МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2001

УДК 624.07:534.1

© 2001 г. И.И. ИВАНЧЕНКО

МЕТОД РАСЧЕТА НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЮЩИХ МОСТЫ

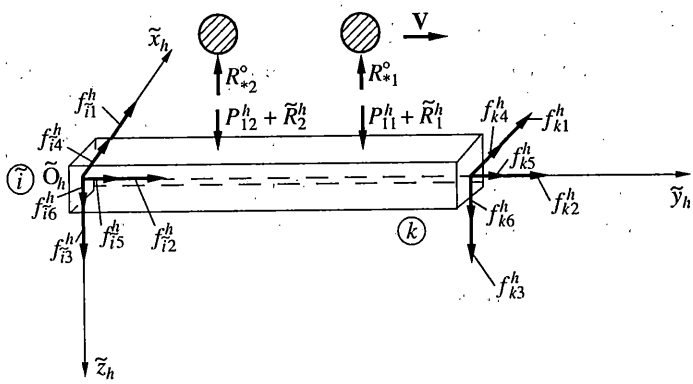
Предлагается новый метод расчета стержневых систем на действие подвижной нагрузки, обладающей массой. При решении задачи о действии на балку простейшей подвижной нагрузки в виде движущегося груза находят применение два основных метода решения этой задачи, они же реализуются и для других конструкций и нагрузок. В первом случае используются обобщенные координаты при разложении прогиба по собственным формам балки, и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1–3]. Во втором случае, после расчленения системы "балка–груз", задача сводится к решению интегрального уравнения относительно динамической реакции груза [4, 5]. В [1–3] увеличение числа удерживаемых форм приводит к увеличению порядка системы уравнений, в [4, 5] возникают трудности при решении интегральных уравнений, связанные с условной устойчивостью шаговых процедур. Излагаемый для балок в [6] метод объединяет между собой указанные подходы и ликвидирует указанные у них недостатки, так как доступно учитывает любое необходимое число форм в разложении прогиба, и имеет разрешающую систему уравнений, при безусловно-устойчивой схеме интегрирования с минимальным числом неизвестных, как и в методе интегральных уравнений [4, 5]. В предлагаемом далее методе эти преимущества сохраняются и при расчете стержневых систем на подвижные нагрузки, обладающие массой.

Стержневыми системами при проектировании мостов моделируются различные несущие конструкции, включая неразрезные пролетные строения, рамные эстакады, фермы. Существующие подходы к расчету стержневых систем на подвижную нагрузку традиционно применяют метод конечных элементов (МКЭ), при использовании полиномов для аппроксимации смещений [7–9]. Как и при решении классической задачи о движении груза по балке, для стержневых систем применяется два указанных выше основных метода к учету действия подвижной нагрузки, при этом сохраняются и особенности их численной реализации. Оба метода используют МКЭ либо для решения вспомогательной задачи на собственные значения, либо для построения системы разрешающих уравнений при их прямом интегрировании. Первый подход сводится к построению дискретных аналогов для метода Инглиса [7], второй – для метода интегральных уравнений [9]. Оба метода требуют высокой степени пространственной дискретизации сооружения, так как при действии импульсивных, быстродвижущихся и вибрационных нагрузок возникает потребность учесть вклады в колебательный процесс большего числа собственных форм. Однако расширение спектра частот, как отмечалось, повышает и порядок системы разрешающих уравнений. Настоящие исследования направлены на исключение указанной проблемы. Предлагаемый метод объединяет для стержневых систем два указанных выше подхода, используя при этом разработанный ранее метод расчета на подвижную нагрузку для балок [6] и метод (в конечноэлементной постановке) расчета стержневых систем с распределенными параметрами на неустановившиеся воздействия, включая безмассовые подвижные нагрузки [10]. Для учета действия подвижной нагрузки, обладающей массой, предлагаются большие по длине конечные (граничные) элементы, при аппроксимации смещений линейными функциями и

тригонометрическими рядами Фурье. Прямое интегрирование разрешающей системы приводит на каждом шаге к системе линейных уравнений относительно только узловых ускорений, включая узлы стержневой системы и узлы в точках контакта подвижной нагрузки и сооружения. Увеличение пространственной дискретизации при этом не влечет за собой увеличения порядка разрешающей системы уравнений, а построенная на базе смешанного метода строительной механики, безусловно-устойчивая по времени шаговая процедура позволяет определять поля усилий, смещений и динамических давлений подвижной нагрузки на мосты. В качестве подвижной нагрузки могут рассматриваться как скоростные железнодорожные составы, так и различные автомобильные нагрузки.

1. При действии на мосты высокоскоростной подвижной нагрузки в виде специализированных железнодорожных составов остаются актуальными задачи, связанные с динамическим расчетом несущих конструкций мостов, в том числе задачи по определению резонансных режимов в системе "состав – путь – мост" при действии на пролетные строения протяженной, однотипной, вагонной нагрузки. Для решения этих задач широко применяется математическое моделирование. Рассмотрим стержневую систему, моделирующую мост, и подвижную нагрузку в виде скоростного состава. Используем системный подход для решения задачи [10, 11]. Введем основные условные обозначения. Будем считать, что стержневая система состоит из $\tilde{m}$ стержней и имеет n узлов. Введем правую глобальную систему координат $0XYZ$. Введем для каждого стержня правые местные системы координат $\tilde{0}_h\tilde{X}_h\tilde{Y}_h\tilde{Z}_h$ $(h=1,\ldots,\tilde{m})$. Ось $\tilde{Y}_h$ направим от узла с порядковым номером $\tilde{i}$, к узлу с номером k, при $\tilde{i} < k$. Систему, в виде состава и несущей конструкции, разделим на две подсистемы. Стержневую систему, в свою очередь, расчленим по узлам, выделив из несущей конструкции подсистему $\{e_h^*\}$ $(h = 1,\ldots, m^*)$, состоящую из m^* элементов проезжей части, и подсистему $\{e_h\}$ $(h = 1,\ldots, m)$, состоящую из m элементов, не подверженных действию подвижной нагрузки. Введем для каждого стержня правые подвижные системы координат $\tilde{0}_{1h}\tilde{X}_{1h}\tilde{Y}_{1h}\tilde{Z}_{1h}$. Начало подвижной системы координат $\tilde{0}_{1h}$ свяжем с узлом $\tilde{i}$, а плоскость $\tilde{0}_{1h}\tilde{X}_{1h}\tilde{Z}_{1h}$ крутильно с сечением в узле $\tilde{i}$. Ось $\tilde{Y}_{1h}$ в каждый момент времени будем считать проходящей через узел k. Будем обозначать через $\tilde{N}$ число дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих относительное движение стержневых элементов e_h и e_h^*.

Введем для системы $\{e_h, e_h^*\}$ поле узловых абсолютных, переносных и относительных линейных и угловых смещений, поле узловых усилий и моментов в концевых сечениях элементов, поле динамических давлений от подвижного состава, действующего на $\{e_h^*\}$. Рассмотрим следующие столбцы смещений и усилий с компонентами в местных системах координат, отнесенных к недеформированным элементам e_h и e_h^*: $q^h = [q_{\tilde{i}}^h q_k^h]'$, $q_r^h = [q_{r\tilde{i}}^h q_{rk}^h]'$, $q_e^h = [q_{e\tilde{i}}^h q_{ek}^h]'$ – векторы линейных и угловых перемещений узлов $\tilde{i}$ и k в абсолютном, относительном и переносном движениях; $\tilde{q}_r = [\tilde{q}_r^h]$, $\tilde{q}_e = [\tilde{q}_e^h]$ – векторы относительных и переносных обобщенных перемещений; $f^h = [f_{\tilde{i}}^h f_k^h]'$ – вектор усилий и моментов в узлах $\tilde{i}$ и k; $P^h = [P_{\tilde{n}}^h]$ $(\tilde{n} = 1,\ldots,6)$ – вектор распределенных внешних сил и моментов, действующих на $\{e_h, e_h^*\}$ и не связанных с подвижными нагрузками; $\bar{f} = [f^h]$ – вектор узловых усилий для $\{e_h, e_h^*\}$, $\bar{q} = [q^h]$ – вектор узловых смещений для $\{e_h, e_h^*\}$; $\tilde{\bar{q}}_r^h = [\tilde{\bar{q}}_{r\tilde{k}}^h]$ $(\tilde{k} = 1,\ldots,\tilde{N})$ – вектор относительных перемещений любой точки e_h и e_h^*. В точках контакта



