МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2001

УДК 531.383

© 2001 г. С.А. АГАФОНОВ

ДВЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Приводится решение двух задач стабилизации стационарного движения неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. Рассматриваемая механическая система может совершать стационарное движение, при котором плоскости колец ортогональны, гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью, а его центр тяжести находится выше точки пересечения осей подвеса. Устойчивость стационарного движения достигается за счет гидроскопической стабилизации. Последняя, согласно теоремам Кельвина – Четаева, разрушается при действии сил полной диссипации. Возникает задача стабилизации стационарного движения при помощи внешних воздействий. В первой задаче стабилизация осуществляется посредством внешнего неконсервативного момента, зависящего от углов поворота колец и прикладываемого к осям подвеса. С помощью построения функции Ляпунова получено условие стабилизации до асимптотической устойчивости стационарного движения и дается оценка области притяжения.

Во второй задаче стабилизация осуществляется при помощи параметрического возбуждения, которое реализуется посредством вибрации основания вдоль вертикали по достаточно общему закону. Найдено условие стабилизации стационарного движения, выраженное через интегральные характеристики параметрического возбуждения.

Отметим, что случай уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе рассмотрен в [1].

1. Уравнения движения. Постановка задачи. Объектом исследования является неуравновешенный гироскоп в кардановом подвесе, ось внешнего карданова кольца которого горизонтальна. Повороты внешнего и внутреннего колец определяются соответственно углами α и β, причем при $\beta = 0$ плоскости колец ортогональны.

Функция Лагранжа системы такова

$$L = \tfrac{1}{2}(A_0 - C_0 \sin^2\beta)\dot\alpha^2 + \tfrac{1}{2}B_0\dot\beta^2 + \tfrac{1}{2}C(\dot\varphi + \dot\alpha\sin\beta)^2 - Pz_0\cos\alpha\cos\beta \tag{1.1}$$

$$A_0 = A + A_1 + A_2, B_0 = A + B_1, C_0 = A + A_1 - C_1$$

Здесь A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно его оси вращения; A_1, B_1, C_1 – моменты инерции внутреннего кольца относительно осей, связанных с этим кольцом; A, C – экваториальный и полярный моменты инерции гироскопа, a φ – угол его собственного вращения; $P = mg$ – вес гироскопа и внутреннего кольца; z_0 – расстояние от центра тяжести, расположенного на оси симметрии гироскопа до точки пересечения осей подвеса.

Уравнения движения после исключения циклической координаты φ, с учетом сил вязкого трения можно привести к виду

$$
\begin{gathered}
(A_0 - C_0 \sin^2 \beta)\ddot{\alpha} - C_0 \sin 2\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + b\dot{\alpha} + H\cos\beta\dot{\beta} - Pz_0 \sin\alpha\cos\beta = M_\alpha \\
B_0\ddot{\beta} + C_0 \sin\beta\cos\beta\dot{\alpha}^2 + b\dot{\beta} - H\cos\beta\dot{\alpha} - Pz_0 \sin\beta\cos\alpha = M_\beta
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

В (1.2) $H = C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)$ – циклическая постоянная; M_α, M_β – моменты, действующие на внешнее и внутреннее кольцо, b – коэффициент вязкого трения.

При $M_\alpha = M_\beta = 0$ уравнения (1.2) имеют решение

$$
\alpha = \beta = 0, \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0 \tag{1.3}
$$

при котором плоскости внешнего и внутреннего колец ортогональны, гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью, а центр тяжести находится выше точки пересечения осей подвеса.

Устойчивость стационарного движения (1.3) при $b = 0$ достигается за счет гироскопической стабилизации, ее условие найдено в [2] из знакоопределенности квадратичного интеграла уравнений в вариациях. Эта гироскопическая стабилизация при $b > 0$ разрушается. Возникает задача стабилизации стационарного движения (1.3) с помощью приложения к осям подвеса внешних моментов. В первой задаче стабилизация осуществляется с помощью неконсервативных моментов, зависящих от углов α и β, а во второй с помощью параметрического возбуждения, реализуемого при помощи вибрации основания вдоль вертикали.

