

УДК 624.072.2

© 2001 г. Л.С. РЫБАКОВ

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО КАРКАСА

Представлен строгий линейный дискретно-континуальный упругий статический анализ регулярного призматического каркаса (замкнутого или незамкнутого), представляющего собой пространственную стержневую систему, образованную из двух ортогональных семейств жестко взаимодействующих между собой пространственно деформируемых стержней. Упругие оси последних принадлежат единой правильной призматической поверхности – поверхности, поперечное сечение которой представляет собой правильный многоугольник (если каркас замкнутый) или его фрагмент (если каркас незамкнутый). Оси стержней одного семейства совпадают с ребрами поверхности, а оси стержней другого семейства – со сторонами правильных многоугольников. Внешние воздействия на каркас произвольны.

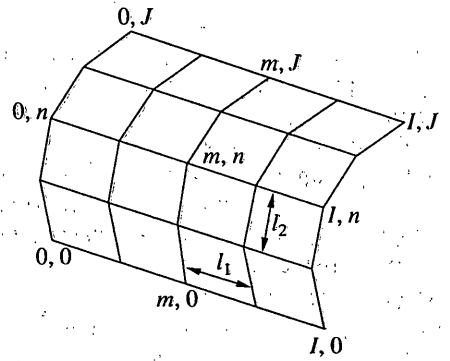
С помощью метода склейки в версии, изложенной в [1–3], исходная дискретно-континуальная проблема сведена точным образом к дискретной; для которой получена полная система определяющих уравнений в частных разностях с постоянными коэффициентами. Эта система представлена в терминах узловых смещений и углов поворота, полных деформаций и начальных значений внутренних сил и моментов стержней геометрическими, физическими и статическими соотношениями и уравнениями совместности полных деформаций. В рамках построенной теории даны альтернативные постановки задач в обобщенных узловых смещениях и в обобщенных начальных внутренних силах стержней и указаны некоторые возможные их обобщения. Первая постановка задач проиллюстрирована точным аналитическим решением в замкнутом виде задачи о деформировании бесконечного замкнутого призматического каркаса под действием радиальной узловой циклически симметричной нагрузки. Представленная теория является дискретным аналогом теории круговой цилиндрической оболочки, вытекающей из моментной теории упругости.

Следует подчеркнуть, что приводимые рассуждения справедливы, если сжатые стержни не теряют устойчивость. С позиций линейной теории, позволяющей находить лишь докритическое напряженно-деформированное состояние упругой системы, такое предположение вполне оправданно. Статическая упругая устойчивость рассматриваемого каркаса – предмет специального исследования.

1. Определяющие соотношения теории. Рассмотрим регулярный призматический каркас – упругую систему, образованную из двух жестко взаимодействующих между собой однородных ортогональных семейств пространственно деформируемых прямых стержней постоянного по длине поперечного сечения, упругие линии которых принадлежат правильной призматической поверхности. Как видно из фиг. 1, где схематично показан незамкнутый призматический каркас и принятая нумерация его узлов, упругие линии одного семейства стержней (1-стержней) лежат на ребрах призматической поверхности, а линии другого семейства стержней (2-стержней) являются сторонами правильных N -угольников ($N \geq 3$ – заданное целое положительное число).

Дискретная двухмерность каркаса требует для нумерации образующих его элементов (узлов и соединяющих их стержней) два целочисленных параметра, которые для переменных величин, связанных с конкретным элементом каркаса, выступают в роли

дискретных аргументов. Обозначим эти параметры символами m, n и будем полагать, что они отсчитываются соответственно вдоль ребер каркаса и окружностей заданного радиуса R , описывающих N -угольники. Тогда, принимая для узлов незамкнутого каркаса $m = 0, 1, 2, \dots, I, n = 0, 1, 2, \dots, J$ (см. фиг. 1), где I, J — заданные положительные целые числа, для α -стержней (здесь и далее $\alpha = 1, 2$) имеем $m = 0, 1, 2, \dots, I + \alpha - 2, n = 0, 1, 2, \dots, J - \alpha + 1$. В случае замкнутого каркаса область изменения параметра m остается прежней, а $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. В дальнейшем предполагается, что все рассуждения и соотношения, приводимые для текущего элемента каркаса, справедливы для соответствующей области изменения параметров m, n .