Фиг. 1

подвижной нагрузки (колесных пар) с $\{ e^*_h \}$ введем в рассмотрение движущиеся узлы. Тогда, считая, что в момент времени t на e^*_h находится N^*_h колесных пар, рассмотрим $q^{\circ h} = [q^{\circ h}_{\tilde{k}_1}]$, $P^h_1 = [P^h_{1\tilde{k}_1}]$, $\tilde{R}^h = [R^h_{\tilde{k}_1}]$ $(\tilde{k}_1 = 1,\ldots,N^*_h)$ – векторы столбцы, соответственно, вертикальных смещений движущихся узлов для e^*_h, статических давлений и динамических добавок к ним от колесных пар, находящихся на e^*_h. Обозначим через $\bar{q}^{\circ} = [q^{\circ h}]$ и $\tilde{R} = [\tilde{R}^h]$ – векторы вертикальных смещений движущихся узлов системы $\{ e^*_h \}$ и, соответственно, вектор динамических добавок к статическим давлениям колесных пар, действующих на $\{ e^*_h \}$. Рассмотрим векторы-столбцы с компонентами в основной системе координат при нумерации узлов $\tilde{j} = 1,\ldots,n$, $q = [q_{\tilde{j}}]$ – вектор узловых перемещений, $q_S = [q_{S\tilde{j}}]$ – вектор заданных узловых перемещений [11]. Будем полагать $q^h_{\tilde{i}}$, q^h_k, $q^h_{r\tilde{i}}$, q^h_{rk}, $q^h_{e\tilde{i}}$, q^h_{ek}, $q_{\tilde{j}}$, $f^h_{\tilde{i}}$, f^h_k, $q_{S\tilde{j}}$ – векторами с шестью составляющими, например $q^h_{\tilde{i}} = [q^h_{\tilde{i}\tilde{n}}]$, $f^h_{\tilde{i}} = [f^h_{\tilde{i}\tilde{n}}]$ при $\tilde{n} = 1,\ldots,6$. Первые три компоненты в порядке возрастания $\tilde{n}$ означают величины узловых смещений или, соответственно, узловых сил, направленных вдоль осей, $\tilde{X}_h$, $\tilde{Y}_h$, $\tilde{Z}_h$ (фиг. 1), аналогично и в основной системе координат, следующие три компоненты – величины углов поворота узлов или, соответственно, узловых моментов относительно этих или параллельных осей. При учете затуханий по Фойгту для случая изгибных колебаний динамическая модель e_h и e^*_h в относительном движении выбирается в виде шарнирно-опертой балки Эйлера, для продольных относительных (крутильных) колебаний выбирается модель стержня с одним заделанным (в узле $\tilde{i}$) и другим свободным концами.

2. Рассмотрим конечный элемент для подвижной нагрузки. Представим компоненты вектора $\tilde{\bar{q}}^h_r$ при $\tilde{k} = 1,\ldots,4$ в виде

$$\tilde{\bar{q}}^h_{r\tilde{k}} = \sum_{ii=1}^{\infty} \tilde{q}^h_{r\tilde{k}i} W_{\tilde{k}i}(\eta_1), \quad \eta_1 = \frac{\tilde{Y}_{1h}}{l_h} \tag{2.1}$$

где $\tilde{q}^h_{r\tilde{k}i}$ – обобщенные координаты (подвектор вектора $\tilde{q}^h$); $W_{\tilde{k}i}(\eta_1) = \sin r_i \eta_1$ – собственные функции изгибных при $\tilde{k} = 1, 3$ и $r_i = \pi i$, продольных при $\tilde{k} = 2$ (крутильных

при $\tilde{k}=4$) и $r_i=(2i-1)/\pi/2$ колебаний e_h^* и e_h в относительном движении; l_h – длина элемента. Будем далее указывать на общность при построении методики для e_h^* и e_h из [10].

Первая группа уравнений для e_h^* (e_h) формируется при последовательном возможном варьировании вектора $\tilde{q}_e^h$ и применении общего уравнения динамики. В итоге имеем уравнения динамического равновесия для e_h^* (e_h) в переносном движении в виде

$$(H^h)'f^h - M^h\tilde{H}^h\ddot{q}^h + \int_0^1 S_1^h P^h d\eta - \int_0^1 \tilde{\tilde{M}}^h \ddot{\tilde{q}}_r^h d\eta_1 =$$

$$= \begin{cases} \Pi_1(\tilde{R}^h + \tilde{P}_1^h) & \text{для } e_h^* \ (\tilde{k}=1,3) \\ 0 & \text{для } e_h \text{ и } e_h^* \ (\tilde{k}=2,4) \end{cases} \tag{2.2}$$

где $H^h, \tilde{H}^h$ – матрицы преобразования векторов $q_e^h = H^h\tilde{q}_e^h, \tilde{q}_e^h = \tilde{H}^h q^h; M^h$ – диагональная матрица масс и моментов инерции, относительно главных и центральных осей e_h^*, если в качестве компонент вектора $\tilde{q}_e^h$ выбрать смещение центра жесткого e_h^* вдоль этих осей и повороты вокруг них; матрицы $\Pi_1, S_1^h, \tilde{\tilde{M}}^h$ – отражают действие на e_h^*, соответственно, давления колесных пар, нагрузки P^h и относительных сил инерции.

Вторая группа уравнений для e_h^* (e_h) получается после варьирования компонент вектора $\tilde{q}_r^h$ и применения общего уравнения динамики

$$\ddot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}i}^h + \mu_{\tilde{k}i}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2 \dot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}i}^h + \omega_{h\tilde{k}i}^2 \tilde{q}_{r\tilde{k}i}^h = \tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h f^h + \tilde{\tilde{\eta}}_{\tilde{k}i}^h \ddot{q}^h + \int_0^1 \overline{\eta}_{\tilde{k}i}^h P^h d\eta +$$

$$+ \begin{cases} \overline{\overline{\eta}}_{\tilde{k}i}^h(\tilde{R}^h + \tilde{P}_1^h) & \text{для } e_h^* \ (\tilde{k}=1,3,\ i=1,2,\ldots,\infty) \\ 0 & \text{для } e_h \text{ и } e_h^* \ (\tilde{k}=2,4,\ i=1,2,\ldots,\infty) \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\mu_{\tilde{k}i}^h$ – коэффициенты, учитывающие вязкость; $\omega_{h\tilde{k}i}$ – круговая частота соответствующего вида колебаний e_h^* (e_h) в относительном движении: $\omega_{h\tilde{k}i} = (r_i^2/l_h^2)\sqrt{E_h J_{\tilde{k}h}/m_h}$ при $\tilde{k}=1,3$; $\omega_{h\tilde{k}i} = (r_i/l_h)\sqrt{E_h/\rho_h}$ при $\tilde{k}=2$; $\omega_{h\tilde{k}i} = (r_i/l_h)\sqrt{G_h/\rho_h}$ при $\tilde{k}=4$; E_h, G_h – модули упругости материалов; $J_{\tilde{k}h}$ – моменты инерции сечения; m_h – погонная масса; ρ_h – масса единицы объема; $\overline{\eta}_{\tilde{k}i}^h$, $\tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h$, $\tilde{\tilde{\eta}}_{\tilde{k}i}^h$, $\overline{\overline{\eta}}_{\tilde{k}i}^h$ – матрицы, отражающие действие на элемент e_h^* (e_h) при $\tilde{k}$ = 1, 3 внешней нагрузки P^h, сосредоточенных моментов $f_{i\tilde{n}}^h, f_{k\tilde{n}}^h$ ($\tilde{n}=4,6$), переносного поля сил инерции, выраженных через $\ddot{q}_{i\tilde{n}}^h, \ddot{q}_{k\tilde{n}}^h (\tilde{n}=1,3)$ (при $\tilde{k}$ = 1, 3 боковых и, соответственно, вертикальных давлений колесных пар, при $\tilde{k}$ = 2, 4 влияние продольной силы или крутящего момента $f_{k\tilde{n}}^h$ ($\tilde{n}=2,5$) и переносного поля сил инерции, выраженного через $\ddot{q}_{i\tilde{n}}^h$ ($\tilde{n}=2,5$)). Заметим, что в (2.2) $\tilde{P}_1^h = P_1^h$ при $\tilde{k}=3$ и $\tilde{P}_1^h = 0$ при $\tilde{k}=1$.

