20}(s) = \frac{\mu^2(1-\mu^2)}{\mu^2 + 2\nu(1-\mu^2)}, \quad f_{02}(s) = \frac{1}{(1-\mu^2)^2[\mu^2 + 2\nu(1-\mu^2)]} \tag{3.16}$$

Из (3.14) и (3.15) находим выражения для величин $\tau_{i,j}$:

$$\tau_{20} = \frac{f_{20}(s) + a_{20}(s)}{\alpha_{00}}, \quad \tau_{11} = \frac{a_{11}(s)}{\alpha_{00}}, \quad \tau_{02} = \frac{f_{02}(s) + a_{02}(s)}{\alpha_{00}} \tag{3.17}$$

Таким образом, для получения величины τ_* в виде (3.12) достаточно проинтегрировать десять первых уравнений системы (3.7)–(3.10) с указанными в конце разд. 3.1 начальными условиями от $\tau = 0$ до $\tau = s$, где величина s определена равенством (3.13). В результате интегрирования найдем $a_{20}(s)$, $a_{11}(s)$, $a_{02}(s)$, и коэффициенты $\tau_{20}, \tau_{11}, \tau_{02}$ вычисляются затем по формулам (3.16), (3.17).

3.3. *Отображение* $\xi, \eta \to \xi_*, \eta_*$. Величину τ_* из (3.12) подставим, вместо τ, в правые части первого и второго из равенств (3.6). Разложив их затем в ряды по степеням ξ, η, получим, при учете уравнений (3.7) и первого из равенств (3.15), отображение $\xi, \eta \to \xi_*, \eta_*$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi_* &= m_{10}\xi + m_{01}\eta + m_{30}\xi^3 + m_{21}\xi^2\eta + m_{12}\xi\eta^2 + m_{03}\eta^3 + O_4 \\ \eta_* &= n_{10}\xi + n_{01}\eta + n_{30}\xi^3 + n_{21}\xi^2\eta + n_{12}\xi\eta^2 + n_{03}\eta^3 + O_4 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$m_{10} = q_{10}, \quad m_{01} = q_{01}, \quad n_{10} = r_{10}, \quad n_{01} = r_{01} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} &m_{30} = q_{30} + (1-\mu^2)^{-2}\tau_{20}r_{10}, \quad m_{21} = q_{21} + (1-\mu^2)^{-2}(\tau_{11}r_{10} + \tau_{20}r_{01}) \\ &m_{12} = q_{12} + (1-\mu^2)^{-2}(\tau_{02}r_{10} + \tau_{11}r_{01}), \quad m_{03} = q_{03} + (1-\mu^2)^{-2}\tau_{02}r_{01} \\ &n_{30} = r_{30} - \mu^2(1-\mu^2)\tau_{20}q_{10}, \quad n_{21} = r_{21} - \mu^2(1-\mu^2)(\tau_{11}q_{10} + \tau_{20}q_{01}) \\ &n_{12} = r_{12} - \mu^2(1-\mu^2)(\tau_{02}q_{10} + \tau_{11}q_{01}), \quad n_{03} = r_{03} - \mu^2(1-\mu^2)\tau_{02}q_{01} \end{aligned} \tag{3.20}$$

В формулах (3.19), (3.20) $q_{i,j} = q_{i,j}(s)$, $r_{i,j} = r_{i,j}(s)$. Они получаются при помощи численного интегрирования всех восемнадцати уравнений системы (3.7)–(3.10) от $\tau = 0$ до $\tau = s$.

4. Получение отображения $\xi_*, \ \eta_* \to \xi_1, \ \eta_1$. При $\tau = \tau_*$ имеем

$$\begin{aligned} &\theta = \xi_*, \quad p_\theta = \eta_* \\ &\rho = 1 - \mu^2, \quad p_\rho = -\alpha_{00} + \alpha_{20}\xi_*^2 + \alpha_{02}\eta_*^2 + O_4, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\alpha_{i,j}$ определены равенствами (3.3), величина p_ρ получена из интеграла энергии (2.1).

