

УДК 624.072.4

© 2001 г. Г.Г. ЗОРИНА, П.Г. ПИМШТЕЙН, Л.Б. ЦВИК

О СЖАТИИ УПРУГОГО КОЛЬЦА ДВУМЯ ДИАМЕТРАЛЬНО ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ СИЛАМИ

В рамках подхода, предложенного С.П. Тимошенко [1] и использующего решение плоской задачи теории упругости о сжатии диска, получено решение аналогичной задачи о сжатии однородного изотропного кольца, эффективное при различных значениях β ($\beta = r_2/r_1$, где r_1, r_2 – внутренний и наружный радиусы кольца). Общий член ряда, входящего в выражение решения, представлен аналитически. Полученное решение использовано для оценки погрешности приближенных решений, даваемых методом конечных элементов (МКЭ), а также для оценки границ применимости приближенного решения, даваемого теорией тонкостенных колец. На основе исследования распределения радиальных напряжений в сплошном кольце выявлены особенности расслоения сжимаемого двухслойного кольца, слои которого гладки, соприкасаются без натяга и равны по толщине: при больших значениях параметра β число зон расслоения – две (середины зон расслоения находятся на линии, перпендикулярной линии действия сил), при малых β – четыре. В последнем случае участки расслоения смещаются к линии действия сил по мере уменьшения β .

Рассмотрим задачу о плоско-напряженном состоянии кругового кольца, сжимаемого снаружи двумя сосредоточенными силами P , направленными к центру кольца вдоль вертикального диаметра. Пусть r, θ – полярные координаты с началом в центре кольца и угол θ отсчитывается от линии действия сил по часовой стрелке. Непосредственное разложение общего решения задачи о деформировании кольца в ряд Фурье, данное П.Ф. Папковичем [2], приводит в рассматриваемом случае к рядам, сходимости которых вблизи места приложения сил нарушается. В работе [3] решение Папковича преобразовано к виду, вычислительно эффективному и при рассмотрении сосредоточенных воздействий на кольцо. С помощью методов контурного интегрирования мероморфных функций решение в [3] представлено в виде суммы сходящегося несобственного интеграла и быстро сходящихся рядов, скорость сходимости которых слабо зависит от значения параметра β . Значение несобственного интеграла необходимо определять при этом численно, выделяя известные особенности. Структура решения в этом случае может зависеть от точки, в которой определяются напряжения. Указанный подход позволяет детально учесть особенности вычислительной ситуации и минимизировать объем вычислений. В данной работе при рассмотрении кольца использован подход, предложенный в [1] и основанный на выделении особенности в виде известного решения для диска, сжимаемого аналогично кольцу. Выделение особенностей, связанных с действием сосредоточенных сил, позволяет свести решение исходной задачи к построению ряда Фурье, сходящегося равномерно внутри кольца [1]. Ряды, построенные в [1], при значениях β , близких к 1, сходятся медленнее, чем ряды, полученные в [3], слагаемые которых имеют множители, экспоненциально (при больших номерах) убывающие с возрастанием номера члена ряда. В то же время решение в [1] свободно от необходимости численного интегрирования и представимо

в форме, единой для различных точек кольца. Указанные особенности упрощают алгоритмизацию этого решения и его реализацию с помощью вычислительной техники. Численное определение интегралов, входящих в выражение коэффициентов ряда Фурье, позволило С.П. Тимошенко с приемлемой точностью описать деформирование кольца, толстостенность которого β равна двум. При меньших значениях параметра β сходимость рядов замедляется (но не исчезает), и трудоемкость получения решения с заданной точностью (при численном определении коэффициентов Фурье) возрастает. В данной работе рассматривается задача представления упомянутых коэффициентов ряда Фурье в замкнутом и аналитически точном виде, а также задача представления полученного решения в форме, удобной при применении вычислительной техники. Кроме того, ставится задача применения полученного решения в качестве эталонного при оценке погрешности различных приближенных подходов в вычислительном эксперименте. Исследуются также распределения радиальных напряжений на срединной поверхности сжимаемых колец, в том числе определяется число точек смены знака этих напряжений. Последнее важно для выявления закономерностей расслоения сжимаемых слоистых колец, в частности, для определения числа зон возможного отставания друг от друга соприкасающихся поверхностей слоев, составляющих кольцо.