Фиг. 1

Ниже используются линейные разностные операторы Δ_{α}^{\pm} и ∇_{α}^{\pm} , смысл которых на примере отвлеченной функции $\psi[m, n]$ дискретных аргументов m, n поясняют равенства

$$\Delta_1^{\pm} \psi[m, n] = \pm \psi[m \pm 1, n] \mp \psi[m, n]$$

$$\Delta_2^{\pm} \psi[m, n] = \pm \psi[m, n \pm 1] \mp \psi[m, n]$$

$$\nabla_1^{\pm} \psi[m, n] = \psi[m \pm 1, n], \quad \nabla_2^{\pm} \psi[m, n] = \psi[m, n \pm 1]$$

Нетрудно видеть, что эти операторы перестановочны, причем

$$\nabla_{\alpha}^{\pm} = 1 \pm \Delta_{\alpha}^{\pm}, \quad \nabla_{\alpha}^{+} \nabla_{\alpha}^{-} = 1, \quad \Delta_{\alpha}^{\pm} = \Delta_{\alpha}^{\mp} \nabla_{\alpha}^{\pm} \quad (1.1)$$

Введенные операторы позволяют записывать все формулы и уравнения в переменных с несмещенными текущими значениями дискретных аргументов без явного указания этих аргументов при символах переменных и формировать из них операторы частных разностей более высокого порядка. Так, например, для операторов частных разностей второго порядка имеем

$$\Delta_1^2 \psi = \Delta_1^2 \psi[m, n] = \psi[m + 1, n] - 2\psi[m, n] + \psi[m - 1, n]$$

$$\Delta_2^2 \psi = \Delta_2^2 \psi[m, n] = \psi[m, n + 1] - 2\psi[m, n] + \psi[m, n - 1] \quad (1.2)$$

$$\Delta_{\alpha}^2 = \Delta_{\alpha}^{+} \Delta_{\alpha}^{-} = \Delta_{\alpha}^{+} - \Delta_{\alpha}^{-} = \nabla_{\alpha}^{+} - 2 + \nabla_{\alpha}^{-}$$

Условимся также, что если в определяющих соотношениях встретится переменная величина со значениями m, n , указывающими явно или неявно (обнаруживается после раскрытия предшествующего разностного оператора) на несуществующий элемент каркаса, то значение этой переменной равно нулю.

Приступая к построению теории каркаса, воспользуемся методом "склейки" в версии, изложенной в [1-3]. По этой версии каркас следует расчленить на изолированные элементы-узлы и расположенные между ними стержни и провести анализ этих элементов (упругий — для стержней, статический — для узлов) с учетом действующих на них внешних сил и моментов и сил и моментов взаимодействия с соседними элементами, а также геометрических условий сопряжения последних.

При упругом анализе произвольного α -стержня будем использовать связанную с его началом локальную правую прямоугольную декартову систему отсчета $x_1 x_2 x_3$, ось x_{α} которой совместим с упругой линией α -стержня, направив ее в сторону роста соответствующего дискретного параметра m при $\alpha = 1$ и n при $\alpha = 2$. Что касается

других осей локальной системы отсчета, то для 1-стержней ось x_3 ориентируем по радиусу описанной окружности соответствующего N -угольника, а для 2-стержней ось x_1 направим вдоль упругой линии смежного 1-стержня; при этом положение третьей локальной оси становится очевидным.

Основное внимание сосредоточим на регулярных (дискретно ортотропных и однородных) каркасах, в которых стержни, принадлежащие одному семейству, однородны, одинаковы и расположены с постоянным шагом. В таком случае геометрические и упругие характеристики каркаса целиком определяются независимыми от m, n длинами α -стержней l_α и жесткостями $g_{0\alpha}, g_{\alpha\alpha}$ и $g_{3-\alpha,\alpha}, g_{3\alpha}$ их упругих линий соответственно на растяжение – сжатие, кручение и изгиб в плоскостях $x_\alpha x_3, x_1 x_2$. Ограничимся при этом изучением таких призматических каркасов, в которых главные центральные оси поперечных сечений α -стержней параллельны соответствующим осям локальных систем отсчета.