Выражения (2.3) могут быть получены, если использовать (2.1) и ортогональность собственных функций в (2.1) при разложении по ним в ряд правых частей следующих уравнений для изгибных колебаний e_h^* (e_h):

$$L_1 \tilde{\tilde{q}}_{r\tilde{k}}^h = (\partial\delta(\tilde{y}_{1h} - \tilde{c}) / \partial\tilde{c})|_{\tilde{c}=0}\, \varepsilon f_{i\tilde{n}}^h + (\partial\delta(\tilde{y}_{1h} - \tilde{c}) / \partial\tilde{c})|_{\tilde{c}=l_h}\, \varepsilon f_{k\tilde{n}}^h -$$

$$-m_h(\ddot{q}_{i\tilde{n}}^h + \tilde{y}_{1h}(\ddot{q}_{k\tilde{n}}^h - \ddot{q}_{i\tilde{n}}^h) / l_h) + F_{\tilde{k}}^h(\tilde{y}_{1h}, t) +$$

$$+\begin{cases} \sum\limits_{\tilde{k}_1=1}^{N_h^*} \delta(\tilde{y}_{1h} - c_{\tilde{k}_1})(\tilde{R}_{\tilde{k}_1}^h + P_{1\tilde{k}_1}^h) & \text{для } e_h^* \ (k=3) \\ 0 & \text{для } e_h \text{ и } e_h^* \ (k=1) \end{cases}$$

$$\varepsilon = 1, \ \tilde{P}_{1\tilde{k}_1}^h = P_{1\tilde{k}_1}^h \ \text{ при } \tilde{k} = 3, \ \varepsilon = -1, \ \tilde{P}_{1\tilde{k}_1}^h = 0 \ \text{ при } \tilde{k} = 1$$

для продольных (крутильных) колебаний e_h^* (e_h):

$$L_2 \tilde{\tilde{q}}_{r\tilde{k}}^h = \delta(\tilde{y}_{1h} - l_h) f_{k\tilde{n}}^h - m_h \ddot{q}_{i\tilde{n}}^h + F_{\tilde{k}}^h(\tilde{y}_{1h}, t) \quad (\tilde{k} = 2,4)$$

$$L_1 = E_h J_{\tilde{k}h}(\partial^4 / \partial\tilde{y}_{1h}^4) + \mu_{\tilde{k}}^h E_h J_{\tilde{k}h}(\partial^5 / \partial\tilde{y}_{1h}^4 \partial t) + m_h(\partial^2 / \partial^2 t),$$

$$L_2 = -E_h F_h(\partial^2 / \partial\tilde{y}_{1h}^2) - \mu_{\tilde{k}}^h E_h F_h(\partial^3 / \partial\tilde{y}_{1h}^2 \partial t) + m_h(\partial^2 / \partial^2 t) \ \text{ при } \ \tilde{k} = 2$$

где $\delta(\tilde{y}_{1h} - l_h)$ – дельта-функция, $F_{\tilde{k}}^h(\tilde{y}_{1h}, t)$ – внешняя нагрузка, не включающая подвижную, $c_{\tilde{k}_1}$ – абсцисса колесной пары.

Третья группа уравнений обеспечивает неразрывность перемещений в подвижных и движущихся узлах системы $\{e_y, e_h^*\}$.

Представим вектор q_r^h в виде

$$q_r^h = \Pi^h q_{r_*}^h \tag{2.4}$$

$$q_{r_*}^h = [\tilde{\tilde{q}}_r^h(0,t), \ \partial\tilde{\tilde{q}}_r^h(0,t) / \partial\eta_1, \ \tilde{\tilde{q}}_r^h(1,t), \ \partial\tilde{\tilde{q}}_r^h(1,t) / \partial\eta_1]'$$

где вектор $\tilde{\tilde{q}}(\eta_1, t)$ имеет компонентами только те и в том же порядке компоненты вектора $\tilde{\tilde{q}}_r^h(\eta_1, t) / l_h$, которые являются поперечными смещениями e_h^* $\{e_h)$ в системе $\tilde{0}_{1h}\tilde{X}_{1h}\tilde{Y}_{1h}\tilde{Z}_{1h}$; Π^h – матрица преобразования $q_{r_*}^h$ в q_r^h. В итоге, составляя для неподвижных узлов стержневой системы равенство $q^h = q_e^h + q_r^h$ и, используя (2.4), имеем

$$(E - H^h \tilde{H}^h) q^h = \Pi^h q_{r_*}^h \quad \text{для } e_h \ \text{ и } e_h^* \tag{2.5}$$

Аналогичные выражения можно записать для движущихся узлов подсистемы $\{ e_h^* \}$:

$$q^{\circ h} = q_e^{\circ h} + q_r^{\circ h} \tag{2.6}$$

где $q_e^{\circ h}$ и $q_r^{\circ h}$ – векторы столбцы переносных и относительных вертикальных смещений движущихся узлов. Смещения узлов в (2.6) вычислим с учетом скорости их горизонтального смещения вдоль e_h^*.

Объединим уравнения (2.2)–(2.6), ограничив в (2.3) число уравнений до N. Проведем дискретизацию по времени полученной системы уравнений. Используем безусловно-устойчивую шаговую процедуру по времени, предложенную в [10] для $e_h^*(e_h)$ на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ имеем

$$(H^h)' f_{j+1/2}^h - M^h \tilde{H}^h \ddot{q}_{j+1/2}^h + \int_0^1 S_1^h P_{j+1/2}^h d\eta - \int_0^1 \tilde{\tilde{M}}^h \ddot{\tilde{\tilde{q}}}_{rj+1/2}^h d\eta_1 =$$

$$= \begin{cases} \Pi_1(\tilde{R}_{j+1/2}^h + \tilde{P}_1^h) & \text{для } e_h^* \ (\tilde{k} = 1,3) \\ 0 & \text{для } e_h \text{ и } e_h^* \ (\tilde{k} = 2,4) \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\ddot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}ij+1}^h + \mu_{\tilde{k}i}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2 \dot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}ij+1}^h + \omega_{h\tilde{k}i}^2 \tilde{q}_{r\tilde{k}ij+1}^h = \tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h f_{j+1}^h + \tilde{\tilde{\eta}}_{\tilde{k}i}^h \ddot{q}_{j+1}^h + \int_0^1 \bar{\eta}_{\tilde{k}i}^h P_{j+1}^h d\eta +$$

$$+ \begin{cases} \bar{\bar{\eta}}_{\tilde{k}i}^h (\tilde{R}_{j+1}^h + \tilde{P}_1^h) & \text{для } e_h^* \ (\tilde{k} = 1,3, \ i = 1,2,\ldots,N) \\ 0 & \text{для } e_h \text{ и } e_h^* \ (\tilde{k} = 2,4, \ i = 1,2,\ldots,N) \end{cases} \tag{2.8}$$

$$(E - H^h \tilde{H}^h) q^h = \Pi^h q_{r_*}^h \quad \text{для } e_h \text{ и } e_h^* \tag{2.9}$$

$$\overset{\circ}{q}{}_{j+1}^h = \overset{\circ}{q}{}_{ej+1}^h + \overset{\circ}{q}{}_{rj+1}^h \quad \text{для } e_h^* \tag{2.10}$$

$$q_{j+1}^h = q_j^h + \dot{q}_j^h \Delta t_j + \ddot{q}_{j+1/2}^h \Delta t_j^2 / 2, \quad \dot{q}_{j+1}^h = \dot{q}_j^h + \ddot{q}_{j+1/2}^h \Delta t_j \tag{2.11}$$

$$\tilde{q}_{rj+1}^h = \tilde{q}_{rj}^h + \dot{\tilde{q}}_{rj}^h \Delta t_j + \ddot{\tilde{q}}_{rj+1/2}^h \Delta t_j^2 / 2, \quad \dot{\tilde{q}}_{rj+1}^h = \dot{\tilde{q}}_{rj}^h + \ddot{\tilde{q}}_{rj+1/2}^h \Delta t_j \tag{2.12}$$

$$\overset{\circ}{q}{}_{j+1}^h = \overset{\circ}{q}{}_j^h + \dot{\overset{\circ}{q}}{}_j^h \Delta t_j + \ddot{\overset{\circ}{q}}{}_{j+1/2}^h \Delta t_j^2 / 2, \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \tag{2.13}$$

Из уравнений (2.8) и (2.12) для $e_h^*\{e_h)$, используя, как и в [10], замены

$$f_{j+1}^h = 2 f_{j+1/2}^h - f_j^h, \quad \ddot{q}_{j+1}^h = 2\ddot{q}_{j+1/2}^h - \ddot{q}_j^h, \quad \ddot{\tilde{q}}_{rij+1}^h = 2\ddot{\tilde{q}}_{rij+1/2}^h - \ddot{\tilde{q}}_{rij}^h \tag{2.14}$$