Рассмотрим сжатие двумя силами диска единичной толщины. Компоненты напряжений описываются в этом случае равенствами [1]:

$$\sigma_{\rho}^{\partial} = \frac{2P}{\pi r_{\text{н}}} \left\{ \frac{1}{2} - \left[\frac{(1 + \rho \cos \theta)(\rho + \cos \theta)^2}{(1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} + \frac{(1 - \rho \cos \theta)(\rho - \cos \theta)^2}{(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right] \right\} \quad (1)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{\partial} = \frac{2P}{\pi r_{\text{н}}} \left\{ \sin \theta \left[\frac{(1 + \rho \cos \theta)(\rho + \cos \theta)^2}{(1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} - \frac{(1 - \rho \cos \theta)(\rho - \cos \theta)^2}{(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right] \right\} \quad (2)$$

где σ_{ρ}^{∂} и $\tau_{\rho\theta}^{\partial}$ – радиальные и касательные напряжения в диске

$$\rho = r/r_2 \quad (3)$$

Аналогично могут быть представлены кольцевые напряжения $\sigma_{\theta}^{\partial}$. Выделим в диске кольцо с внутренним радиусом $\rho_1 = r_1/r_1$ и наружным $\rho_2 = 1$. Тогда внутренняя поверхность кольца оказывается нагруженной напряжениями, даваемыми формулами (1), (2) при $\rho = \rho_1$. Освобождая эту поверхность путем приложения напряжений, равных действующим в диске по величине и противоположных по знаку, можно получить искомое напряженное состояние кольца со свободной внутренней поверхностью, сжимаемого снаружи двумя силами. Описанной схеме построения соответствуют равенства

$$\sigma_{\rho}^k = \sigma_{\rho}^{\partial} - \sigma_{\rho}^{\circ}, \quad \tau_{\rho\theta}^k = \tau_{\rho\theta}^{\partial} - \tau_{\rho\theta}^{\circ}, \quad \sigma_{\theta}^k = \sigma_{\theta}^{\partial} - \sigma_{\theta}^{\circ} \quad (4)$$

где $\sigma_{\rho}^k, \tau_{\rho\theta}^k, \sigma_{\theta}^k$ – искомые напряжения в кольце; $\sigma_{\rho}^{\circ}, \tau_{\rho\theta}^{\circ}, \sigma_{\theta}^{\circ}$ – напряжения в рассматриваемом кольце, наружная поверхность которого свободна, а внутренняя нагружена напряжениями (1), (2), вычисленными при значении $\rho = \rho_1$; $\sigma_{\rho}^{\partial}, \tau_{\rho\theta}^{\partial}$ и $\sigma_{\theta}^{\partial}$ – напряжения в диске радиусом r_2 , сжимаемом аналогично кольцу.

Разложим теперь величины $\sigma_{\rho}^{\partial}, \tau_{\rho\theta}^{\partial}$ в ряды Фурье, структура которых определяется симметрией напряженного состояния относительно линий $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$:

$$\sigma_{\rho}^{\partial} = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{2m}(\rho) \cos 2m\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{\partial} = \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{2m}(\rho) \sin 2m\theta \quad (5)$$

Рассмотрим для определенности построение функций $\tau_{2m}(\rho)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). Нахождение функций $\sigma_{2m}(\rho)$ осуществляется аналогично. Из (2) с учетом нечетности распределения касательных напряжений по углу θ для коэффициентов Фурье $\tau_{2m}(\rho)$ получаем

$$\tau_{2m}(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(\rho, \cos \theta) - f(\rho, -\cos \theta)] \sin \theta \sin 2m\theta d\theta \quad (6)$$

$$f(\rho, \cos \theta) = \frac{2P}{\pi r_n} [(\rho + \cos \theta)(1 + \rho \cos \theta) / (1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2] \quad (7)$$

Замена переменных $\theta' = \theta + \pi$ позволяет записать

$$-\int_0^{\pi} f(\rho, -\cos \theta) \sin \theta \sin 2m\theta d\theta = \int_{-\pi}^0 f(\rho, \cos \theta) \sin \theta \sin 2m\theta d\theta \quad (8)$$