При $\tau > \tau_*$ (по крайней мере для достаточно малых значений величины $\tau - \tau_*$) нить ослаблена и материальная точка P совершает свободный полет по параболе в плоскости Oxy (фиг. 1). Этот этап движения удобнее описывать не в полярных, а в декартовых координатах Q_i, P_i $(i = 1, 2)$. Из уравнений движения с гамильтонианом (1.12), в котором функция П задается первой строкой формулы (1.13), получаем:

$$\begin{aligned} &Q_1(\tau) = \tfrac{1}{2}\mu^2(\tau - \tau_*)^2 + P_1(\tau_*)(\tau - \tau_*) + Q_1(\tau_*), \quad P_1(\tau) = \mu^2(\tau - \tau_*) + P_1(\tau_*) \\ &Q_2(\tau) = P_2(\tau_*)(\tau - \tau_*) + Q_2(\tau_*), \quad P_2(\tau) = P_2(\tau_*) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Входящие сюда постоянные $Q_i(\tau_*)$, $P_i(\tau_*)$ $(i = 1, 2)$ могут быть найдены из (4.1) и (1.14) в виде рядов по степеням $\xi_*, \ \eta_*$.

Момент τ_1 попадания траектории на плоскость $\rho = 1 - \mu^2$ (см. фиг. 3) определяется затем из уравнения

$$Q_1^2(\tau_1) + P_1^2(\tau_1) = (1 - \mu^2)^2$$

Вычисления показывают, что

$$\tau_1 = \tau_* + r + \beta_{20}\xi_*^2 + \beta_{11}\xi_*\eta_* + \beta_{02}\eta_*^2 + O_4 \tag{4.3}$$

где $r = \sigma t_1$, а t_1 задается формулой (1.9), т.е. $r = 2/\mu\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}$; величины $\beta_{i,j}$ вычисляется по формулам

$$\beta_{20} = -\frac{1}{\mu}(8\nu^2 - 2\nu + 1)\sqrt{\frac{1-\mu^2}{2\nu}}, \quad \beta_{11} = \frac{8\nu}{\mu^2(1-\mu^2)}, \quad \beta_{02} = -\frac{1+4\nu}{\mu^3(1-\mu^2)^2\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}}$$

Подставив теперь $\tau = \tau_1$ из (4.3) в формулы (4.2), найдем $Q_i(\tau_1)$, $P_i(\tau_1)$ $(i = 1, 2)$. Затем из равенств (1.14) можно получить искомые величины $\xi_1 = \theta(\tau_1)$ и $\eta_1 = p_\theta(\tau_1)$ в виде рядов по степеням $\xi_*, \ \eta_*$. Опуская простые, но довольно громоздкие выкладки, выпишем окончательный результат:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = c_{10}\xi_* + c_{01}\eta_* + c_{30}\xi_*^3 + c_{21}\xi_*^2\eta_* + c_{12}\xi_*\eta_*^2 + c_{03}\eta_*^3 + O_4 \\ &\eta_1 = d_{10}\xi_* + d_{01}\eta_* + d_{30}\xi_*^3 + d_{21}\xi_*^2\eta_* + d_{12}\xi_*\eta_*^2 + d_{03}\eta_*^3 + O_4 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Коэффициенты $c_{i,j}$, $d_{i,j}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &c_{10} = 1 - 4\nu, \quad c_{01} = \frac{2}{\mu(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{2\nu}{1-\mu^2}} \\ &d_{10} = -2\mu(1-\mu^2)(1-2\nu)\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}, \quad d_{01} = 1 - 4\nu \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$c_{30} = -\frac{2}{3}(16\nu^3 - 24\nu^2 + 5\nu - 3), \quad c_{21} = \frac{32\nu^3 - 40\nu^2 + 2\nu - 1}{\mu(1-\mu^2)\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}}$$

$$c_{12} = -\frac{2(8\nu^2 - 8\nu - 1)}{\mu^2(1-\mu^2)^3}, \quad c_{03} = \frac{16\nu^2 - 12\nu - 3}{3\mu^3(1-\mu^2)^4\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}}$$