Для дальнейшего анализа удобно ввести безразмерное время $\tau = bt/\sqrt{A_0B_0}$. Тогда уравнения (1.2) примут вид

$$
\begin{gathered}
(1 - a\sin^2\beta)\alpha'' - a\sin 2\beta\alpha'\beta' + c\alpha' + h\cos\beta\beta' - p\sin\alpha\cos\beta = M_\alpha \\
c^2\beta'' + a\sin\beta\cos\beta\alpha'^2 + c\beta' - h\cos\beta\alpha' - p\sin\beta\cos\alpha = M_\beta
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

$$
a = \frac{C_0}{A_0} < 1, \quad c = \left(\frac{B_0}{A_0}\right)^{1/2}, \quad h = cHb^{-1}, \quad p = Pz_0B_0b^{-2}
$$

В (1.4) штрих обозначает производную по τ; а для моментов M_α, M_β сохранены прежние обозначения.

2. Стабилизация с помощью неконсервативных моментов. Оценка области притяжения. Пусть на оси подвесов действуют моменты $M_\alpha = -\mu\sin\beta$, $M_\beta = \mu\sin\alpha$. Тогда уравнения (1.4) можно рассматривать как уравнения движения механической системы на которую действуют наряду с диссипативными, гироскопическими и потенциальными силами, неконсервативные позиционные силы (системы общего вида). Такие системы при выполнении условий близких к необходимым при достаточно большом значении h асимптотически устойчивы вне зависимости от степени неустойчивости [3]. Представляет интерес нахождения оценки области притяжения к стационарному движению (1.3), которую получим с помощью построения функции Ляпунова. Во избежании громоздких вычислений ограничимся значением параметра $c = 1$. Рассмотрим функцию

$$
\begin{aligned}
V = {} & \frac{1}{2}(1 - a\sin^2\beta)\alpha'^2 + \frac{1}{2}\beta'^2 + \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) + \frac{h^{-1}}{\cos\beta}\mu\sin\alpha(1 - a\sin^2\beta)\alpha' + \\
& + \frac{h^{-1}}{\cos\beta}\mu\sin\beta\beta' + \frac{h^{-1}}{\cos\beta}(p\cos\alpha + \cos\beta)(1 - a\sin^2\beta)\sin\beta\alpha' - \\
& - \frac{h^{-1}}{\cos\beta}(p\cos\beta + \cos\alpha)\sin\alpha\beta'
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Производная от (2.1), вычисленная в силу уравнений (1.4), приводится к виду

$$-V' = \left\{1 + h^{-1}\left[a\sin\beta(\mu\sin\beta - (p\cos\beta + \cos\alpha)\sin\alpha) - \frac{1-a\sin^2\beta}{\cos\beta}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(\mu\cos\alpha - p\sin\alpha\sin\beta)\right]\right\}\alpha'^2 + \left[1 - \frac{h^{-1}}{\cos^2\beta}(\mu - \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha)\right]\beta'^2 -$$

$$-\frac{h^{-1}}{\cos^2\beta}\left\{(1-a\sin^2\beta)(\mu\sin\alpha + p\sin\beta\cos\alpha)\sin\beta + \cos\beta\left[\cos^2\beta - \cos 2\alpha +\right.\right.$$

$$\left.\left.+(p\cos\alpha + \cos\beta)a\sin^2\beta\cos\beta\right]\right\}\alpha'\beta' + h^{-1}\left[\mu\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin^2\alpha + \mu\sin^2\beta +\right.$$

$$\left.+\frac{p}{\cos\beta}(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\sin\alpha\sin\beta\right] + \frac{h^{-1}\mu}{\cos\beta}(\sin\alpha\alpha' + \sin\beta\beta') +$$

$$+\frac{h^{-1}}{\cos\beta}\left[(p\cos\alpha + \cos\beta)\sin\beta\alpha' - (p\cos\beta + \cos\alpha)\sin\alpha\beta'\right] \tag{2.2}$$

Зададимся значениями углов α_0 и β_0 и будем считать, что значения α и β изменяются в пределах $|\alpha| \leqslant \alpha_0 < \pi/2$ и $|\beta| \leqslant \beta_0 < \pi/2$. Для нахождения условий определенной положительности функций V и $-V'$ воспользуемся тождеством

$$u^T Mu + v^T Nv + v^T Qu = (M^{1/2}u + \tfrac{1}{2}M^{-1/2}Q^T v)^T (M^{1/2}u +$$

$$+\tfrac{1}{2}M^{-1/2}Q^T v) + v^T(N - \tfrac{1}{4}QM^{-1}Q^T)v \tag{2.3}$$

Здесь $u, v \in R_n$, M – определенно положительная матрица.

