

УДК 624.07:534.1

© 2001 г. А.П. МАЛЫШЕВ

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОНСТРУКЦИОННОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

Современные методы описания конструкционного демпфирования, когда декремент колебаний не зависит от частоты, но может проявлять существенную амплитудную зависимость, ориентированы, прежде всего, на близкие к гармоническим периодические процессы [1–4]. В их основе чаще всего лежат различные способы аппроксимации петли гистерезиса или прямое вычисление энергетических потерь на базе закона сухого трения Кулона–Амонтона. Последний подход использовался при исследовании волновых переходных процессов и позволил решить много важных и интересных задач [5]. Однако ограниченность области практического применения простейшей модели сухого трения достаточно очевидна.

В настоящей работе предлагается способ описания конструкционного демпфирования, который позволяет моделировать потери на трение при любом характере протекания динамического процесса во времени, учитывать зависимость диссипативных сил от амплитуды и произвольное распределение их по конструкции.

1. Рассмотрим динамические процессы в однородном прямолинейном стержне, на внешней поверхности которого действуют силы трения. Подобная модель может быть использована для оценки динамики свай и бурильных труб, швейных и трикотажных игл, а также многих других деталей машин и элементов конструкций.

Систему уравнений, описывающих продольные колебания стержня, запишем в виде

$$\partial N / \partial x = \rho F \partial U / \partial t - p, \quad \partial N / \partial t = EF \partial U / \partial x \quad (1.1)$$

где  $p$  – погонное усилие трения.

Силы трения описываются соотношениями:

$$p = -q \operatorname{sign} U, \quad U \neq 0$$

$$|p| < q, \quad U = 0 \quad (1.2)$$

Когда они подчиняются простейшему закону сухого трения Кулона–Амонтона,  $q$  остается постоянным и зависит только от коэффициента трения и нормального давления.

Размерные величины заменяются безразмерными аналогами в соответствии со следующими зависимостями

$$N^0 = E_0 F_0 N, \quad U^0 = c_0 U, \quad x^0 = (F_0)^{1/2} x, \quad t^0 = t (F_0)^{1/2} c_0, \quad c_0 = (E_0 / \rho_0)^{1/2} \\ \rho^0 = \rho_0 \rho, \quad E^0 = E_0 E, \quad F^0 = F_0 F, \quad p^0 = E_0 (F_0)^{1/2} p \quad (1.3)$$

Здесь верхним индексом (0) помечены размерные величины, а нижним индексом (0) – размерные параметры стержня в некотором характерном сечении.

Численное моделирование выполнялось по методике [6]. Были рассмотрены свободные колебания стержня длиной  $l = 10$ . Остальные его параметры:  $E = 1$ ,  $F = 1$ ,  $\rho = 1$ . Предварительно стержень растягивается так, что во всех сечениях действует единичная продольная сила, а в момент  $t = 0$  один или оба торца освобождаются.

Численный эксперимент показал, что если силы трения подчиняются закону Кулона-Амонтона, то параметр  $q$  связан с логарифмическим декрементом колебаний  $\delta$  зависимостью:

$$q = kA\delta/l \quad (1.4)$$

где  $A$  – амплитуда продольной силы,  $k = 0.5$  для стержня с одним закрепленным торцом и  $k = 0.25$  для свободного стержня. Декремент вычислялся, как логарифм отношения двух соседних амплитуд силы одного знака, а в качестве  $A$  принималась амплитуда противоположного знака, которая лежит между ними.

Примем в качестве меры, определяющей влияние трения на параметры динамического процесса в каждой расчетной ячейке, отношение силы полного торможения  $p_b$  к амплитуде упругой силы. Величину  $p_b$  легко найти из условия равенства нулю относительной скорости на следующем временном слое

$$p_b = [(N_{n-1} - N_n)\Delta t / \Delta x - \rho F U_*] / \Delta t \quad (1.5)$$

где  $N_n$ ,  $N_{n-1}$  и  $U_\infty$  – среднеинтегральные значения параметров соответственно на сторонах  $x_n$ ,  $x_{n-1}$  и  $t_{n-1/2}$  расчетной ячейки размером  $\Delta t \times \Delta x$ .