$$d_{30} = -\frac{1}{3}\mu(1-\mu^2)(96\nu^3 - 44\nu^2 + 22\nu - 3)\sqrt{\frac{1-\mu^2}{2\nu}}, \quad d_{21} = 2(24\nu^2 - 5\nu + 1)$$

$$d_{12} = -\frac{48\nu^2 + 2\nu - 1}{\mu(1-\mu^2)\sqrt{2\nu(1-\mu^2)}}, \quad d_{03} = \frac{2(4\nu+1)}{\mu^2(1-\mu^2)^3} \tag{4.6}$$

5. Отображение $\xi, \eta \to \xi_1, \eta_1$. Для получения результирующего отображения $\xi, \eta \to \xi_1, \eta_1$ надо в формулы (4.4) вместо величин ξ_*, η_* подставить их выражения (3.18) через ξ, η и привести подобные члены. В результате получим искомое отображение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a\xi + b\eta + k_{30}\xi^3 + k_{21}\xi^2\eta + k_{12}\xi\eta^2 + k_{03}\eta^3 + O_4 \\ \eta_1 &= c\xi + d\eta + l_{30}\xi^3 + l_{21}\xi^2\eta + l_{12}\xi\eta^2 + l_{03}\eta^3 + O_4 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Коэффициенты a, b, c, d, $k_{i,j}$, $l_{i,j}$ являются функциями параметров μ, ν и очевидным образом выражаются через коэффициенты отображений (3.18) и (4.4). В частности, для коэффициентов линеаризованного отображения (5.1) имеем такие выражения:

$$\begin{aligned} a &= c_{10}m_{10} + c_{01}n_{10}, \quad b = c_{10}m_{01} + c_{01}n_{01} \\ c &= d_{10}m_{10} + d_{01}n_{10}, \quad d = d_{10}m_{01} + d_{01}n_{01} \end{aligned} \tag{5.2}$$

После получения отображения (5.1) надо исследовать устойчивость его неподвижной точки. Условия устойчивости и неустойчивости приведены в статье [5]. Они выражаются через коэффициенты a, b, c, d, $k_{i,j}$, $l_{i,j}$.

6. Исследование устойчивости неподвижной точки $\xi = \eta = 0$ **линеаризованного отображения (5.1).** Рассмотрим сначала линеаризованное отображение

$$\xi_1 = a\xi + b\eta, \quad \eta_1 = c\xi + d\eta \tag{6.1}$$

Для получения матрицы коэффициентов этого отображения при заданных значениях параметров μ и ν надо проинтегрировать систему четырех дифференциальных уравнений (3.7) с начальными условиями $q_{10}(0) = r_{01}(0) = 1$, $q_{01}(0) = r_{10}(0) = 0$ от $\tau = 0$ до $\tau = s$, где s задается формулой (3.13). Коэффициенты a, b, c, d вычисляются затем по формулам (3.19), (4.5), (5.2).

Введем обозначение $A = \frac{1}{2}(a+d)$. Если $|A| < 1$, то неподвижная точка $\xi = \eta = 0$ линейного отображения (6.1) устойчива. Если же $|A| > 1$, то имеет место неустойчивость, причем не только для линейного отображения, но и для полного нелинейного отображения (5.1). Значениям $|A| = 1$ отвечает граница областей устойчивости.

Целью исследования отображения (6.1) является получение разбиения множества допустимых значений параметров μ и ν, представляющего собой единичный квадрат $\{0 \leqslant \mu < 1,\ 0 \leqslant \nu < 1\}$, на области, в которых $|A| < 1$ и, следовательно, отображение (5.1) устойчиво в линейном приближении, и области $|A| > 1$, где оно неустойчиво.

6.1. Случай малых μ. Малые значения параметра μ отвечают случаю, когда вес точки P мал по сравнению с величиной kl_0. В пределе при $\mu \to 0$ приходим к исследованной в статье [1] задаче об устойчивости вертикального периодического движения материальной точки P, подвешенной на нерастяжимой нити.