Условием определенной положительности (2.3) является определенная положительность квадратичной формы $v^T(N - \tfrac{1}{4}QM^{-1}Q^T)v$.

Функцию (2.1) запишем в виде

$$V = \tfrac{1}{2}u^T Au + \tfrac{1}{2}v^T v + h^{-1}v^T Cu, \quad u = (\alpha', \beta')^T \tag{2.4}$$

$$v = (\sin\alpha, \sin\beta)^T, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -a\sin^2\beta & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \cos^{-1}\beta \begin{bmatrix} \mu(1-a\sin^2\beta) & -(p\cos\beta + \cos\alpha) \\ (p\cos\alpha + \cos\beta)(1-a\sin^2\beta) & \mu \end{bmatrix}$$

Используя тождество (2.3), условие определенной положительности функции V имеет вид $v^T(E - h^{-2}C A^{-1}C^T)\, v > 0$ при $v \neq 0$, E – единичная матрица. Последнее условие заведомо выполняется, если справедливо неравенство

$$\cos^2\beta_0 - h^{-2}[\mu^2 + (p+1)^2 + \mu p(1-\cos\beta_0) + \mu(1-\cos\alpha_0)] > 0 \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) допускает, например, следующую интерпретацию: при заданных значениях μ, p, α_0, β_0, оно определяет выбор параметра h.

Обратимся к анализу функции $-V'$, записав ее в виде

$$-V' = u^T(E + h^{-1}M_0)u + h^{-1}v^T N_0 v + h^{-1}\cos^{-1}\beta\, v^T Q_0 u \tag{2.6}$$

В (2.6):

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = a\sin\beta[\mu\sin\beta - (p\cos\beta + \cos\alpha)\sin\alpha] -$$

$$-\cos^{-1}\beta(1 - a\sin^2\beta)(\mu\cos\alpha - p\sin\alpha\sin\beta)$$

$$m_{22} = -\cos^{-2}\beta(\mu - \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha)$$

$$m_{12} = m_{21} = -\frac{1}{2}\cos^{-2}\beta\{(1 - a\sin^2\beta)(\mu\sin\alpha - p\sin\beta\cos\alpha)\sin\beta +$$

$$+\cos\beta[\cos^2\beta - \cos 2\alpha + a(p\cos\alpha + \cos\beta)\sin^2\beta\cos\beta]\}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \mu & -(p\cos\beta + \cos\alpha) \\ p\cos\alpha + \cos\beta & \mu \end{bmatrix}$$

$$N_0 = \begin{bmatrix} \mu\cos^{-1}\beta\cos\alpha & \frac{p}{2}\cos^{-1}\beta(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) \\ \frac{p}{2}\cos^{-1}\beta(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) & \mu \end{bmatrix}$$

Необходимым условием выполнения неравенства $-V' > 0$ является определенная положительность квадратичной формы $v^T N_0 v$. Условие последней имеет вид

$$\mu^2\cos\alpha_0 - \tfrac{1}{4}p^2\cos^{-1}\beta_0 \max_{\substack{|\alpha|\le\alpha_0<\pi/2 \\ |\beta|\le\beta_0<\pi/2}} (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)^2 > 0 \tag{2.7}$$