Итак, с учетом (1.4) полагаем

$$q = k \frac{\delta A}{l} \left( \frac{p_b \Delta x}{A} \right)^\alpha \quad (1.6)$$

или, обозначив

$$\beta = k\delta A^{1-\alpha}/l \quad (1.7)$$

принимаем

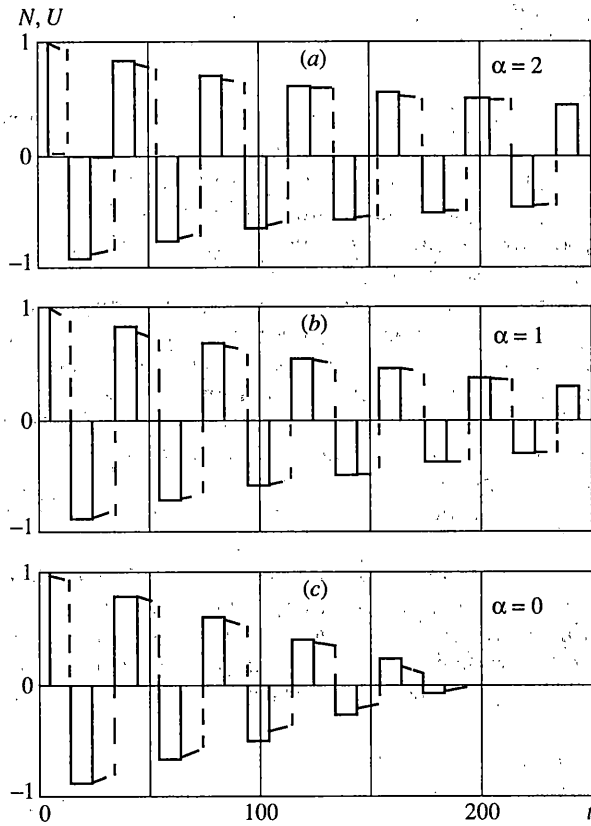
$$q = \beta(p_b \Delta x)^\alpha \quad (1.8)$$

В результате численного моделирования свободных колебаний было установлено, что коэффициент  $k$  остается постоянным вплоть до высоких уровней трения. Для стержня с одним закрепленным торцом  $k = 0.5$  до  $\beta = 0.01$ . Когда  $\beta = 0.1$ , величина коэффициента несколько увеличивается:  $k = 0.51$  для  $\alpha = 1$  и  $k = 0.55$  для  $\alpha = 2$ . Это связано с существенным изменением формы волны в пределах одного цикла колебаний. Однако во всем диапазоне сил трения, представляющем практический интерес, можно считать, что  $k = 0.5$ . Аналогично, для стержня с обоими свободными торцами можно принять  $k = 0.25$ .

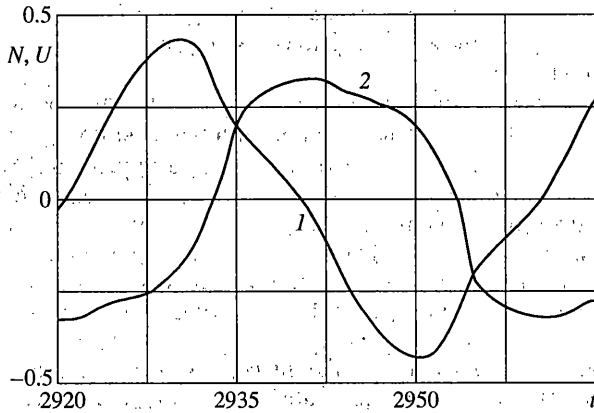
Анализ результатов показал, что в процессе затухания свободных колебаний величина  $\delta A^{1-\alpha}$  остается постоянной для фиксированных значений  $\alpha$  и  $\beta$ . Таким образом, если принять  $\alpha = 0$ , декремент оказывается обратно пропорциональным амплитуде. Подобная зависимость соответствует сухому трению с постоянным значением  $q$ . Показатель  $\alpha = 1$  соответствует трению, при котором декремент не зависит от амплитуды, а  $\alpha = 2$  задает декремент, линейно зависящий от амплитуды. В отдельных случаях можно достичь улучшения сходимости экспериментальных и расчетных данных за счет введения дробных или даже переменных величин  $\alpha$ , однако ограничимся тремя указанными наиболее характерными значениями.