имеем

$$\tilde{\tilde{q}}_{r\tilde{k}j+1}^h = \sum_{i=1}^N W_{\tilde{k}i}(\eta_1) \tilde{q}_{r\tilde{k}ij+1}^h = \sum_{i=1}^N W_{\tilde{k}i}(\eta_1) \{ (1 - \vartheta_{\tilde{k}ij}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2) \tilde{q}_{r\tilde{k}ij}^h +$$

$$+ \left(\Delta t_j - \vartheta_{\tilde{k}ij}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2 \left(\mu_{\tilde{k}}^h - \frac{1}{2} \Delta t_j \right) \right) \dot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}ij}^h + \vartheta_{\tilde{k}ij}^h (\tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h f_{j+1/2}^h + \tilde{\tilde{\eta}}_{\tilde{k}i}^h \ddot{q}_{j+1/2}^h + \int_0^1 \bar{\eta}_{\tilde{k}i}^h P_{j+1/2}^h d\eta +$$

$$+ \begin{cases} \bar{\bar{\eta}}_i^h (\tilde{R}_{j+1/2}^h + \tilde{P}_1^h)) \} & \text{для } e_h^* \ (\tilde{k} = 1,3) \\ 0 & \text{для } e_h \text{ и } e_h^* \ (\tilde{k} = 2,4) \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\vartheta_{\tilde{k}ij}^h = (\Delta t_j^2 / 2) \bar{\tilde{a}}_{\tilde{k}ij}^h, \quad \mu_{\tilde{k}}^h = \mu_{\tilde{k}i}^h$$

$$\bar{\tilde{a}}_{\tilde{k}ij}^h = 1 / (1 + \tfrac{1}{2} \omega_{h\tilde{k}i}^2 (\mu_{\tilde{k}}^h \Delta t_j + \Delta t_j^2 / 2))$$

Заметим, что в (2.15) выражение $\tilde{\tilde{q}}_{r\tilde{k}j+1}^h$ – дискретный аналог решения, которое можно получить при использовании интеграла Дюамеля. Используем, далее, выражение

(2.15) для формирования на каждом шаге $[t_j, t_{j+1}]$ значений $\overset{\circ}{q}_j$, $\dot{\overset{\circ}{q}}_j$ и правой части в (2.10). Для учета действия подвижной нагрузки применим методику, предложенную для шарнирно-опертой балки в [6]. Учтем у балки, как у e_h^*, появившиеся концевые усилия и моменты, смещения концевых сечений. На шаге $[t_j, t_{j+1}]$ из уравнений (2.10) для вертикальных ускорений движущихся узлов имеем

$$\ddot{q}^{\circ h}_{\tilde{k}_1 j+1/2} = \ddot{q}^h_{\tilde{i}3j+1/2} + ((c_{\tilde{k}_1}/l_h) + \upsilon\Delta t_j/l_n)(\ddot{q}^h_{k3j+1/2} - \ddot{q}^h_{\tilde{i}3j+1/2}) + 2\upsilon(\dot{q}^h_{k3j} - \dot{q}^h_{\tilde{i}3j})/l_h +$$

$$+\varepsilon f^h_{i4j+1/2}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\tilde{a}}^h_{\tilde{k}ij}\, b^h_{1i}\beta^h_{1i\tilde{k}_1} + \varepsilon f^h_{\tilde{i}4j+1/2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{a}}^h_{\tilde{k}ij}(-1)^i b^h_{1i}\beta^h_{1i\tilde{k}_1} - \varepsilon\ddot{q}^h_{\tilde{i}3j+1/2}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\tilde{a}}^h_{\tilde{k}ij}\, b^h_{2i}\beta^h_{1i\tilde{k}_1} +$$

$$+\ddot{q}^h_{k3j+1/2}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\tilde{a}}^h_{\tilde{k}ij}(-1)^i b^h_{2i}\beta^h_{1i\tilde{k}_1} + \sum_{k_1=1}^{N_h^*}(\tilde{R}^h_{k_1 j+1/2} + P^h_{1k_1})\left\{\tilde{\tilde{b}}_h\sum_{i=1}^{N}\tilde{\tilde{a}}^h_{\tilde{k}ij}\,\beta^h_{1i\tilde{k}_1}S_{ik_1}\right\} -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\beta^h_{1i\tilde{k}_1}\tilde{\tilde{a}}^h_{\tilde{k}ij}\,\omega^2_{h\tilde{k}i}[\tilde{q}^h_{r\tilde{k}ij} + (\mu^h_{\tilde{k}} + \Delta t_j/2)\dot{\tilde{q}}^h_{r\tilde{k}ij}] + \sum_{i=1}^{N}\{\beta^h_{2i\tilde{k}_1}\dot{\tilde{q}}^h_{r\tilde{k}ij} + \beta^h_{3i\tilde{k}_1}\tilde{q}^h_{r\tilde{k}ij}\}\ (\varepsilon = 1,\ \tilde{k} = 3) \quad (2.16)$$

$$b^h_{1i} = 2r_i/(m_h l_h^2),\quad b^h_{2i} = 2/r_i,\quad \tilde{\tilde{b}}_h = 2/(m_h l_h)$$

$$\beta^h_{1i\tilde{k}_1} = S_{i\tilde{k}_1}(1 - \upsilon^2(r_i/l_h)^2\Delta t_j^2/4) + \Delta t_j\upsilon(r_i/l_h)\bar{S}_{i\tilde{k}_1}$$

$$\beta^h_{2i\tilde{k}_1} = 2\upsilon(r_i/l_h)\bar{S}_{i\tilde{k}_1} - \upsilon^2(r_i/l_h)^2(\Delta t_j/2)S_{i\tilde{k}_1}$$

$$\beta^h_{3i\tilde{k}_1} = -\upsilon^2(r_i/l_h)^2\bar{S}_{i\tilde{k}_1},\quad S_{i\tilde{k}_1} = \sin(r_i c_{\tilde{k}_1}/l_h),\quad \bar{S}_{i\tilde{k}_1} = \cos(r_i c_{\tilde{k}_1}/l_h)$$

$$r_i = \pi i\quad (\tilde{k}_1 = 1,\ldots,N_h^*)$$

Введем в рассмотрение векторы

$$\tilde{f}^h = [f^h\tilde{R}^h]',\quad \tilde{q}^h = [q^h q^{\circ h}]' \quad (2.17)$$

Объединим подсистемы (2.7) и (2.9), после подстановки в них соотношений (2.15) и (2.11), с системой (2.16). В итоге будем иметь соотношения для e_h^*:

$$A^h\tilde{f}^h_{j+1/2} + B^h\ddot{\tilde{q}}^h_{j+1/2} = C^h \quad (2.18)$$

где A^h, B^h – квадратные матрицы с размерами $[N_1 \times N_1]$, C^h – вектор, при $N_1 = 12 + N_h^*$. Приведем окончательные базовые формулы для вычисления матриц A^h, B^h, C^h. Для случая плоского e_h^* ($\varepsilon = 1$) ненулевые элементы матриц $A^h = [A_{ki}]$, $B^h = [B_{ki}]$ ($k, i = 1,\ldots, 6 + N_h^*$) записываются в виде

$$A_{14} = 1 - \tilde{a}_4\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\frac{\nu_{3i}}{r_i^2},\quad A_{23} = \varepsilon\tilde{a}_2\sum_{i=1}^{N}\nu_{1i}r_i$$

$$A_{33} = A_{66} = \varepsilon\tilde{a}_6\sum_{i=1}^{N}\nu_{3i}r_i,\quad A_{53} = \left\{-1 + \tilde{a}_4\sum_{i=1}^{N}r_i\nu_{2i}\right\}\varepsilon$$

$$A_{11} = -A_{22} = -A_{25} = 1,\quad A_{44} = \tilde{\tilde{b}}_h\sum_{i=1}^{N}\frac{\nu_{3i}}{r_i},\quad A_{52} = -A_{55} = \frac{l_h}{2}$$

$$A_{2,6+k_1} = -1 - \tilde{a}_9\sum_{i=1}^{N}S_{ik_1}\nu_{1i},\quad A_{3,6+k_1} = -\tilde{a}_{10}\sum_{i=1}^{N}S_{ik_1}\nu_{3i} \quad (2.19)$$

$$A_{5,6+k_1} = -l_h\left(\frac{c_{k_1}}{l_h} - 0.5 + \tilde{a}_9 \sum_{i=1}^{N} S_{ik_1} \nu_{2i}\right)$$

$$A_{6+i_1,3} = \varepsilon\tilde{a}_7 \sum_{i=1}^{N} \nu_{3i}\beta_{1ii_1}^h, \quad A_{6+i_1,6+k_1} = \tilde{a}_8 \sum_{i=1}^{N} \tilde{\chi}_i \nu_{3i}\beta_{1ii_1}^h S_{ik_1}$$

$$B_{33} = B_{66} = -\frac{\varepsilon}{\delta_j}, \quad B_{11} = -M_h + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^{N} \frac{\tilde{\chi}_i \nu_{3i}}{r_i^2}$$

$$B_{22} = \overline{m}_1 + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^{N} \tilde{\chi}_i \nu_{1i}, \quad B_{44} = -\frac{1}{\delta_j}$$

$$B_{32} = -B_{65} = \overline{m}_3 + \tilde{a}_5 \sum_{i=1}^{N} \tilde{\chi}_i \nu_{3i}, \quad B_{52} = \overline{m}_2 + \tilde{a}_3 \sum_{i=1}^{N} \tilde{\chi}_i \nu_{2i}$$

$$B_{41} = \frac{1}{\delta_j} + 2\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \frac{\nu_{3i}}{r_i^2}, \quad B_{35} = -B_{62} = -\overline{m}_3 - \tilde{a}_5 \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \nu_{3i}\tilde{\chi}_i$$