Найдем выражение для величины A при $0 \leqslant \mu \ll 1$. При малых μ решение системы уравнений (3.7) с начальными условиями $q_{10}(0) = r_{01}(0) = 1$, $q_{01}(0) = r_{10}(0) = 0$ будет таким:

$$q_{10}(\tau) = 1 + O(\mu^2), \qquad r_{10}(\tau) = -\mu^2\tau + O(\mu^3)$$
$$q_{01}(\tau) = \tau + \mu 2\sqrt{2\nu}(\cos\tau - 1) + O(\mu^2), \quad r_{01}(\tau) = 1 + O(\mu^2) \tag{6.2}$$

Но для величины s из (3.13) справедливо равенство

$$s = \pi + \mu 2(2\nu)^{-1/2} + O(\mu^3)$$

поэтому входящие в выражения (5.2) величины $m_{i,j} = q_{i,j}(s)$, $n_{i,j} = r_{i,j}(s)$ допускают, в соответствии с (6.2), такие оценки:

$$m_{10} = 1 + O(\mu^2), \quad n_{10} = -\mu^2\pi + O(\mu^3), \quad m_{01} = \pi + O(\mu), \quad n_{01} = 1 + O(\mu^2) \tag{6.3}$$

Далее из (4.4) следует, что

$$c_{10} = d_{01} = 1 - 4\nu, \quad c_{01} = \mu^{-1}2\sqrt{2\nu} + O(\mu), \quad d_{10} = -\mu 2\sqrt{2\nu} + O(\mu^2) \tag{6.4}$$

Теперь из (6.3), (6.4) и (5.2) можно получить оценки для коэффициентов a и d:

$$a = 1 - 4\nu - \mu 2\pi\sqrt{2\nu} + O(\mu^2), \quad d = 1 - 4\nu - \mu 2\pi(1 - 2\nu)\sqrt{2\nu} + O(\mu^2)$$

Следовательно, при $0 \leqslant \mu \ll 1$ имеем такое выражение для величины A:

$$A = 1 - 4\nu - \mu 2\pi(1 - \nu)\sqrt{2\nu} + O(\mu^2) \tag{6.5}$$

Отсюда видно, что в предельном случае при $\mu = 0$ неподвижная точка отображения устойчива в линейном приближении, если $0 < \nu < 1/2$ и неустойчива, если $\nu > 1/2$. Этот вывод согласуется с результатами статьи [1]. При малых μ граница области устойчивости задается уравнением

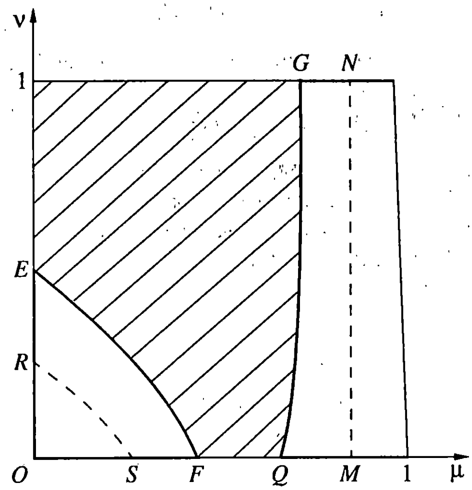
$$\nu = \frac{1}{2} - \mu\frac{\pi}{4} + O(\mu^2)$$

6.2. Результаты численного исследования. Результаты численного исследования устойчивости линейного отображения (6.1) представлены на фиг. 4 в плоскости параметров μ, ν. В незаштрихованных областях $|A| < 1$ и имеет место устойчивость. В заштрихованной области $|A| > 1$ и неподвижная точка $\xi = \eta = 0$ неустойчива. На границах областей устойчивости EF и QG величина $A = -1$, а матрица отображения (6.1) не приводится к диагональной форме; следовательно, здесь неподвижная точка линейного отображения неустойчива.