На фиг. 1 показаны примеры полученных зависимостей  $N(t)$  (сплошные линии) и  $U(t)$  (штриховые линии), которые соответствуют  $\beta = 0.01$  и  $\alpha = 2, 1, 0$ .

Вся процедура введения диссипативных сил осталась такой же, как для сухого трения, но уже при переменной величине  $q$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве еще одной модельной задачи рассматривались установившиеся колебания стержня с одним закрепленным торцом. На другой торец действует гармоническая сила единичной амплитуды с частотой, равной первой резонансной частоте стержня. При таком нагружении амплитуда продольной силы в произвольном сечении может быть вычислена по формуле

$$A = \pi f / \delta \quad (1.9)$$

где  $f$  — коэффициент, зависящий от формы колебаний.

Подставив  $\delta$  из (1.7) в (1.9), получим

$$f = A^\alpha \beta / (k\pi) \quad (1.10)$$

Расчеты показали, что при  $\beta \leq 0.01$  форма колебаний остается неизменной, о чем свидетельствуют постоянные значения  $f = 0.464$  ( $\alpha = 1$ ) и  $f = 0.488$  ( $\alpha = 2$ ). При высоких уровнях трения форма колебаний начинает искажаться. Если  $\beta = 0.1$ , то  $f = 0.470$  ( $\alpha = 1$ ) и  $f = 0.499$  ( $\alpha = 2$ ). На фиг. 2 показаны соответствующие зависимости  $N(t)$  и  $U(t)$  ( $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0.1$ ) в среднем сечении стержня длиной  $l = 10$ , на которых уже видны заметные отклонения от гармонического закона.

Наконец, исследовалось распространение волн возмущений в полубесконечном стержне при внезапном приложении к торцу единичной силы. Для сухого трения ( $\alpha = 0$ ) решение этой задачи получено аналитически [7], и оно полностью совпало с результатами численного моделирования. На фиг. 3 для  $\beta = 1$  показаны профили волны продольной силы в моменты времени  $t = 5$  (а) и  $t = 10$  (б), соответствующие разным значениям  $\alpha$ . Характер распределения возмущений при  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 2$  достаточно близкий, хотя при  $\alpha = 1$  затухание проявляется несколько сильнее. Когда  $\alpha = 0$ , волна преодолевает расстояние  $l_f = 2$ , после чего стержень полностью тормозится.

2. Предлагаемый способ моделирования трения дает возможность воспроизводить и более сложные зависимости, характеризующие силы внешнего сопротивления. Например, часто конструкционное демпфирование связано с упруго-фрикционным взаимодействием отдельных частей конструкции [2]. Рассмотрим предыдущую задачу для случая, когда на внешней поверхности стержня действуют упругофрикционные усилия

$$\begin{aligned} p &= -q \operatorname{sign} U - \xi u, \quad U \neq 0 \\ p &= p_b, \quad U = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

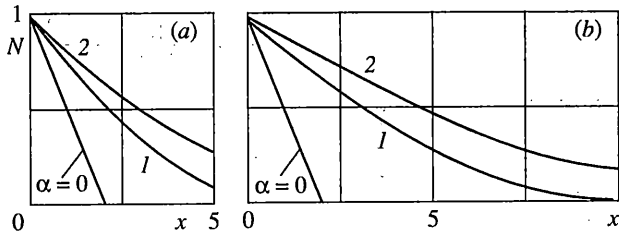
Здесь  $u$  – смещение сечения стержня,  $\xi$  – жесткость, характеризующая упругую компоненту сил сопротивления,  $p_b$  определяется формулой (1.5), а  $q$  – (1.8). Подобное моделирование упругофрикционных сил позволяет учесть амплитудную зависимость диссипативной компоненты.

На фиг. 4 приведены полученные распределения силы для момента времени  $t = 10$  при  $\xi = 0.05$  (а) и  $\xi = 5$  (б). Сплошными линиями показаны профили волн, соответствующие случаю, когда силы трения отсутствуют. Упругие нагрузки на внешней поверхности стержня весьма существенно влияют на распределение возмущений. При  $\xi = 5$  в стержне видны две зоны значительных возмущений – около торца и вблизи фронта волны, где профиль волны приобретает характерный осциллирующий вид. В остальной части стержня уровень возмущений существенно ниже. Ширина узкого пика, непосредственно примыкающего к фронту волны, убывает по мере его распространения.