$$B_{6+i_1,2} = 1 - \left(\frac{c_{i_1}}{l_h} + \upsilon\frac{\Delta t_j}{l_h}\right) - \tilde{a}_4 \sum_{i=1}^{N} \tilde{\chi}_i \beta_{1ii_1}^h \frac{\nu_{3i}}{r_i}$$

$$B_{6+i_1,5} = \frac{c_{i_1}}{l_h} + \upsilon\frac{\Delta t_j}{l_h} + \tilde{a}_4 \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \tilde{\chi}_i \beta_{1ii_1}^h \frac{\nu_{3i}}{r_i}$$

$$B_{6+i_1,6+i_1} = -1 \quad (i_1 = 1,\ldots,N_h^*), \quad \delta_j = 2/\Delta t_j^2$$

$$\nu_{1i} = \vartheta_{\tilde{k}ij}^h((-1)^i - 1)/r_i, \quad \nu_{2i} = \vartheta_{\tilde{k}ij}^h((-1)^i + 1)/(2r_i)$$

$$\nu_{3i} = \vartheta_{\tilde{k}ij}^h r_i, \quad \tilde{a}_1 = -2\delta_j M_h, \quad \tilde{a}_2 = -2\delta_j / l_h, \quad M_h = m_h l_h$$

$$\tilde{a}_3 = l_h\tilde{a}_1, \quad \tilde{a}_4 = l_h\tilde{a}_2, \quad \tilde{a}_5 = 2/l_h, \quad \tilde{a}_6 = 2/(l_h^2 M_h), \quad \tilde{a}_7 = 2\delta_j/(l_h^2 M_h)$$

$$\tilde{a}_8 = -l_h\tilde{a}_7, \quad \tilde{a}_9 = 2\delta_j, \quad \tilde{a}_{10} = -\tilde{\tilde{b}}_h / l_h, \quad J_{hc} = M_h l_h^2/12, \quad \tilde{\chi}_i = -1/r_i$$

$$\overline{m}_1 = M_h/2, \quad \overline{m}_2 = -J_{hc}/l_h, \quad \overline{m}_3 = -1/(\delta_j l_h)$$

Элементы $A_{23} \to A_{26}$, $A_{33} \to A_{36} = A_{63}$, $A_{53} \to A_{56}$, $A_{3,6+k_1} \to A_{6,6+k_1}$, $A_{6+i_1,3} \to A_{6+i_1,6}$ – путем введения под знак суммы множителя $(-1)^i$, при i_1, $k_1 = 1,\ldots,N_h^*$. Элементы $B_{22} \to B_{25}$, $B_{52} \to B_{55}$ – путем введения под знак суммы множителя $(-1)^i$ и заменой знака "плюс" на "минус" в первом случае перед вторым слагаемым, во втором – перед двумя слагаемыми. Элементы вектора $C^h = [C_k^h]$ ($k = 1, \ldots, 6 + N_h^*$) имеют вид $C_k^h = C_{0k}^h + C_{Pk}^h$, где C_{0k}^h определяются начальными условиями задачи в момент t_j, а C_{Pk}^h – величиной нагрузки P^h и P_1^h на шаге $[t_j, t_{i+1}]$. В итоге имеем

$$C_{01}^h = a_{01}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\chi}_i \lambda_{ij}, \quad C_{02}^h = a_{02}\sum_{i=1}^{N} \left((-1)^i - 1\right)\frac{\lambda_{ij}}{r_i}$$

$$C_{03}^h = \tilde{\eta}_1 + a_{03}\sum_{i=1}^{N} r_i \overline{\lambda}_{ij}, \quad C_{04}^h = \eta_{11} + \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \overline{\lambda}_{ij}$$

$$C_{05}^h = a_{05}\sum_{i=1}^{N}\left((-1)^i+1\right)\frac{\lambda_{ij}}{2r_i}, \quad C_{06}^h = \tilde{\eta}_2 + a_{06}\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\bar{\lambda}_{ij}r_i$$

$$C_{0,\,6+i_1}^h = \sum_{i=1}^{N}\left\{\delta_j\beta_{1ii_1}^h\vartheta_{\tilde{k}ij}^h\omega_{h\tilde{k}i}^h\left(a_{ij}^h+\left(\mu_{\tilde{k}}^h+\frac{\Delta t_j}{2}\right)b_{ij}^h\right)-\beta_{2ii_1}^h b_{ij}^h-\beta_{3ii_1}^h a_{ij}^h\right\}-$$

$$-2\upsilon\left(q_{k3j}^h-q_{\tilde{i}3j}^h\right)\quad\left(i_1=1,\ldots,N_h^*,\ \tilde{k}=3\right) \tag{2.20}$$

$$a_{01}=\tilde{a}_1/2,\quad a_{02}=a_{05}/l_h=\delta_j m_h l_h,\quad a_{03}=a_{06}=-1/l_h$$

$$\lambda_{ij}=a_{ij}^h p_{3ij}+b_{ij}^h p_{4ij},\quad \bar{\lambda}_{ij}=a_{ij}^h p_{5ij}+b_{ij}^h p_{6ij}$$

$$\tilde{\eta}_1=\tilde{\eta}_{11}+\left\{q_{\tilde{i}\tilde{n}j}^h\Big|_{\tilde{n}=4}+\Delta t_j\dot{q}_{\tilde{i}\tilde{n}j}^h\Big|_{\tilde{n}=4}\right\}\varepsilon,\quad \eta_{11}=-\tilde{\eta}_{11}l_h$$

$$\tilde{\eta}_{11}=-\left(q_{k\tilde{n}j}^h-q_{\tilde{i}\tilde{n}j}^h\right)/l_h-\Delta t_j\left(\dot{q}_{k\tilde{n}j}^h-\dot{q}_{\tilde{i}\tilde{n}j}^h\right)/l_h,\quad a_{ij}^h=\tilde{q}_{r\tilde{k}ij}^h,\quad b_{ij}^h=\dot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}ij}^h$$

Выражение для $\tilde{\eta}_2$ получаем, заменив в $\tilde{\eta}_1$ индексы $\tilde{i}$ на k: $p_{3ij}=-\omega_{h\tilde{k}i}^2\vartheta_{\tilde{k}ij}^h$, $p_{4ij}=$ $=p_{3ij}(\mu_{\tilde{k}}^h+\Delta t_j/2)$, $p_{5ij}=1+p_{3ij}$, $p_{6ij}=\Delta t_j+p_{4ij}$. Коэффициенты a_{ij}^h, b_{ij}^h в (2.20) определяются как коэффициенты Фурье от функций $\tilde{\tilde{q}}_{r\tilde{k}}^h(\eta_1,t)$ и $\dot{\tilde{\tilde{q}}}_{r\tilde{k}}^h(\eta_1,t)$ в форме (2.15) при учете (2.12). В качестве нагрузки P^h для e_h^* и e_h может быть учтена, например, ветровая нагрузка, действующая на мост. Для плоского элемента рассмотрим только нагрузку от колесных пар. Приведем ненулевые элементы C_{Pk}^h ($k=1,\ldots,6+N_h^*$) из C^h:

$$C_{P2}^h=\sum_{k_1=1}^{N_h^*}P_{1k_1}^h\left(1+a_{P2}\sum_{i=1}^{N}S_{ik_1}\nu_{1i}\right),\quad C_{P3}^h=\sum_{k_1=1}^{N_h^*}P_{1k_1}^h\sum_{i=1}^{N}S_{ik_1}\nu_{3i}$$

$$C_{P5}^h=\sum_{k_1=1}^{N_h^*}P_{1k_1}^h l_h\left[\frac{c_{k_1}}{l_h}-0.5+a_{P2}\sum_{i=1}^{N}S_{ik_1}\nu_{2i}\right],\quad a_{P2}=2\delta_j,\quad a_{P3}=-\tilde{\tilde{b}}_h/l_h$$

$$C_{P6+i_1}^h=a_{P4}\sum_{k_1=1}^{N_h^*}P_{1k_1}^h\sum_{i=1}^{N}S_{ik_1}\beta_{1ii_1}\vartheta_{\tilde{k}ij}^h,\quad a_{P4}=-\tilde{\tilde{b}}_h\delta_j \tag{2.21}$$

Элемент $C_{P3}^h\to C_{P6}^h$ путем введения под знак суммы множителя $(-1)^i$.