Пусть $x \in [0, 1]$ – отнесенная к l_α локальная координата, отсчитываемая вдоль упругой линии текущего (с номером m, n) α -стержня. Введем для произвольной точки этой линии (поперечного сечения α -стержня) следующие обозначения ($j = 1, 2, 3$): $u_{j\alpha}(x)$ – отнесенное к l_α смещение вдоль оси x_j ; $\theta_{j\alpha}(x)$ – угол поворота сечения вокруг оси x_j ; $n_{j\alpha}(x)$ и $m_{j\alpha}(x)$ – внутренние силы и моменты, а $p_{j\alpha}(x)$ и $r_{j\alpha}(x)$ – погонные внешние силы и моменты, действующие соответственно вдоль и вокруг оси x_j . Аналогичные компоненты узловых безразмерных смещений, углов поворота, сосредоточенных внешних сил и моментов в локальной декартовой системе отсчета 1-стержней обозначим символами U_j (U_α отнесены к $l_\alpha, U_3 - \text{к } l_1$), Θ_j, P_j и M_j соответственно. Подчеркнем, что введенные переменные являются функциями дискретных аргументов m, n , так что следовало бы, например, писать $u_{j\alpha}(x; m, n), U_j[m, n]$. Однако, как было условлено выше, эти аргументы при написании функций явно не указываются.

Как обычно, все декартовые компоненты смещений и сил считаются положительными, если они направлены в положительном направлении соответствующей локальной оси. Что касается правила знаков для компонент векторов углов поворота и моментов, то за положительное, при взгляде с конца соответствующей локальной оси, принимается направление против часовой стрелки – для величин $\Theta_1, \theta_{1\alpha}, \Theta_3, \theta_{31}, M_1, m_{\alpha 1}, r_{\alpha 1}, m_{32}, r_{32}$ и направление по часовой стрелке – для величин $\Theta_2, \theta_{2\alpha}, \theta_{32}, M_2, m_{\alpha 2}, r_{\alpha 2}, M_3, m_{31}, r_{31}$.

Прежде чем заняться поэлементным анализом призматического каркаса, выпишем геометрические условия сопряжения его элементов (узлов и α -стержней). Принимая во внимание обозначения

$$c = \cos(\theta/2), s = \sin(\theta/2), \theta = 2\pi/N \quad (1.3)$$

(при этом $l_2 = 2sR$) и принятое выше правило знаков непосредственно из геометрических соображений устанавливаем, что геометрические условия сопряжения начала α -стержня с соседним узлом имеют вид ($\alpha = 1, 2; j = 1, 2, 3; \delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера; здесь и далее суммирование по повторяющимся индексам не предполагается):

$$\begin{aligned} u_{\alpha 1}(0) &= \lambda^{-\alpha} U_\alpha, \quad u_{31}(0) = U_3, \quad \theta_{j1}(0) = \Theta_j, \quad \lambda = l_1 l_2^{-1} \\ u_{12}(0) &= \lambda U_1, \quad u_{\alpha+1,2}(0) = \delta_{\alpha 1}(cU_2 - s\lambda U_3) + \delta_{\alpha 2}(sU_2 + c\lambda U_3) \\ \theta_{12}(0) &= \Theta_1, \quad \theta_{\alpha+1,2}(0) = \delta_{\alpha 1}(c\Theta_2 + s\Theta_3) + \delta_{\alpha 2}(s\Theta_2 - c\Theta_3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подобные же условия для его конечного сечения записываются следующим образом

$$\begin{aligned} u_{\alpha 1}(1) &= \lambda^{1-\alpha} \nabla_1^+ U_\alpha, \quad u_{31}(1) = \nabla_1^+ U_3, \quad \theta_{j1}(1) = \nabla_1^+ \Theta_j \\ u_{12}(1) &= \lambda \nabla_2^+ U_1, \quad u_{\alpha+1,2}(1) = \nabla_2^+ [\delta_{\alpha 1}(cU_2 + s\lambda U_3) - \delta_{\alpha 2}(sU_2 - c\lambda U_3)] \\ \theta_{12}(1) &= \nabla_2^+ \Theta_1, \quad \theta_{\alpha+1,2}(1) = \nabla_2^+ [\delta_{\alpha 1}(c\Theta_2 - s\Theta_3) - \delta_{\alpha 2}(s\Theta_2 + c\Theta_3)] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пространственное деформирование изолированного α -стержня описывается уравнениями