Точки E, F и Q, G граничных кривых имеют соответственно координаты (0, 0.5), (0.430, 0) и (0.665, 0), (0.749, 1).

Для точек F и Q высота h подскока материальной точки P равна нулю. В невозмущенном движении точка колеблется вдоль вертикали как на пружине, причем амплитуда ее колебаний равна $l - l_0$. Неподвижная точка $\xi = \eta = 0$ отображения (6.1), соответствующего этим колебаниям, устойчива, если $0 < \mu < 0.430$ или $0.665 < \mu \leqslant 1$. Последний вывод находится в соответствии с численными результатами статьи [2].

7. Результаты исследования устойчивости неподвижной точки $\xi = \eta = 0$ нелинейного отображения (5.1). Выводы. Для значений параметров μ, ν, лежащих на фиг. 4 в заштрихованной области, неподвижная точка отображения $\xi = \eta = 0$ неустойчива не только в линейном приближении, но и для нелинейного отображения (5.1). Границы же EF и QG и незаштрихованные области требуют нелинейного анализа. При этом, согласно алгоритму п. 3, для заданных значений μ, ν необходимо сначала проинтегри-



Фиг. 4

ровать систему десяти уравнений (3.7), (3.8) и вычислить величины (3.17). А затем ужé при получении коэффициентов отображения (5.1) надо проинтегрировать полную систему восемнадцати уравнений (3.7)–(3.10).

Нелинейный анализ, опирающийся на описанный выше алгоритм и результаты статьи [5], показал, что на границах EF и QG неустойчивая в линейной задаче неподвижная точка $\xi = \eta = 0$ отображения (5.1) в действительности устойчива.

Внутри незаштрихованных областей, согласно [5], надо различать два случая: резонансный, когда $A = -\frac{1}{2}$ или $A = 0$ и нерезонансный, когда $A \neq -\frac{1}{2}, 0$. Случай $A = -\frac{1}{2}$ в изучаемой конкретной задаче оказался несущественным, так как в правых частях равенств (5.1) отсутствуют члены второй степени относительно ξ, η. Равенство $A = 0$ реализуется на кривых RS и MN, изображенных на фиг. 4 штриховыми линиями. Точки R, S и M, N имеют соответственно координаты (0, 0.25), (0.249, 0) и (0.842, 0), (0.878, 1). Из (6.5) можно получить, что при малых μ кривая RS задается уравнением

$$\nu = \frac{1}{4} - \mu\frac{3\pi\sqrt{2}}{16} + O(\mu^2)$$

Расчеты показали, что для значений μ, ν, лежащих внутри незаштрихованных областей, как на кривых RS и MN, так и вне их, неподвижная точка $\xi = \eta = 0$ отображения (5.1) устойчива.

Таким образом, периодическое движение материальной точки P вдоль вертикали изоэнергетически орбитально устойчиво всюду в незаштрихованных областях фиг. 4, включая их границы. Для остальных значений параметров μ, ν, множество которых выделено на фиг. 4 штриховкой, имеет место неустойчивость.

Отметим, что при $0.749 \leqslant \mu \leqslant 1$ имеет место устойчивость при любой высоте подскока h точки P над ее положением, отвечающим нерастянутой нити, а при $0.430 < \mu < 0.665$, наоборот, при любой высоте подскока имеет место неустойчивость. Если же $0 \leqslant \mu \leqslant 0.430$ или $0.665 \leqslant \mu \leqslant 0.749$, то вертикальное периодическое движение точки P орбитально неустойчиво, когда высота подскока превосходит некоторое критическое значение $h_* = l_0\nu_*(\mu)$, соответствующее граничным кривым EF и QG на фиг. 4; при $0 \leqslant h \leqslant h_*$ имеет место орбитальная устойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00405).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* О колебаниях материальной точки, подвешенной на идеальной нити // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 240–249.
2. *Маркеев А.П., Чеховская Т.Н.* О колебаниях упругого маятника // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 18–26.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
4. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 2. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1972. 999 с.
5. *Маркеев А.П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.

Москва

Поступила в редакцию
29.06.1999