Учитывая (8) и периодичность подынтегральных функций, для $\tau_{2m}(\rho)$ получаем представление

$$\tau_{2m}(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \cos \theta) \sin 2m\theta d\theta \quad (9)$$

Непосредственное взятие интеграла (9) и аналогичного интеграла для σ_{2m} с помощью известных соотношений [4, н. 2.563] позволило при значениях $m = 1, 2, 3$ записать

$$\tau_{2m}(\rho) = \frac{2P}{\pi r_2} (1 - \rho^2) m \rho^{2m-2}, \quad \sigma_{2m}(\rho) = \frac{2P}{\pi r_2} [(m-1)\rho^{2m} - m\rho^{2m-2}] \quad (10)$$

Для доказательства справедливости первой из формул при любых m рассмотрим сходящийся ряд

$$T(\rho, \theta) = \frac{2P}{\pi r_2} (1 - \rho^2) \sum_{m=1}^{\infty} m \rho^{2m-2} \sin 2m\theta \quad (11)$$

и покажем, что он сходится к решению (2). Из (11) следует

$$\int_0^{\rho} \frac{2\rho T(\rho, \theta)}{(1 - \rho^2)} d\rho = \frac{2P}{\pi r_2} \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{2m} \sin 2m\theta \quad (12)$$

Почленное интегрирование ряда (11) допустимо, так как при $\rho < 1$ этот ряд сходится равномерно относительно ρ . Ряд в правой части (12) является частью известного [4, н. 1.447] разложения в ряд ядра Пуассона

$$\frac{\rho \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \sin m\theta \quad (13)$$

Используя (13) для определения суммы ряда в правой части (12), перепишем это равенство в виде

$$\int_0^{\rho} \frac{2\rho T(\rho, \theta)}{(1 - \rho^2)} d\rho = \frac{2P}{\pi r_2} \frac{1}{2} \rho \sin \theta \left[\frac{1}{(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2)} - \frac{1}{(1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)} \right] \quad (14)$$

Продифференцировав его по переменной ρ , приходим к тождеству

$$T(\rho, \theta) \equiv \tau_{\rho\theta}^2 \quad (15)$$

где $\tau_{\rho\theta}^{\partial}$ определяется равенством (2). Второе из равенств (10) доказано, первое доказывается аналогично. Разложение (5), (10) эквивалентно представлению решения задачи о сжатии диска в виде разложения в ряд Лорана соответствующих комплексных потенциалов, приведенному в [5], и получено независимо описанным здесь способом.

Для построения решения исходной задачи рассмотрим теперь величины $\sigma_{\rho}^{\circ}, \tau_{\rho\theta}^{\circ}, \sigma_{\theta}^{\circ}$ – напряжения в кольце, внутренняя поверхность которого нагружена совокупностью нагрузок $\sigma_{2m}(\rho_1)\cos 2m\theta, \tau_{2m}(\rho_1)\sin 2m\theta$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), соответствующих разложению в ряд Фурье напряжений σ_{ρ}^{∂} и $\tau_{\rho\theta}^{\partial}$ при значении $\rho = \rho_1$, а наружная поверхность свободна

$$\sigma_{\rho}^{\circ} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma^{2m}(\rho) \cos 2m\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{\circ} = \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{2m}(\rho) \sin 2m\theta, \quad \sigma_{\theta}^{\circ} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{\theta}^{2m}(\rho) \cos 2m\theta \quad (16)$$

При $m = 0$ эти напряжения определяются известными формулами Ламе. При других m – равенствами [2]:

$$\begin{aligned} \sigma^{2m}(\rho) &= -2m(2m-1)a_{2m}\rho^{2m-2} + (2m+2-4m^2)b_{2m}\rho^{2m} - \\ &- 2m(2m+1)\alpha_{2m}\rho^{-2m-2} - (2m-2+4m^2)\beta_{2m}\rho^{-2m} \\ \tau^{2m}(\rho) &= 2m(2m-1)a_{2m}\rho^{2m-2} + 2m(2m+1)b_{2m}\rho^{2m} - \\ &- 2m(2m+1)\alpha_{2m}\rho^{-2m-2} - 2m(2m-1)\beta_{2m}\rho^{-2m} \end{aligned} \quad (17)$$