Используя тождество (2.3) можно показать, что функция $-V'$ является определенно положительной при выполнении неравенства

$$\mu^2\cos\alpha_0 - \tfrac{1}{4}p^2\cos^{-1}\beta_0 \max_{\substack{|\alpha|\le\alpha_0<\pi/2 \\ |\beta|\le\beta_0<\pi/2}} (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)^2 -$$

$$-\tfrac{1}{4}h^{-1}\mu\cos^{-2}\beta_0(\mu^2 + (p+1)^2)(1 + \cos\beta_0) > 0$$

если $p > 1$, или неравенства

$$\mu^2\cos\alpha_0 - \tfrac{1}{4}p^2\cos^{-1}\beta_0 \max_{\substack{|\alpha|\le\alpha_0<\pi/2 \\ |\beta|\le\beta_0<\pi/2}} (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)^2 -$$

$$-\tfrac{1}{4}h^{-1}\cos^{-2}\beta_0\Big\{\mu(\mu^2 + (p+1)^2)(1 + \cos\beta_0) + p(1-p)\times$$

$$\times \max_{\substack{|\alpha|\le\alpha_0<\pi/2 \\ |\beta|\le\beta_0<\pi/2}} [(\cos\alpha - \cos\beta)^2(\cos\alpha + \cos\beta)]\Big\} > 0 \tag{2.8}$$

если $p < 1$.

В неравенствах (2.8) отброшены члены порядка h^{-2}, поскольку при обращении матрицы $E + h^{-1}M_0$ принято $(E + h^{-1}M_0)^{-1} = E - h^{-1}M_0$. Если справедливо (2.7), то неравенства (2.8) выполняются при достаточно большом h. В свою очередь, неравенство (2.7) при заданных значениях α_0, β_0 и параметра p, определяет выбор параметра μ, характеризующего неконсервативные позиционные силы.

При выполнении неравенств (2.5) и (2.8), функция (2.1) является определенно положительной, V' – определенно отрицательной, а стационарное движение (1.3) асимптотически устойчиво по отношению к α', β', $\sin\alpha$, $\sin\beta$. Область притяжения к стационарному движению (1.3) $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$ определяется из неравенств (2.5) и (2.8) при заданных значениях параметров μ, p, h, причем начальными значениями α', β' могут быть любые конечные величины.

3. Стабилизация стационарного движения параметрическим возбуждением. Предположим, что основание на котором расположен гироскоп совершает вибрации вдоль вертикали по закону $\xi = e\xi(\omega t)$. Предположим также, что функция $\xi(\omega t)$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет нулевое среднее значение $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(\tau)d\tau = 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \dot{\xi}^2(\tau)d\tau$.

Тогда моменты M_α, M_β имеют вид $M_\alpha = -mz_0e\ddot{\xi}\sin\alpha\cos\beta$, $M_\beta = -mz_0e\ddot{\xi}\sin\beta\cos\alpha$.

Уравнения движения (1.2) в первом приближении таковы

$$A_0\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + H\dot{\beta} - mz_0(g - e\ddot{\xi})\alpha = 0 \qquad (3.1)$$

$$B_0\ddot{\beta} + b\dot{\beta} - H\dot{\alpha} - mz_0(g - e\ddot{\xi})\beta = 0$$

При отсутствии параметрического возбуждения $\xi(\omega t) = 0$ и диссипации $b = 0$ устойчивость стационарного движения достигается за счет гироскопической стабилизации, которая имеет вид [2]:

$$H^2 > mgz_0(A_0 + B_0 + 2\sqrt{A_0B_0})$$

При $b > 0$, но при $\xi(\omega t) = 0$ система (3.1) неустойчива. Пусть теперь на систему действует параметрическое возбуждение. При анализе устойчивости системы (3.1) применим подход изложенный в [4]. Введя безразмерное время $\tau = \omega t$, запишем систему (3.1) в векторной форме

$$y'' + \varepsilon G_0 y' + \varepsilon(\Lambda_0 + \xi''\Lambda_1)y = 0 \qquad (3.2)$$

Здесь $y = (\alpha, \beta)$, штрих обозначает производную по τ; матрицы G_0, Λ_0, Λ_1 таковы

$$G_0 = \begin{bmatrix} b_0 & h_0 \\ -h_0k & kb_0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{bmatrix} -g_0 & 0 \\ 0 & -g_0k \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{mz_0e}{A_0} \ll 1, \quad k = \frac{A_0}{B_0}, \quad b_0 = \frac{b}{\omega mz_0e}, \quad h_0 = \frac{H}{\omega mz_0e}, \quad g_0 = \frac{g}{\omega^2 e}$$