$$\begin{aligned} n'_{\alpha\alpha}(x) + l_{\alpha} p_{\alpha\alpha}(x) &= 0, \quad n_{\alpha\alpha}(x) = g_{0\alpha} u'_{\alpha\alpha}(x) \\ n'_{3-\alpha,\alpha}(x) + l_{\alpha} p_{3-\alpha,\alpha}(x) &= 0, \quad m_{3\alpha}(x) = -l_{\alpha} g_{3\alpha}^* u''_{3-\alpha,\alpha}(x) \\ n_{3-\alpha,\alpha}(x) &= l_{\alpha}^{-1} m'_{3\alpha}(x) + r_{3\alpha}(x), \quad \theta_{3\alpha}(x) = u'_{3-\alpha,\alpha}(x) \\ m'_{\alpha\alpha}(x) + l_{\alpha} r_{\alpha\alpha}(x) &= 0, \quad m_{\alpha\alpha}(x) = l_{\alpha} g_{\alpha\alpha}^* \theta'_{\alpha\alpha}(x) \\ n'_{3\alpha}(x) + l_{\alpha} p_{3\alpha}(x) &= 0, \quad m_{3-\alpha,\alpha}(x) = -l_{\alpha} g_{3-\alpha,\alpha}^* u''_{3\alpha}(x) \\ n_{3\alpha}(x) &= l_{\alpha}^{-1} m'_{3-\alpha,\alpha}(x) + r_{3-\alpha,\alpha}(x), \quad \theta_{3-\alpha,\alpha}(x) = u'_{3\alpha}(x) \end{aligned}$$

общее решение которых с учетом условий (1.4) дается формулами

$$\begin{aligned} u_{\alpha\alpha}(x) &= c^{\alpha-1} U_{\alpha} - s \lambda \delta_{\alpha 2} U_3 + l_{3-\alpha} \kappa_{0\alpha} N_{\alpha\alpha} x + u_{\alpha\alpha}^*(x) \\ u_{21}(x) &= \lambda^{-1} U_2 + \Theta_3 x - \frac{1}{6} x^2 \kappa_{31} (3M_{31} + l_1 N_{21} x) + u_{21}^*(x) \\ u_{12}(x) &= \lambda U_1 + (s \Theta_2 - c \Theta_3) x - \frac{1}{6} x^2 \kappa_{32} (3M_{32} + l_2 N_{12} x) + u_{12}^*(x) \\ \theta_{3\alpha}(x) &= -(-1)^{\alpha} c^{\alpha-1} \Theta_3 + s \delta_{\alpha 2} \Theta_2 - \frac{1}{2} x \kappa_{3\alpha} (2M_{3\alpha} + l_{\alpha} N_{3-\alpha,\alpha} x) + \theta_{3\alpha}^*(x) \\ \theta_{\alpha\alpha}(x) &= c^{\alpha-1} \Theta_{\alpha} + s \delta_{\alpha 2} \Theta_3 + \kappa_{\alpha\alpha} M_{\alpha\alpha} x + \theta_{\alpha\alpha}^*(x) \\ \theta_{3-\alpha,\alpha}(x) &= \Theta_{3-\alpha} - \frac{1}{2} x \kappa_{3-\alpha,\alpha} (2M_{3-\alpha,\alpha} + l_{\alpha} N_{3\alpha} x) + \theta_{3-\alpha,\alpha}^*(x) \\ u_{31}(x) &= U_3 + \Theta_2 x - \frac{1}{6} x^2 \kappa_{21} (3M_{21} + l_1 N_{31} x) + u_{31}^*(x) \\ u_{32}(x) &= c \lambda U_3 + s U_2 + \Theta_1 x - \frac{1}{6} x^2 \kappa_{12} (3M_{12} + l_2 N_{32} x) + u_{32}^*(x) \\ n_{j\alpha}(x) &= N_{j\alpha} + n_{j\alpha}^*(x), \quad N_{j\alpha} = n_{j\alpha}(0) \\ m_{\alpha\alpha}(x) &= M_{\alpha\alpha} + m_{\alpha\alpha}^*(x), \quad m_{3-\alpha,\alpha}(x) = M_{3-\alpha,\alpha} + l_{\alpha} N_{3\alpha} x + m_{3-\alpha,\alpha}^*(x) \\ m_{3\alpha}(x) &= M_{3\alpha} + l_{\alpha} N_{3-\alpha,\alpha} x + m_{3\alpha}^*(x), \quad M_{j\alpha} = m_{j\alpha}(0) \end{aligned} \tag{1.6}$$