Четверки констант $a_{2m}, b_{2m}, \alpha_{2m}, \beta_{2m}$, входящие в (17), необходимо последовательно определять из четверок алгебраических уравнений – краевых условий при $r = r_1, r = r_2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{2m}(\rho_1) &= \sigma_{2m}(\rho_1), \quad \tau_{\rho\theta}^{2m}(\rho_1) = \tau_{2m}(\rho_1) \\ \sigma_{\rho}^{2m}(1) &= \tau_{\rho\theta}^{2m}(1) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (18)$$

в которых правые части вычисляются по формулам (10), а левые соответствуют (17). После вычисления этих констант напряжения $\sigma_{\rho}^{\circ}, \tau_{\rho\theta}^{\circ}, \sigma_{\theta}^{\circ}$, а вместе с ними и искомое решение исходной задачи (4) может быть вычислено с помощью соотношений (16).

Представим решение систем (18) в явном виде. Для этого запишем его с помощью правила Крамера

$$a_p = \frac{\Delta_1^p}{\Delta^p}, \quad b_p = \frac{\Delta_2^p}{\Delta^p}, \quad \alpha_p = \frac{\Delta_3^p}{\Delta^p}, \quad \beta_p = \frac{\Delta_4^p}{\Delta^p} \quad (p = 2, 4, 6, \dots) \quad (19)$$

где определители Δ^p описываются формулой

$$\Delta^p = \begin{vmatrix} -p(p-1)\rho_1^{p-2} & -(p-2)(p+1)\rho_1^p & -p(p+1)\rho_1^{-p-2} & -(p+2)(p-1)\rho_1^{-p} \\ p(p-1)\rho_1^{p-2} & p(p+1)\rho_1^p & -p(p+1)\rho_1^{-p-2} & -p(p-1)\rho_1^{-p} \\ p(p-1) & (p-2)(p+1) & p(p+1) & (p+2)(p-1) \\ p(p-1) & p(p+1)\rho_1^p & -p(p+1) & -p(p-1) \end{vmatrix} \quad (20)$$

а определители Δ_i^{2m} ($i = 1-4$) образуются из определителя Δ^p путем замены его i -го столбца на вектор-столбец

$$\{(m-1)\rho_1^{2m} - m\rho_1^{2m-2}, \quad m(\rho_1^{2m-2} - \rho_1^{2m}), 0, 0\}^T \quad (21)$$

соответствующий правой части системы (18); раскрывая определитель (20), можно получить его явное выражение

$$\Delta^p = 4p^2(p^2 - 1)[\rho_1^{2p-2} + \rho_1^{-2p-2} - p^2(1 + \rho_1^{-4}) + 2(p^2 - 1)\rho_1^{-2}] \quad (22)$$

Аналогично раскрываются определители Δ_i^p , входящие в соотношения (19):

$$\begin{aligned} \Delta_1^p &= 2p^2(p^2 - 1)(p + 1)[p^2\rho_1^{-4} - \rho_1^{-2p-2} + (p^2 - p) - (2p^2 - p - 1)\rho_1^{-2}] \\ \Delta_2^p &= -2p^2(p^2 - 1)(p - 1)[- \rho_1^{2p-2} + (p^2 + p)\rho_1^{-4} + p^2 + (1 - p - 2p^2)\rho_1^{-2}] \\ \Delta_3^p &= -2p^2(p^2 - 1)(p - 1)[p + \rho_1^{2p-2} - (p + 1)\rho_1^{-2}] \\ \Delta_4^p &= 2p^2(p^2 - 1)(p + 1)[\rho_1^{2p-2} p\rho_1^{-4} - (1 - p)\rho_1^{-2}] \end{aligned} \quad (23)$$

Формулы (20)–(23) показывают, что при фиксированном значении p характер убывания слагаемых в равномерно сходящихся рядах (16) весьма близок к степенному с показателем степени, равном номеру слагаемого ряда. Непосредственное применение формул (17) сталкивается при этом с существенными вычислительными трудностями, связанными с необходимостью вычисления величин ρ^{-2m} при $\rho < 1$. С уменьшением значения параметра β число членов ряда, необходимое для достижения заданной точности, возрастает и чрезмерно большое значение этих величин затрудняет применение вычислительной техники. Полученные выше соотношения показывают, что указанную трудность возможно обойти. Для этого достаточно вместо констант α_{2m} и β_{2m} ввести в соотношения (17) константы

$$\alpha'_{2m} = \alpha_{2m}\rho_1^{-2m}, \quad \beta'_{2m} = \beta_{2m}\rho_1^{-2m} \quad (24)$$