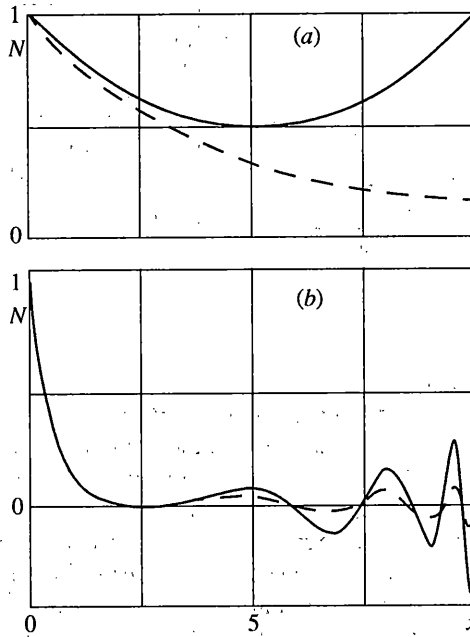
Штриховыми линиями показаны профили волн уже при наличии трения ( $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ). За счет его влияния возмущения в прифронтальной зоне интенсивно затухают и для  $\xi = 5$  остаются практически только в ближайшей окрестности нагружаемого торца. В целом, силы упругофрикционного взаимодействия вызывают перераспределение энергии и ее локализацию в отдельных зонах.

Обычно при оценке влияния трения на динамику конструкций распределение сил неупругого сопротивления полагается равномерным, а в качестве меры трения используется логарифмический декремент колебаний или коэффициент поглощения, которые являются, по сути дела, интегральными характеристиками рассеяния энергии во всей конструкции. Предлагаемый способ моделирования трения позволяет учитывать неравномерное распределение диссипативных сил.

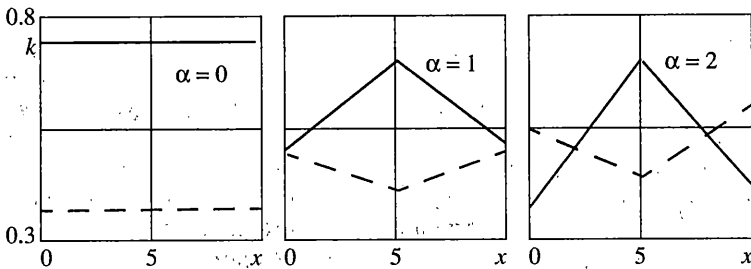
Пусть параметр  $q$  в (1.8), характеризующий уровень трения, меняется линейно по



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

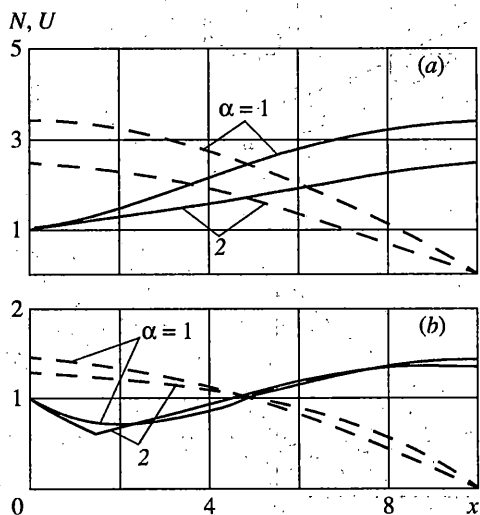
длине стержня, причем рассмотрим два варианта:

$$(a) \beta = \beta_1 x$$

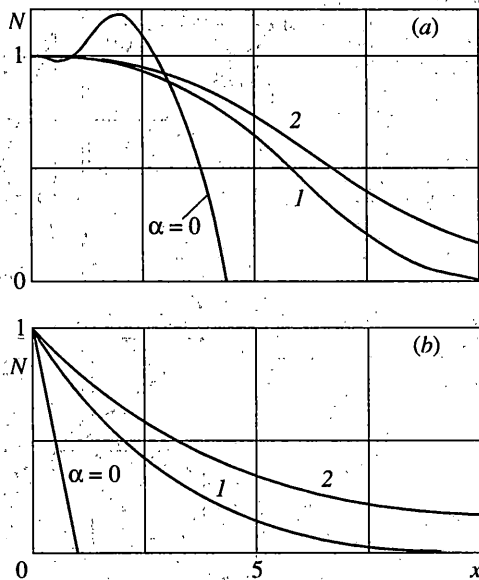
$$(b) \beta = \beta_1 (l - x)$$

(2.2)