В (2.19)–(2.21) элементы матриц A^h, B^h, C^h с индексами $k, i=1,4$ ($\tilde{n}=2$) составляют в A^h, B^h, C^h блоки, соответствующие продольным колебаниям e_h^*, при этом в (2.19)–(2.21) для $\tilde{\eta}_{11}$ номер $\tilde{n}=2$. Оставшиеся в (2.20) элементы образуют блоки для изгибных колебаний, при этом в (2.20) для $\tilde{\eta}_{11}$ будет $\tilde{n}=3$. Заметим, что можно выделить соотношения из (2.19)–(2.21) для крутильных и изгибных колебаний для e_h^* в горизонтальной плоскости ($\varepsilon=-1$) и, построив (2.18) в общем случае, учесть действие и горизонтальной подвижной нагрузки (реакцию движущегося состава, например, на горизонтальные неровности пути). В этом случае нагрузка $P_{1k_1}^h$ в (2.21) становится нулевой.

3. Рассмотрим в качестве подвижной нагрузки железнодорожный состав (колонну автомобилей), состоящий из N_0 несвязанных вагонов – $\{e_h^\circ\}$ ($h=1,\ldots,N_0$). Будем

считать, что начальные условия для системы "состав – мост" $\{e_h, e_h^*, e_0\}$ – нулевые, а параметры, определяющие положение $\{e_h^\circ\}$ в системе $0_*X_*Y_*Z_*$, движущейся с постоянной скоростью v, отсчитываются от их значений в статическом равновесии. Обозначим через $\{e_h^{\circ\prime}\}$ элементы $\{e_h^\circ\}$, вовлеченные к моменту времени t в совместные колебания с $\{e_h, e_h^*\}$. Тогда для $\{e_h^{\circ\prime}\}$:

$$M_*\ddot{\overline{\mathbf{q}}}_C + C_*\dot{\overline{\mathbf{q}}}_C + K_*\overline{\mathbf{q}}_C = \overline{\mathbf{R}}_*, \overline{\mathbf{R}}_* = \Pi_*\mathbf{R}_* \tag{3.1}$$

где $\overline{\mathbf{q}}_C$ – вектор независимых обобщенных координат, определяющих $\{e_h^{\circ\prime}\}$ в системе $0_*X_*Y_*Z_*$; $M_* = [M_*^r]$, $C_* = [C_*^r]$, $K_* = [K_*^r]$ – блочно-диагональные матрицы масс, демпфирования и жесткости для $\{e_h^{\circ\prime}\}$; M_*^r, C_*^r, K_*^r – блоки матриц M_*, C_*, K_*, соответствующие экипажу с номером r [12]; Π_* – матрица соединения векторов $\overline{R}_*$ и R_*; R_* – вектор динамических добавок к статическим реакциям в точках контакта $\{e_h^{\circ\prime}\}$ с проезжей частью (системой $\{e_h^\circ\}$ и жестким внемостовым полотном).

Вагоны состава моделируются системой жестких тел, соединенных между собой упруго вязкими связями. Для формирования (3.1) используется метод кинетостатики [12, 13]. Учтем упруго вязкие связи между колесными парами и проезжей частью. Эти связи могут моделировать вертикальную и горизонтальную жесткости пути на мосту или упругость шин

$$\mathbf{R}_* = c_1(\mathbf{q}_{k0} - \mathbf{q}_{Ck}) + \gamma_1(\dot{\mathbf{q}}_{k0} - \dot{\mathbf{q}}_{Ck}) \tag{3.2}$$

где q_{k0} – вектор смещений в точках контакта упруго вязких элементов с проезжей частью; q_{Ck} – вектор смещений колес экипажей (подвектор вектора $\overline{q}_C$); c_1, γ_1 – векторы вертикальных и горизонтальных жесткостей (вязкостей) связей, моделирующих путь.

Выделим из R_*, q_{k0}, q_{Ck} – подвекторы, соответственно R_*°, q_{k0}°, q_{Ck}°, отвечающие только взаимодействию $\{e_h^{\circ\prime}\}$ с $\{e_h^*\}$, обозначив через R_*° динамические добавки к статическим реакциям колес, находящимся только на мосту, через q_{Ck}°, q_{k0}° – смещения колес, находящихся на мосту и точек контакта упруго-вязких элементов между колесами и проезжей частью. Очевидно, что в любой момент времени элементы q_{k0}, относящиеся к проезжей части вне моста остаются нулевыми. Заметим, при этом, что в каждый момент времени

$$\mathbf{q}_{k0}^\circ = \overline{\mathbf{q}}^\circ = \left[\mathbf{q}^{\circ h}\right] \quad \left(h = 1, \ldots, m^*\right) \tag{3.3}$$

Проведем дискретизацию (3.1) по времени (j = 0, 1, ...). В итоге, на шаге $[t_j, t_{i+1}]$ имеем

$$M_*\ddot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1} + C_*\dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1} + K_*\overline{\mathbf{q}}_{Cj+1} = \overline{\mathbf{R}}_{*j+1} \tag{3.4}$$

$$\overline{\mathbf{q}}_{Cj+1} = \overline{\mathbf{q}}_{Cj} + \dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj}\Delta t_j + \ddot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1/2}\left(\Delta t_j^2/2\right), \quad \dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1} = \dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj} + \ddot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1/2}\Delta t_j \tag{3.5}$$

Используя замены вида

$$\ddot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1} = 2\ddot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1/2} - \ddot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj}, \quad \mathbf{R}_{*j+1} = 2\mathbf{R}_{*j+1/2} - \mathbf{R}_{*j}, \quad \mathbf{q}_{Ckj+1} = 2\mathbf{q}_{Ckj+1/2} - \mathbf{q}_{Ckj} \tag{3.6}$$

получим, как и в [6, 12]:

$$\overline{\mathbf{q}}_{Cj+1} = G_1\overline{\mathbf{q}}_{Cj} + G_2\dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj} + G_3\mathbf{R}_{*j+1/2}$$

$$\dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj+1} = G_4\overline{\mathbf{q}}_{Cj} + G_5\dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj} + G_6\mathbf{R}_{*j+1/2} \tag{3.7}$$

$$G_1 = E - A^*K_*; \quad G_2 = \Delta t_j E - A^*\left(C_* + \left(\Delta t_j/2\right)K_*\right), \quad G_3 = A^*\Pi_*$$

$$G_4 = -\delta_j A^* K_* \Delta t_j, \quad G_5 = E - \delta_j A^*\left(C_* + \left(\Delta t_j/2\right)K_*\right)\Delta t_j$$

$$G_6 = \delta_j A^*\Pi_*\Delta t_j, \quad A^* = \left[M_* + \left(\Delta t_j/2\right)C_* + \left(\Delta t_j^2/4\right)K_*\right]^{-1}\left(\Delta t_j^2/2\right)$$

Запишем выражение (3.2) на шаге $[t_j, t_{i+1}]$ в форме

$$\mathbf{R}_{*j+1/2} = C_1\left(\mathbf{q}_{k0j+1/2} - \mathbf{q}_{Ckj+1/2}\right) + \gamma_1\left(\dot{\mathbf{q}}_{k0j+1/2} - \dot{\mathbf{q}}_{Ckj+1/2}\right) \tag{3.8}$$

Выделим из (3.7) подвекторы q_{Ck} и $\dot{q}_{Ck}$ в виде

$$\mathbf{q}_{Ckj+1} = \tilde{G}_1\overline{\mathbf{q}}_{Cj} + \tilde{G}_2\dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj} + \tilde{G}_3\mathbf{R}_{*j+1/2}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{Ckj+1} = \tilde{G}_4\overline{\mathbf{q}}_{Cj} + \tilde{G}_5\dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj} + \tilde{G}_6\mathbf{R}_{*j+1/2} \tag{3.9}$$

где $\tilde{G}_i$ – подматрицы матриц G_i ($i = 1, \ldots, 6$) из (3.7).

Используя замены из (3.5) и (3.6), подставим (3.9) в (3.8). В итоге получим соотношения для подвижной нагрузки на шаге $[t_j, t_{i+1}]$ в виде

$$\mathbf{R}_{*j+1/2} = W\ddot{\mathbf{q}}_{k0j+1/2} + \mathbf{L} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{R}^\circ_{*j+1/2} = W^\circ\ddot{\mathbf{q}}^\circ_{k0j+1/2} + \mathbf{L}^\circ \tag{3.11}$$

$$W = u^{-1}\left[\left(c_1/\delta_j\right) + \Delta t_j\gamma_1\right], \quad u = 2E + c_1\tilde{G}_3 + \gamma_1\tilde{G}_6, \quad \mathbf{q}_{Ck} = \tilde{E}\overline{\mathbf{q}}_C$$

$$L = u^{-1}\Big[2c_1\mathbf{q}_{k0j} + \left(\Delta t_j c_1 + 2\gamma_1\right)\dot{\mathbf{q}}_{k0j} -$$

$$-\left\{c_1\left(\tilde{G}_1 + \tilde{E}\right) + \gamma_1\tilde{G}_4\right\}\overline{\mathbf{q}}_{Cj} - \left\{c_1\tilde{G}_2 + \gamma_1\left(\tilde{G}_5 + \tilde{E}\right)\right\}\dot{\overline{\mathbf{q}}}_{Cj}\Big]$$

где W°, L° – подматрицы матриц W, L из (3.10).