Вычисление значений ρ^{-2m} заменяется при этом на вычисление величин $(\rho/\rho_1)^{-2m}$, легко реализуемое с помощью вычислительной техники и при больших значениях m . Формулы (19), (22), (23) показывают, что выполнимым при таких значениях m будет и вычисление вновь введенных констант. С учетом сказанного, представление (17) заменяется следующим:

$$\begin{aligned} \sigma^{2m}(\rho) &= -2m(2m - 1)a_{2m}\rho^{2m-2} + (2m + 2 - 4m^2)b_{2m}\rho^{2m} - \\ &- 2m(2m + 1)\alpha'_{2m}(\rho^{-2m-2} / \rho_1^{-2m}) - (2m - 2 + 4m^2)\beta'_{2m}(\rho^{-2m} / \rho_1^{-2m}) \\ \tau^{2m}(\rho) &= 2m(2m - 1)a_{2m}\rho^{2m-2} + 2m(2m + 1)b_{2m}\rho^{2m} - \\ &- 2m(2m + 1)\alpha'_{2m}(\rho^{-2m-2} / \rho_1^{-2m}) - 2m(2m - 1)\beta'_{2m}(\rho^{-2m} / \rho_1^{-2m}) \end{aligned} \quad (25)$$

Программная реализация описанного алгоритма с помощью вычислительной техники подтвердила вычислительную эффективность полученного представления решения при различных β . В вычислительных экспериментах определялась погрешность, обусловленная усечением рядов (16), определяющих σ_ρ° и $\tau_{\rho\theta}^\circ$. Для искомых напряжений σ_ρ^k , $\tau_{\rho\theta}^k$, σ_θ^k , вычисляемых по формулам (4), эта погрешность определяется погрешностью определения величин σ_ρ° , $\tau_{\rho\theta}^\circ$ на внутренней поверхности кольца. Полусумма абсолютных значений величин $\sigma_\rho^k / (2P / \pi r_2)$ и $\tau_{\rho\theta}^k / (2P / \pi r_2)$, вычисленных по формулам (4) на радиусе ρ_1 (каждая из этих величин должна быть равна нулю) при удержании в ряду (16) m слагаемых, рассматривалась как относительная погрешность вычислений ϵ_m . Оказалось, что условие $\epsilon_m < 0.01$ для кольца с толщиной $\beta = 2$ выполняется при $m \geq 4$. Для $\beta = 1.1$ указанная точность достигается при $m \geq 45$. Для $\beta = 1.01$ условие $\epsilon_m < 0.01$ выполняется при $m \geq 560$; при $m = 1000$

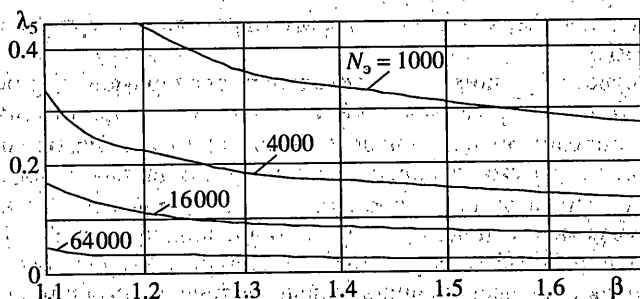
значение ϵ_m падает до $1 \cdot 10^{-10}$ и далее лимитируется только точностью описания вещественных чисел.