По варианту (a)  $\beta$  возрастает с удалением от торца  $x = 0$ , а по варианту (b) — убывает.



Фиг. 6



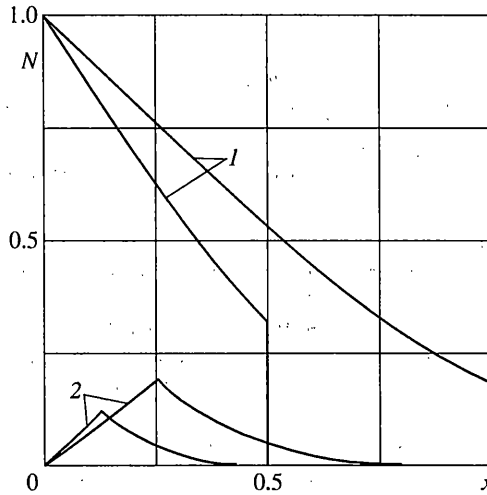
Фиг. 7

Анализ свободных колебаний стержня с одним свободным торцом  $x = 0$  показал, что коэффициент  $k$ , который при равномерном распределении сил трения оставался практически постоянным, становится переменным. На фиг. 5 показаны значения  $k$  для разных  $\alpha$  в трех характерных сечениях – в окрестностях торцов ( $x = 0.04$ ,  $x = 9.96$ ) и в середине стержня ( $x = 5$ ). Для наглядности значения  $k$  соединены прямолинейными отрезками. Сплошные линии соответствуют варианту (а), штриховые – варианту (б). В расчетах было принято  $\beta_1 = 0.002$ , что соответствует среднеинтегральному  $\beta = 0.01$ .

Когда  $\alpha = 0$ , т.е. действует сухое кулоново трение, затухание колебаний протекает одинаково во всех сечениях стержня. Для варианта (а) уровень затухания ниже, а для варианта (б) – выше, чем в случае равномерного распределения сил трения. Заметим здесь, что согласно (1.7) увеличение  $k$  при фиксированном  $\beta$  и прочих равных условиях эквивалентно уменьшению декремента колебаний.

Когда  $\alpha \neq 0$ , затухание колебаний в средней части стержня и на краях проходит с разной интенсивностью. Надо сказать, что за счет перетекания энергии от сечения к сечению в этом случае  $k$  заметно меняется от периода к периоду. За первые 15 периодов эти изменения лежат в пределах 5–10% от средних значений. На фиг. 5 приведены результаты, осредненные по первым 15 периодам колебаний. При  $\alpha = 1$  и нарастающих по варианту (а) силах трения затухание в среднем сечении ниже, чем по краям, а при убывающем по варианту (б) трении, наоборот, колебания в середине стержня затухают быстрее. Когда  $\alpha = 2$ , указанные особенности остаются такими же, но выражены сильнее, чем для  $\alpha = 1$ .

Моделирование стационарных колебаний, возбуждаемых на торце  $x = 0$  гармонической силой с единичной амплитудой и резонансной частотой  $\omega = 0.05\pi$ , подтвердило, что при линейном нарастании  $\beta$  уровень реакции примерно вдвое выше, чем при убывании. На фиг. 6 показаны огибающие модулей амплитуд  $N$  (сплошные линии) и  $U$  (штриховые линии) для  $\beta_1 = 0.02$ ,  $\alpha = 1$  и 2. Фиг. 6, а соответствуют варианту (а), фиг. 6, б – варианту (б). Видно, что характер изменения  $\beta$  по длине стержня самым существенным образом влияет на общий уровень реакции и распределение амплитуд. Когда  $\alpha = 2$ , это влияние выражено сильнее. В частности, характерный изгиб огибаю-



Фиг. 8

щей  $N$  в левой половине стержня (фиг. 6,  $b$ ), имеющий плавную форму при  $\alpha = 1$ , принимает вид достаточно резкого излома, при  $\alpha = 2$ .