в которых введены начальные усилия $N_{j\alpha}$ и моменты $M_{j\alpha}$ α -стержня и использованы обозначения

$$\begin{aligned} \kappa_{0\alpha} &= (g_{0\alpha} l_{3-\alpha})^{-1}, \quad \kappa_{j\alpha} = l_{\alpha} g_{j\alpha}^{-1}, \quad g_{j\alpha}^* = g_{j\alpha} l_{\alpha}^{-2} \quad (j=1,2,3) \\ u_{\alpha\alpha}^*(x) &= -l_{\alpha} g_{0\alpha}^{-1} \int_0^x (x-\tau) p_{\alpha\alpha}(\tau) d\tau, \quad n_{\alpha\alpha}^*(x) = g_{0\alpha} u_{\alpha\alpha}^{\prime*}(x) \\ u_{3-\alpha,\alpha}^*(x) &= \frac{1}{6} l_{\alpha} \kappa_{3\alpha} \int_0^x (x-\tau)^3 [l_{\alpha} p_{3-\alpha,\alpha}(\tau) + r'_{3\alpha}(\tau)] d\tau, \quad \theta_{3\alpha}^*(x) = u_{3-\alpha,\alpha}^{\prime*}(x) \\ m_{3\alpha}^*(x) &= -l_{\alpha} g_{3\alpha}^* u_{3-\alpha,\alpha}^{\prime\prime*}(x), \quad n_{3-\alpha,\alpha}^*(x) = -g_{3\alpha}^* u_{3-\alpha,\alpha}^{\prime\prime\prime*}(x) + r_{3\alpha}(x) \\ \theta_{\alpha\alpha}^*(x) &= -l_{\alpha}^2 g_{\alpha\alpha}^{-1} \int_0^x (x-\tau) r_{\alpha\alpha}(\tau) d\tau, \quad m_{\alpha\alpha}^*(x) = l_{\alpha} g_{\alpha\alpha}^* \theta_{\alpha\alpha}^{\prime*}(x) \\ u_{3\alpha}^*(x) &= \frac{1}{6} l_{\alpha} \kappa_{3-\alpha,\alpha} \int_0^x (x-\tau)^3 [l_{\alpha} p_{3\alpha}(\tau) + r'_{3-\alpha,\alpha}(\tau)] d\tau, \quad \theta_{3-\alpha,\alpha}^*(x) = u_{3\alpha}^{\prime*}(x), \\ m_{3-\alpha,\alpha}^*(x) &= -l_{\alpha} g_{3-\alpha,\alpha}^* u_{3\alpha}^{\prime\prime*}(x), \quad n_{3\alpha}^*(x) = -g_{3-\alpha,\alpha}^* u_{3\alpha}^{\prime\prime\prime*}(x) + r_{3-\alpha,\alpha}(x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.6) в условия (1.5) и вводя обозначения

$$H_{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}, \quad H_{3\alpha} = M_{3\alpha} + l_{\alpha} N_{3-\alpha,\alpha}, \quad H_{3-\alpha,\alpha} = M_{3-\alpha,\alpha} + l_{\alpha} N_{3\alpha} \quad (1.8)$$