Полученное с помощью формул (4), (16), (25) решение использовалось как эталонное для оценки погрешности МКЭ при решении рассматриваемой задачи с помощью билинейных четырехугольных конечных элементов [6, 7]. С учетом симметрии задачи конечно-элементная дискретизация осуществлялась для четверти кольцевой области, лежащей в правом верхнем квадранте координатной плоскости. При определении значений напряжений с помощью формул (4) в рядах (16) удерживалось по 1000 слагаемых. Описанные алгоритмы реализовывались с помощью ЭВМ типа IBM PC на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Для проверки вычислительной устойчивости все вычисления проводились с одинарной и с двойной точностью описания вещественных чисел. Результаты вычислений при этом практически (в первых пяти значащих цифрах) не изменялись. Это означает, что все решаемые системы линейных алгебраических уравнений хорошо обусловлены и что используемые КЭ-аппроксимации и счетные алгоритмы вычислительно устойчивы [7]. При проведении вычислений ставилась задача выявить зависимость возникающих погрешностей от толстостенности кольца β , а также от размера и формы используемых ячеек КЭ-сетки. Для определенности исследуемая область покрывалась равномерной сеткой, образованной координатными кольцевыми и радиальными линиями. Форма прямоугольных ячеек сетки определялась значением параметра $\alpha = \Delta_r/\Delta_\theta$, Δ_r и Δ_θ — шаги сетки, постоянные в радиальном и кольцевом направлениях соответственно. При оценке погрешности МКЭ вблизи точек приложения сил, сжимающих кольцо, необходимо учитывать, что эти точки являются особыми. По этой причине вблизи указанных точек исследовалось изменение величины l_5 — максимального размера зоны, в пределах которой погрешность определения значений σ_r превышала 5% от величины $2P/\pi r_n$. При этом оценивалось влияние на величину l_5 значения параметра β , а также плотности КЭ-сетки.

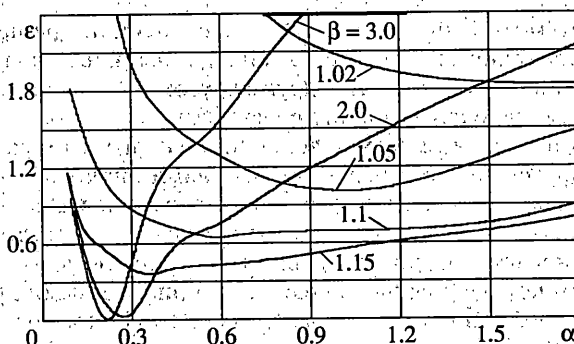
Результаты исследований представлены на фиг. 1, 2. На фиг. 1 приводится зависимость погрешности МКЭ от параметра β при фиксированном N_3 -числе ячеек КЭ-сетки, где $\lambda_5 = l_5/(r_2-r_1)$, l_5 — размер вдоль линии действия силы, в пределах которого погрешность определения радиальных напряжений превышает 5%; Δ_r , Δ_θ — шаги КЭ-сетки в радиальном и окружном направлениях; $\Delta_r/\Delta_\theta = 1$.

Оказалось, что при фиксированной форме ячеек в исследованном диапазоне изменений β уменьшение размера ячейки сетки вдвое (одновременно по каждому из координатных направлений) уменьшает размер $l_5/(r_2-r_1)$ также примерно вдвое. Полученные экспериментальные оценки не противоречат общетеоретическим оценкам [7], конкретизируя их и связывая с геометрическими параметрами рассмотренного класса задач. Влияние формы ячеек сетки на точность получаемых результатов оценивается по поведению погрешности $\epsilon = (\bar{\sigma}_\theta - \sigma_\theta)/\sigma_\theta$ (в процентах) определения напряжений σ_θ при изменении параметра α (фиг. 2). Напряжения σ_θ определяются при этом на внутренней поверхности кольца в точке $\theta = 0$, где эти значения максимальны ($\bar{\sigma}_\theta$ — приближенное решение). Во всех рассмотренных вариантах дискретные модели кольца содержат около 4000 КЭ. Отметим (см. фиг. 2), что на рассмотренных множествах сеток имеются выраженные минимумы погрешности. При этом оптимальное значение параметра α зависит от значения параметра β . Связано это с известной зависимостью оптимальной (по точности) вытянутости прямоугольных ячеек сетки от соотношения величин производных искомого решения вдоль направлений сторон этих ячеек. В рассматриваемом случае указанное соотношение в точке $r = r_1$, $\theta = 0$ существенно зависит от толстостенности кольца β , что и объясняет полученный результат.