4. Объединим в единую систему несущую конструкцию и подвижную нагрузку и сформируем разрешающую систему для $\{e_h, e_h^*, e_h^\circ\}$ на шаге $[t_j, t_{j+1}]$.

Предварительно для всех стержневых элементов $\{e_h^*\}$ преобразуем (2.18) к виду

$$\tilde{\mathbf{f}}^h_{j+1/2} = -K_h^*\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^h_{j+1/2} + \tilde{\mathbf{K}}_h^* \tag{4.1}$$

$$K_h^* = \left(A^h\right)^{-1}B^h, \quad \tilde{K}_h^* = \left(A^h\right)^{-1}\mathbf{C}^h$$

Для группы элементов $\{e_h\}$, исключая из (2.7)–(2.13) уравнения (2.10) и (2.13), как и в [10], имеем выражение

$$\mathbf{f}^h_{j+1/2} = -K_h\ddot{\mathbf{q}}^h_{j+1/2} + \tilde{\mathbf{K}}_h \tag{4.2}$$

Объединяя выражения (4.1) и (4.2) для системы $\{e_h, e_h^*\}$, получим

$$\bar{\mathbf{f}}^*_{j+1/2} = -\overline{K}^*\ddot{\overline{\mathbf{q}}}^*_{j+1/2} + \tilde{\mathbf{K}}^* \tag{4.3}$$

где $\bar{\mathbf{f}}^* = [\bar{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{R}}]'$ – вектор узловых силовых факторов и динамических добавок к стати-

ческим давлениям колес для $\{e_h, e_h^*\}$ в местных системах координат; $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}^* = [\ddot{\bar{\mathbf{q}}}, \ddot{\bar{\mathbf{q}}}^\circ]'$ – вектор узловых ускорений и ускорений в движущихся узлах системы $\{e_h, e_h^*\}$ в местных системах координат; $\bar{K}^*$, $\tilde{K}^*$ – блочная, квадратная матрица и, соответственно, вектор.

Воспользуемся условиями равновесия в узлах системы $\{e_h, e_h^*, e_h^\circ\}$. Для узлов стержневой системы на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ имеем [10, 11]:

$$E_1(\Gamma)'\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2} = 0 \tag{4.4}$$

где Γ – матрица соединения векторов $\bar{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{q}$:

$$\bar{\mathbf{q}} = \Gamma\mathbf{q} \tag{4.5}$$

а E_1 – диагональная, вспомогательная матрица [11]. Для подвижных узлов системы $\{e_h, e_h^*, e_h^\circ\}$ имеем на шаге $[t_j, t_{j+1}]$:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2} + \mathbf{R}^\circ_{*j+1/2} = 0 \tag{4.6}$$

Учтем граничные условия для стержневой системы на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ в форме [11]:

$$E_2\ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2} = \left(\mathbf{q}_{Sj+1} - \mathbf{q}_{Sj} - \dot{\mathbf{q}}_{Sj}\Delta t_j\right)\delta_j \tag{4.7}$$

где $E_2 = E - E_1$ – диагональная, вспомогательная матрица [11].

Представим, с учетом (3.3), матричное уравнение (4.3) в виде

$$\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2} = -k_{11}^*\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} - k_{12}^*\ddot{\mathbf{q}}^\circ_{k0j+1/2} + \tilde{\mathbf{k}}_1^* \tag{4.8}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2} = -k_{21}^*\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} - k_{22}^*\ddot{\mathbf{q}}^\circ_{k0j+1/2} + \tilde{\mathbf{k}}_2^* \tag{4.9}$$

где k_{ik}^*, k_i^* $(i, k = 1, 2)$ – блоки матриц $\bar{K}^*$ и $\tilde{K}^*$. Заметим, что в (4.8) k_{11}^* – ленточная подматрица, связанная с несущей конструкцией.

Подставим (4.8), с учетом (4.5) и (4.7), в (4.4), а (4.9) и (3.11) в (4.6). В итоге на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ получим систему разрешающих уравнений

$$M^*\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{j+1/2} = \tilde{\mathbf{M}}^* \quad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.10}$$

где $\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{\mathbf{q}}^h] = [\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}^\circ] = [\mathbf{q}, \mathbf{q}^\circ_{k0}]$, $M^* = [M_{ik}^*]$ $(i, k = 1, 2)$ – блочная, квадратная матрица, учитывающая жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики системы $\{e_h, e_h^*, e_h^\circ\}$ на шаге $[t_j, t_{j+1}]$, $\tilde{\mathbf{M}}^* = [\tilde{\mathbf{M}}_i^*]$ – вектор, отражающий влияние на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ начальных условий задачи в момент t_j и внешних воздействий.

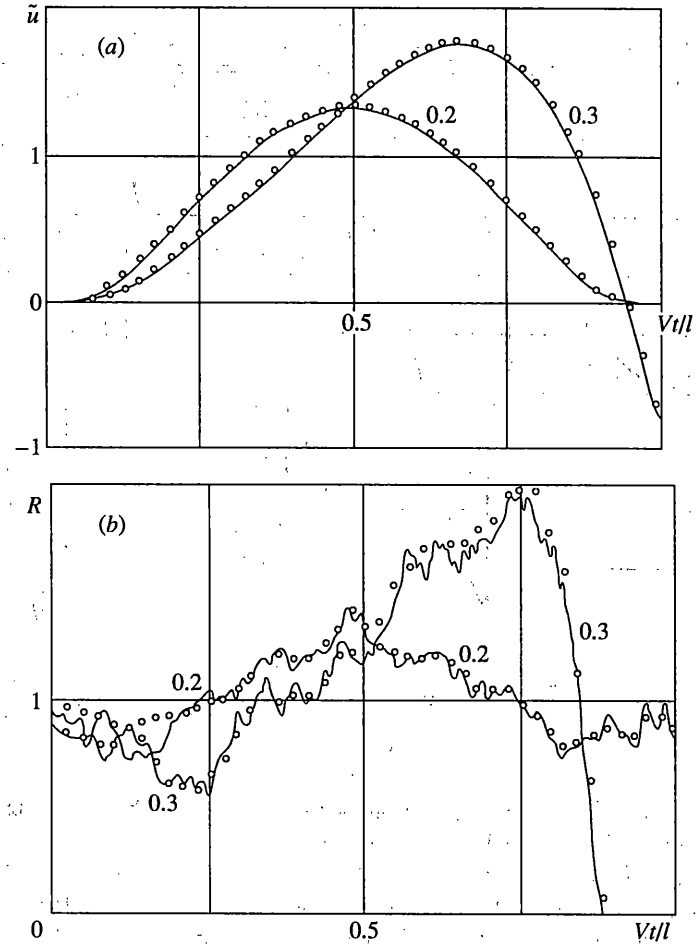
В (4.10) имеем

$$M_{11}^* = E_1(\Gamma)'k_{11}^*\Gamma + E_2, \quad M_{21}^* = k_{21}^*\Gamma, \quad M_{12}^* = E_1(\Gamma)'k_{12}^*$$

$$M_{22}^* = -W^\circ + k_{22}^*, \quad \tilde{M}_1^* = E_1(\Gamma)'\tilde{\mathbf{k}}_1^* + \left(\mathbf{q}_{Sj+1} - \mathbf{q}_{Sj} - \dot{\mathbf{q}}_{Sj}\Delta t_j\right)\delta_j$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2^* = \tilde{\mathbf{k}}_2^* + \mathbf{L}^\circ \tag{4.11}$$