приходим к взаимно обратным соотношениям

$$\begin{aligned} U_{\alpha\alpha} &= l_{3-\alpha} \kappa_{0\alpha} N_{\alpha\alpha} + U_{\alpha\alpha}^*, \quad U_{3-\alpha,\alpha} = -\kappa_{3\alpha} (\frac{1}{2} H_{3\alpha} - \frac{1}{3} l_{\alpha} N_{3-\alpha,\alpha}) + U_{3-\alpha,\alpha}^* \\ \Theta_{3\alpha} &= (-1)^{\alpha} [\kappa_{3\alpha} (H_{3\alpha} - \frac{1}{2} l_{\alpha} N_{3-\alpha,\alpha}) - \Theta_{3\alpha}^*] \\ \Theta_{\alpha\alpha} &= \kappa_{\alpha\alpha} H_{\alpha\alpha} + \Theta_{\alpha\alpha}^*, \quad \Theta_{3-\alpha,\alpha} = -\kappa_{3-\alpha,\alpha} (H_{3-\alpha,\alpha} - \frac{1}{2} l_{\alpha} N_{3\alpha}) + \Theta_{3-\alpha,\alpha}^* \\ U_{3\alpha} &= -\kappa_{3-\alpha,\alpha} (\frac{1}{2} H_{3-\alpha,\alpha} - \frac{1}{3} l_{\alpha} N_{3\alpha}) + U_{3\alpha}^* \\ N_{\alpha\alpha} &= g_{0\alpha} U_{\alpha\alpha} - \tilde{N}_{\alpha\alpha}^*, \quad N_{3-\alpha,\alpha} = g_{3\alpha} [12U_{3-\alpha,\alpha} + 6(-1)^{\alpha} \Theta_{3\alpha}] - \tilde{N}_{3-\alpha,\alpha}^* \\ H_{3\alpha} &= g_{3\alpha}^* l_{\alpha} [4(-1)^{\alpha} \Theta_{3\alpha} + 6U_{3-\alpha,\alpha}] - \tilde{H}_{3\alpha}^* \\ H_{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha}^* l_{\alpha} \Theta_{\alpha\alpha} - \tilde{H}_{\alpha\alpha}^*, \quad H_{3-\alpha,\alpha} = g_{3-\alpha,\alpha}^* l_{\alpha} (-4\Theta_{3-\alpha,\alpha} + 6U_{3\alpha}) - \tilde{H}_{3-\alpha,\alpha}^* \\ N_{3\alpha} &= g_{3-\alpha,\alpha}^* (12U_{3\alpha} - 6\Theta_{3-\alpha,\alpha}) - \tilde{N}_{3\alpha}^* \end{aligned} \quad (1.9)$$

В них выделены полные деформации α -стержней (см. (1.1)):

$$\begin{aligned} U_{\alpha\alpha} &= c^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^+ U_{\alpha} + \delta_{\alpha 2} s \lambda (1 + \nabla_2^+) U_3 \\ U_{3-\alpha,\alpha} &= \lambda^{2\alpha-3} \Delta_{\alpha}^+ U_{3-\alpha} + (-1)^{\alpha} c^{\alpha-1} \Theta_3 - \delta_{\alpha 2} s \Theta_2 \\ \Theta_{3\alpha} &= c^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^+ \Theta_3 + \delta_{\alpha 2} s (1 + \nabla_2^+) \Theta_2 \\ \Theta_{\alpha\alpha} &= c^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^+ \Theta_{\alpha} - \delta_{\alpha 2} s (1 + \nabla_2^+) \Theta_3, \quad \Theta_{3-\alpha,\alpha} = \Delta_{\alpha}^+ \Theta_{3-\alpha} \\ U_{3\alpha} &= (c\lambda)^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^+ U_3 - \Theta_{3-\alpha} - \delta_{\alpha 2} s (1 + \nabla_2^+) U_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

($U_{j\alpha}$ и $\Theta_{j\alpha}$ – взаимные соответственно смещение вдоль оси x_j и угол поворота относительно той же оси концевых сечений α -стержня) и введены обозначения (см. (1.7)):

$$\begin{aligned} U_{j\alpha}^* &= u_{j\alpha}^*(1), \quad \Theta_{j\alpha}^* = \theta_{j\alpha}^*(1) \\ \tilde{N}_{\alpha\alpha}^* &= g_{0\alpha} U_{\alpha\alpha}^*, \quad \tilde{N}_{3-\alpha,\alpha}^* = g_{3\alpha}^* (12U_{3-\alpha,\alpha}^* - 6\Theta_{3\alpha}^*), \quad \tilde{H}_{3\alpha}^* = g_{3\alpha}^* l_{\alpha} (6U_{3-\alpha,\alpha}^* - 4\Theta_{3\alpha}^*) \\ \tilde{H}_{\alpha\alpha}^* &= g_{\alpha\alpha}^* l_{\alpha} \Theta_{\alpha\alpha}^*, \quad \tilde{H}_{3-\alpha,\alpha}^* = g_{3-\alpha,\alpha}^* l_{\alpha} (6U_{3\alpha}^* - 4\Theta_{3-\alpha,\alpha}^*), \quad \tilde{N}_{3\alpha}^* = g_{3\alpha}^* (12U_{3\alpha}^* - 6\Theta_{3-\alpha,\alpha}^*) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Изначальные силовые и моментные уравнения равновесия внутренних изолированных узлов каркаса