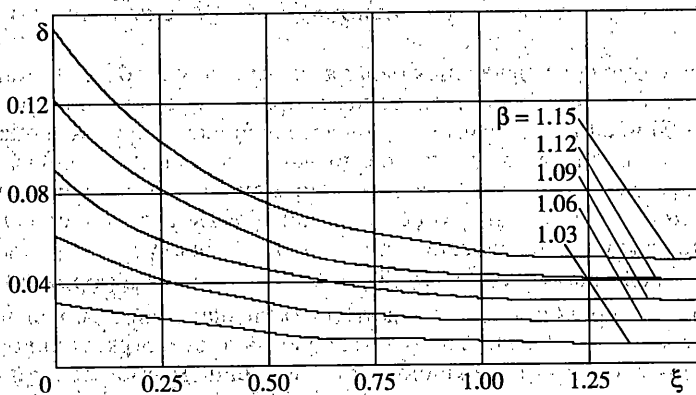
Используем теперь решение в форме соотношений (4), (16), (25) как эталонное при оценке погрешности и границ применимости приближенного решения рассматриваемой задачи, даваемого теорией изгиба тонкостенных стержней. Будем рассматри-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

вать погрешность приближенных формул для напряжений σ_θ , действующих на наружной поверхности (эти напряжения представляют интерес при оценке прочности сжимаемых колец). При этом приближенные значения $\bar{\sigma}_\theta$ описываются формулой [8, глава 19]:

$$\bar{\sigma}_\theta = -\frac{P}{2(r_2 - r_1)} \left[6 \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) + \sin \theta \right] \quad (26)$$

Погрешность формулы (26) определяется соотношением

$$\delta = |(\bar{\sigma}_\theta - \sigma_\theta) / \sigma_\theta| \quad (27)$$

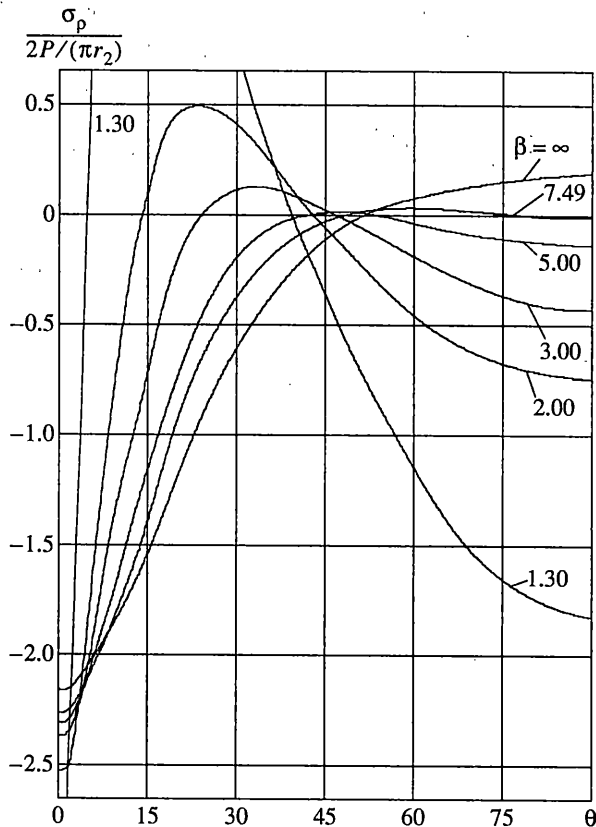
где σ_0 – эталонное решение, значение которого определяется при удержании в рядах Фурье 1000 слагаемых.

Результаты соответствующих вычислительных экспериментов представлены на фиг. 3 ($\xi = s/(r_2 - r_1)$). В непосредственной близости от точек приложения сжимающих сил погрешность определения кольцевых напряжений весьма близка к величине $\beta - 1$ (s – расстояние по наружной поверхности от точек приложения силы). В самих точках приложения сил в рамках линейной теории упругости эти напряжения не определяются и существуют лишь в смысле обобщенных функций. При удалении от особых точек по наружной поверхности кольца рассматриваемая погрешность убывает, на расстоянии порядка толщины кольца величина погрешности падает почти втрое и далее стабилизируется. Аналогичный характер поведения и ту же близость к величине $\beta - 1$ вблизи особых точек эта погрешность имеет во всем исследованном диапазоне $1.01 \leq \beta \leq 2$.