Распределение сил трения по конструкции оказывает значительное влияние и на распространение отдельных волн возмущений. На фиг. 7, где использованы обозначения фиг. 6, показаны профили волн, возникающих в полубесконечном стержне, когда к его торцу приложена сила, которая меняется во времени, как функция Хевисайда. Расчет проводился при  $\beta = 0.2$ . И здесь вариант ( $a$ ) обеспечивает более высокое демпфирование, чем вариант ( $b$ ). Заметим, что при переходе от одного варианта к другому кривизна профилей в области, примыкающей к торцу, меняет знак. Общий уровень затухания повышается с уменьшением  $\alpha$ . Когда  $\alpha = 0$ , видно торможение фронтов волн сухим трением, причем для варианта ( $b$ ) возмущения наблюдаются практически только в узкой окрестности торца.

3. Силы трения могут возникать не только за счет взаимодействия тел с неподвижным основанием, но и при относительном смещении конструктивных элементов, каждый из которых вовлечен в движение. Подобные задачи возникают, когда исследуется динамика конструкций, несущих защитные покрытия, труб и отсеков с наполнением, тросов и т.п. Простейшей моделью для их описания являются, по-видимому, два соприкасающихся стержня, между которыми действуют силы трения. Продольное движение таких стержней можно описать следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \partial N_i / \partial x &= m_i \partial U_i / \partial t + (-1)^i p \\ \partial N_i / \partial t &= E_i F_i \partial U_i / \partial x, \quad m_i = \rho_i F_i \quad (i = 1, 2) \\ p &= -g \operatorname{sign}(U_1 - U_2), \quad U_1 - U_2 \neq 0 \\ |p| &< q, \quad U_1 - U_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $i$  – номер стержня.

Как и ранее полагаем, что  $q$  определяется соотношением (1.8), где, как нетрудно показать, усилие полного торможения  $p_b$  для данного случая можно вычислить по формуле

$$p_b = \{m_1 m_2 (U_*^{(2)} - U_*^{(1)}) + [m_1 (N_n^{(2)} - N_{n-1}^{(2)})] \Delta t / \Delta x\} / (m_1 + m_2) \Delta t \quad (3.2)$$

Здесь индексы 1 и 2 – номера стержней, а остальные обозначения аналогичны использованным в (1.5)–(1.7).

Было проведено численное моделирование распространения продольных волн в двух стержнях, соприкасающихся по всей длине. Торцы  $x = 10$  обоих стержней закреплены, а торец  $x = 0$  второго стержня остается свободным. Параметры стержней  $E_1 = E_2 = 1$ ,  $F_1 = F_2 = 1$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 16$ , так что скорость звука в стержнях различная  $c_2 = 0.25 c_1$ .

На фиг. 8 для моментов времени  $t = 5$  и  $t = 10$  показаны профили волн  $N$  в первом (линии 1) и во втором (линии 2) стержне, когда к торцу  $x = 0$  первого стержня мгновенно прикладывается постоянная единичная сила. Трение характеризуется параметрами  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ .

Взаимное проскальзывание стержней и сопутствующее рассеяние энергии вызывают затухание возмущений в окрестности головного фронта. Во втором стержне четко виден фронт, бегущий со скоростью  $c_2$ . Возмущения здесь нарастают за счет энергии, перетекающей от первого стержня.

Приведенные в работе результаты свидетельствуют о том, что предлагаемый способ учета сил трения обладает достаточной гибкостью и в совокупности с методикой численного моделирования [6] позволяет исследовать широкий круг динамических проблем, связанных с проявлениями нелинейных диссипативных сил.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
2. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
3. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
4. Писаренко Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. Киев: Наукова думка, 1985. 236 с.
5. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. лицей, 1998. 272 с.
6. Мальшев А.П. Численное моделирование волновых процессов в балке, соприкасающейся с шероховатой поверхностью. // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 149–155.
7. Никитин Л.В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения. // Инж. ж. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 126–130.

Москва

Поступила в редакцию  
8.04.1999