В свою очередь систему (3.2) представим в виде

$$u' = (\varepsilon^{1/2}D + \varepsilon D_0)u \qquad (3.3)$$

$$u = (y, z), \quad z = \varepsilon^{-1/2}y'$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -G_0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ -\Lambda_0 - \xi''\Lambda_1 & O_2 \end{bmatrix}$$

Здесь O_k, E_k – нулевая и единичная матрицы порядка k. В системе (3.3) сделаем замену переменных $u \to v$:

$$u = (E_4 + \varepsilon^{1/2}X_1 + \varepsilon X_2 + \varepsilon^{3/2}X_3 + \varepsilon^2 X_4)v + O(\varepsilon^{5/2}) \qquad (3.4)$$

чтобы преобразовать (3.3) к виду

$$v' = (\varepsilon^{1/2}M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^{3/2}M_3 + \varepsilon^2 M_4)v + O(\varepsilon^{5/2}) \qquad (3.5)$$

В (3.4), (3.5) матрицы X_i, M_i подлежат определению, причем матрицы M_i постоянные.

Подставляя (3.4) в (3.3) и после преобразований, приравнивая матрицы при одинаковых степенях ε, получим матричные уравнения для определения X_i:

$$X_1' = D - M_1,\ \ X_2' = D_0 + DX_1 - X_1M_1 - M_2$$

$$X_3' = D_0X_1 + DX_2 - X_1M_2 - X_2M_1 - M_3$$

$$X_4' = D_0X_2 + DX_3 - X_1M_3 - X_2M_2 - X_3M_1 - M_4 \tag{3.6}$$

Этим приближением и ограничимся. Матрицы M_i находятся из условия равенства нулю средних значений правых частей уравнений (3.6) и имеют вид

$$M_1 = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ -\Lambda_0 & O_2 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -G_0 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} O_2 & O_2 \\ -s\Lambda_1^2 & O_2 \end{bmatrix}$$

$$s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \xi'^2(\tau)d\tau \tag{3.7}$$

Обозначив $v = (\xi,\ \eta)$ из (3.5) с учетом выражений (3.7) после исключения η с точностью до ε^2 включительно получим

$$\xi'' + \varepsilon G_0\xi' + \varepsilon(\Lambda_0 + \varepsilon s\Lambda_1^2)\xi = 0 \tag{3.8}$$

$$\Lambda_0 + \varepsilon s\Lambda_1^2 = \mathrm{diag}(\varepsilon s - g_0,\ (\varepsilon sk - g_0)k)$$

Условием асимптотической устойчивости системы (3.8) является выполнение неравенств $\varepsilon s - g_0 > 0$, $\varepsilon sk - g_0 > 0$, или в исходных параметрах

$$mz_0e^2s\omega^2 > A_0g,\ \ mz_0e^2s\omega^2 > B_0g \tag{3.9}$$

Неравенства (3.9) являются условием стабилизации стационарного движения (1.3) параметрическим возбуждением.

Из (3.9) можно получить условие стабилизации верхнего положения равновесия математического маятника при вибрации по закону $\xi(t) = e\cos\omega\, t$.

В этом случае $A_0 = B_0 = mz_0^2$, $k = 1$, а (3.9) сводится к известному условию $e^2\omega^2 > 2gz_0$.

В заключение отметим, что в [5] предложен другой подход в решении задачи стабилизации движения параметрическим возбуждением, основанный на исключении с помощью замены переменных членов имеющих гироскопическую структуру. Подобный подход оказался эффективным и позволил систему Эйлера–Пуассона свести к двум уравнениям Матье и получить условие стабилизации вертикального вращения гироскопа Лагранжа в области, где не выполняется условие Маиевского–Четаева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агафонов С.А.* Об устойчивости стационарного движения гироскопа в кардановом подвесе под действием возмущающего момента // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 5. С. 3–8.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 4. С. 499–503.
3. *Агафонов С.А.* Об устойчивости движения неконсервативных механических систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 212–217.
4. *Агафонов С.А.* О стабилизации движения неконсервативных систем посредством параметрического возбуждения // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 199–202.
5. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 774–780.

Москва

Поступила в редакцию
26.02.1999