Последнее из рассмотренных применений построенного решения относится к исследованию закономерностей деформирования двухслойных круговых колец, слои которых концентричны и соприкасаются друг с другом. Пусть такое круговое кольцо образовано слоями одинаковой толщины с гладкими поверхностями и вложенными друг в друга без натяга. Оценим размер зоны возможного отставания слоев друг от друга при сжатии двухслойного кольца двумя силами аналогично рассмотренному выше случаю. Косвенно на возможное отставание слоев указывает положительность радиального напряжения σ_r в двухслойном кольце со спаянными слоями (т.е. в сплошном однородном однослойном кольце, равном по толщине двухслойному). Напряжение σ_r в сплошном кольце должно вычисляться при этом на окружности, соответствующей линии соприкасания слоев. Анализ формул (1) показывает, что в случае сплошного диска напряжения σ_r на этой линии при $\theta = \pm\pi/2$ положительны. Это означает, что соответствующий составной диск в этих местах при сжатии будет расслаиваться. Оценим с помощью решения (4), (16), (25) угловой размер зоны положительности σ_r на срединной окружности $r = (r_1 + r_2)/2$ эквивалентного сплошного кольца.

На фиг. 4 приведены распределения напряжений σ_r по углу θ для сплошных колец с различными толстостенностями β . Значения напряжений получены при удержании в рядах (16) по 1000 членов. Зависимости, представленные на фиг. 4, показывают, что при любых значениях β на срединной окружности сплошного кольца есть участки положительности значений σ_r , т.е. участки возможного отставания друг от друга соприкасающихся гладких поверхностей слоев соответствующего двухслойного кольца. Эти зависимости показывают также, что должна существовать критическая толстостенность сплошного кольца β_* ($\beta_* \approx 7,5$), начиная с которой по мере уменьшения значения β в серединах зон положительности значений σ_r появляются участки отрицательных значений, разделяющие каждую из зон положительности (левую и правую) на две – верхнюю и нижнюю. При дальнейшем уменьшении β каждая из образовавшихся зон положительности напряжений σ_r уменьшается в угловом размере и продолжает смещаться к линии действия сил, не захватывая точек этой линии. Для случая сжатия двухслойного кольца это означает, что на поверхности соприкасания слоев при сжатии возникают участки расслоения, причем в зависимости от величины толстостенности возможны два варианта: с двумя или с четырьмя участками расслоения.

Более точное исследование характера взаимодействия соприкасающихся слоев может быть выполнено при решении соответствующей контактной задачи, постановка которой учитывает односторонний характер связи слоев и возможность проскальзывания соприкасающихся поверхностей. Формулы (4), (16), (25) дают функцию влияния для отдельного кольцевого слоя, сжимаемого снаружи. Необходимое решение задачи о нагружении кольцевого слоя сосредоточенными силами, приложенными к его внутренней поверхности, может быть получено из функции напряжений, порождающей построенное выше решение. Для этого необходимо выполнить преобра-



Фиг. 4

зование инверсии $\rho' = 1/\rho$, $\theta' = \theta$ [5, 9]. Соответствующая функция напряжений $\Phi'(\rho', \theta')$ определяется преобразованием Митчелла [9, глава IX]:

$$\Phi'(\rho', \theta') = (\rho')^2 \Phi(1/\rho', \theta') \quad (28)$$

где $\Phi(\rho, \theta)$ – функция напряжений, дающая решение исходной задачи о сжатии кольца силами, приложенными к его наружной поверхности. Указанные решения позволяют свести решение контактной задачи к решению интегрального уравнения с известным ядром, либо к последовательности решений некоторых краевых задач для каждого из соприкасающихся слоев [10, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975. 704 с.
2. Папкович П.Ф. Теория упругости. Л.; М.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
3. Устинов Ю.А. Расчет напряжений в круговом кольце // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 33–45.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. Цвик Л.Б. Применение метода конечных элементов в статике деформирования. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1995. 126 с.

7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
8. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. Справочник. М.: Машиностроение, 1979. 704 с.
9. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ. 1935. 674 с.
10. Цвик Л.Б. О невязках сопряжения перемещений и напряжений в задачах о сопряжении и контакте упругих тел // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 3. С. 570–574.
11. Цвик Л.Б., Пимштейн П.Г., Зорина Г.Г. О функции влияния упругого кольца // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 5. С. 636–638.

Иркутск

Поступила в редакцию
4.02.1999