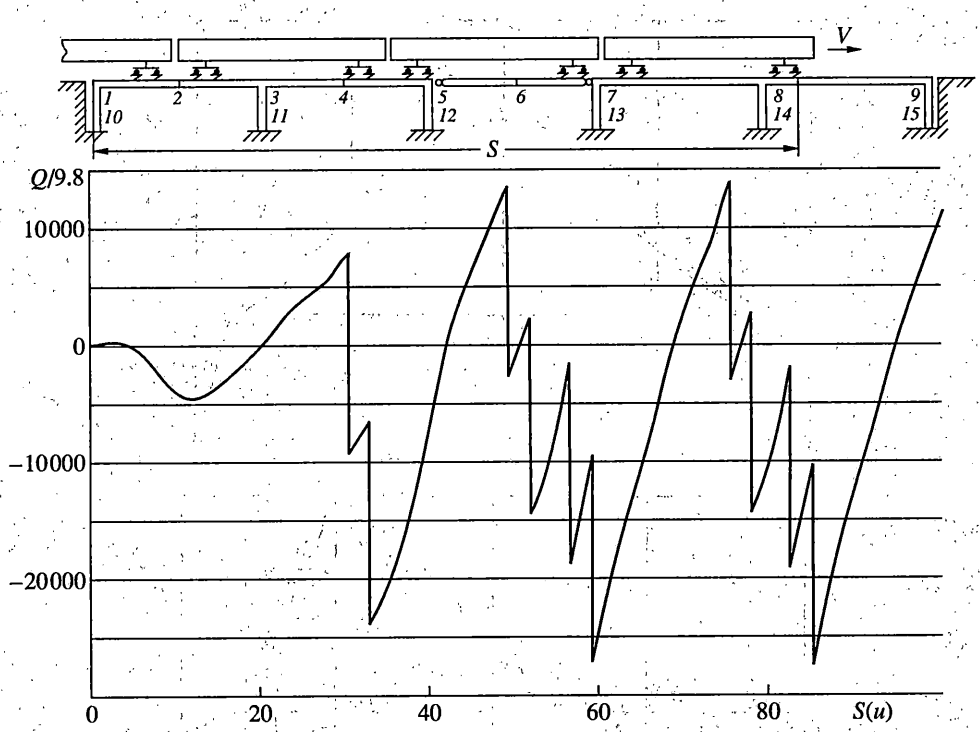
Проследим ход решения всей задачи при $j = 0, 1, 2, \ldots$ На шаге $[t_j, t_{j+1}]$, при начальных условиях в момент t_j определяется по (4.10) вектор $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{j+1/2}$, далее, используя (4.8), (4.9), (3.7), (2.15) и уравнения (2.11)–(2.13), вычисляются поля узловых усилий, смещений, скоростей для системы $\{e_h, e_h^*, e_h^\circ\}$ в момент t_{j+1}. Далее процесс повторяется.



Фиг. 2

5. Проведем тестирование методики. В [5] приведено решение задачи о действии на шарнирно-опертую балку движущегося груза. Это решение строилось на базе метода интегральных уравнений. Для сравнения результатов, при использовании (4.10) и по методике из [5], балку, по которой при нулевых начальных данных, с постоянной скоростью движется груз, представим как конечноэлементную систему с равными по длине элементами при $\tilde{m} = 4$ и $n = 5$. Балка и элементы при проведении числового эксперимента отвечали параметрам $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1$, из [5], где $\alpha = (\upsilon\pi/l)(EJ/\tilde{\tilde{m}})^{1/2}$, $\beta = M/(l\tilde{\tilde{m}})$, EJ – жесткость балки на изгиб, l – длина балки, M – масса груза, $\tilde{\tilde{m}}$ – погонная масса балки. Порядок системы (4.10), при решении задачи, был равен 11. На фиг. 2 указаны при различных α, в зависимости от положения груза на балке изменения величин $\tilde{u}$ и R, где $\tilde{u} = z(0.5l, t)/z_0$, $R = P_D/P$, $z_0 = 2Pl^3/(\pi^4 EJ)$, $z(y, t)$ – прогиб балки, P_D – давление груза на балку, P – вес груза. На фиг. 2 сплошные линии – результаты при использовании (4.10), светлые точки – результаты из [5].

Шаговая процедура (4.10) реализована и для высокоскоростного состава ЭПС2 [14], при его движении по железобетонной, многопролетной, рамной эстакаде (фиг. 3). Система "состав – мост" – $\{e_h, e_h^*, e_h^\circ\}$ состояла из шести вагонов и комбинированной

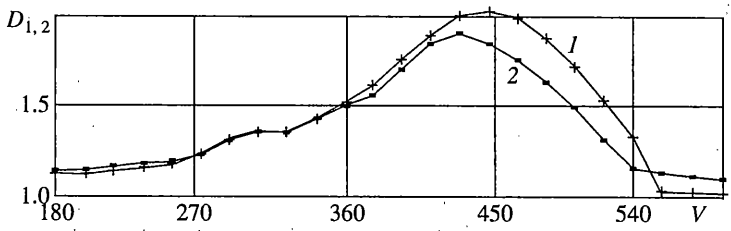


Фиг. 3

эстакады (фиг. 3) с пятью равными пролетами с длиной 20 м и опорными стойками с высотой 9 м, при $EJ_P = 15 \times 10^9$ Нм^2, $m_P = 10$ т/м, $EJ_C = 0.92 \times 10^9$ Нм^2, $m_C = 8.5$ т/м, $\mu = 0.0047$ с, где EJ_P, EJ_C – жесткости на изгиб ригелей, балки и, соответственно, опорных стоек, m_P, m_C – погонные массы ригелей, балки и, соответственно, опорных стоек, μ – коэффициент, учитывающий вязкость. Четырехосный вагон состава, как и в [12], моделировался плоской системой, состоящей из жестких тел, соединенных между собой упруго вязкими связями. Вертикальные смещения вагона определялись десятью обобщенными координатами. Параметры вагона для формирования матриц M_*^r, C_*^r, K_*^r взяты из [14], а мостового полотна из [3]. Путь считался гладким. Рамная эстакада моделировалась плоской конечноэлементной системой с $\tilde{m} = 14$, $n = 15$ (фиг. 3).

Система (4.10) меняла свой порядок с 46 до 61 в процессе решения задачи, при движении состава по эстакаде. На фиг. 3 показаны при $v = 360$ км/ч зависимость поперечной силы Q [Н] в середине второго пролета (узел 4) от положения состава на проезжей части моста, т.е. положения первого колеса первого вагона, определяемого на фиг. 3 отрезком $S = vt$ (S [м]). Длина вагона 26 м [14]. Шаг интегрирования Δt_j при $N = 45$ выбирался равным $\Delta t_j = 0.00202$ с, при числе шагов по времени равном 500. Отметим на фиг. 3 периодические скачки в изменении поперечной силы Q, отвечающие прохождению колесных пар над узлом 4. Величина скачков близка к 170 кН (статическому давлению колесных пар на рельс).

Предложенный метод позволяет исследовать поведение системы "состав – мост" при различных скоростях движения состава, включая критические (резонансные), отвечающие максимальным прогибам и изгибающим моментам в элементах конструкций при периодическом, кинематическом возбуждении моста однотипной вагонной нагрузкой [3, 6]. На фиг. 4 представлены графики изменения динамических коэффициентов по прогибам $D_1 = y_D/y_C$ (кривая *1*) и по моментам $D_2 = M_D / M_C$ (кривая *2*)



Фиг. 4

от скорости движения состава ЭПС2 по рамной эстакаде (фиг. 3), при этом для сечения в узле 2: y_C, M_C – максимальные прогиб и изгибающий момент при статическом загружении эстакады составом; y_D, M_D – максимальные динамический прогиб и изгибающий момент при движении состава со скоростью v. Отметим нелинейный характер изменения динамических коэффициентов $D_{1,2}$ в зависимости от v [км/ч]. Максимальные значения на фиг. 4 соответствуют критической скорости движения состава по эстакаде. Для определения y_D, M_D и y_C, M_C, использовалась система (4.10) и возможности применяемой шаговой процедуры для решения задач статики [10]. Разработанная шаговая процедура может быть использована для исследования влияния на поведение системы "состав – мост" вертикальных и горизонтальных неровностей на рельсовом пути или других факторов, например, начального состояния въезжающего состава и ветровой нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда НИОКР МПС РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Inglis C.E.* A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges. Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
2. *Болотин В.В.* Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 4. С. 109–115.
3. *Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Тарасенко В.П. и др.* Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984. 272 с.
4. *Филиппов А.П., Кохманюк С.С.* Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Киев: Наук. думка, 1967. 132 с.
5. *Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 231 с.
6. *Иванченко И.И.* О действии подвижной нагрузки на мосты // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 180–185.
7. *Borowicz T.* Wytężenie belek pod obsiążeniem ruchomym // Arch. inż. ląd. 1978. V. 24. № 2. P. 219–235.
8. *Garg V.K., Chu K.H., Wang T.L.* A study of railway bridge/vehicle interaction and evaluation of fatigue life // Earthquake Engineering and Struct. Dynam. 1985. V. 13. P. 687–709.
9. *Шапошников Н.Н., Кашаев С.К., Бабаев В.Б., Долганов А.А.* Расчет конструкций на действие подвижной нагрузки с использованием метода конечных элементов // Строит. механика и расчет сооружений. 1986. № 1. С. 50–54.
10. *Иванченко И.И.* Расчеты на подвижные и импульсивные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 9. С. 109–118.
11. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
12. *Иванченко И.И.* К динамическому расчету мостов на подвижную нагрузку в виде железнодорожного состава // Строит. механика и расчет сооружений. 1989. № 6. С. 26–31.
13. *Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д.* Динамика вагона. М.: Транспорт, 1991. 360 с.
14. *Коган А.Я., Львов А.А., Левинзон М.А.* Характеристики подвижного состава и спектральных неровностей пути для скоростей до 350 км/ч // Вест. ВНИИЖТ. 1991. № 3. С. 10–14.

Москва

Поступила в редакцию
8.12.1998