$$\begin{aligned} c^{\alpha-1} [n_{\alpha\alpha}(0) - \nabla_{\alpha}^- n_{\alpha\alpha}(1)] + n_{\alpha,3-\alpha}(0) - \nabla_{3-\alpha}^- n_{\alpha,3-\alpha}(1) + \delta_{\alpha 2} s [n_{32}(0) + \nabla_2^- n_{32}(1)] + P_{\alpha} &= 0 \\ m_{31}(0) - \nabla_1^- m_{31}(1) - c [m_{32}(0) - \nabla_2^- m_{32}(1)] - s [m_{22}(0) + \nabla_2^- m_{22}(1)] + M_3 &= 0 \\ c^{\alpha-1} [m_{\alpha\alpha}(0) - \nabla_{\alpha}^- m_{\alpha\alpha}(1)] - m_{\alpha,3-\alpha}(0) + \nabla_{3-\alpha}^- m_{\alpha,3-\alpha}(1) - \delta_{\alpha 2} s [m_{32}(0) + \\ + \nabla_2^- m_{32}(1)] + M_{\alpha} &= 0 \\ n_{31}(0) - \nabla_1^- n_{31}(1) + c [n_{32}(0) - \nabla_2^- n_{32}(1)] - s [n_{22}(0) + \nabla_2^- n_{22}(1)] + P_3 &= 0 \end{aligned}$$

после преобразований с помощью формул (1.6) и перехода к величинам (1.8) при-

нимают окончательный вид

$$\begin{aligned}
 c^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^{-} N_{\alpha\alpha} + \Delta_{3-\alpha}^{-} N_{\alpha,3-\alpha} + \delta_{\alpha 2} s (1 + \nabla_2^{-}) N_{32} + P_{\alpha}^{*} &= 0 \\
 \Delta_1^{-} H_{31} - l_1 N_{21} - c (\Delta_2^{-} H_{32} - l_2 N_{12}) - s (1 + \nabla_2^{-}) H_{22} + M_3^{*} &= 0 \\
 c^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^{-} H_{\alpha\alpha} - \Delta_{3-\alpha}^{-} H_{\alpha,3-\alpha} + l_{3-\alpha} N_{3,3-\alpha} - \delta_{\alpha 2} s [(1 + \nabla_2^{-}) H_{32} - l_2 N_{12}] + M_{\alpha}^{*} &= 0 \\
 \Delta_1^{-} N_{31} + c \Delta_2^{-} N_{32} - s (1 + \nabla_2^{-}) N_{22} + P_3^{*} &= 0 \quad (m = 1, 2, \dots, I-1)
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Вошедшие в них свободные члены определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha}^{*} &= P_{\alpha} - c^{\alpha-1} \nabla_{\alpha}^{-} n_{\alpha\alpha}^{*}(1) - \nabla_{3-\alpha}^{-} n_{\alpha,3-\alpha}^{*}(1) + \delta_{\alpha 2} s \nabla_2^{-} n_{32}^{*}(1) \\
 M_3^{*} &= M_3 - \nabla_1^{-} m_{31}^{*}(1) + \nabla_2^{-} [c m_{32}^{*}(1) - s m_{22}^{*}(1)] \\
 M_{\alpha}^{*} &= M_{\alpha} - c^{\alpha-1} \nabla_{\alpha}^{-} m_{\alpha\alpha}^{*}(1) + \nabla_{3-\alpha}^{-} m_{\alpha,3-\alpha}^{*}(1) - \delta_{\alpha 2} s \nabla_2^{-} m_{32}^{*}(1) \\
 P_3^{*} &= P_3 - \nabla_1^{-} n_{31}^{*}(1) - \nabla_2^{-} [c n_{32}^{*}(1) + s n_{22}^{*}(1)]
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

а область изменения параметра n зависит от того, какой каркас замкнутый или незамкнутый. В первом случае $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, а во втором $n = 1, 2, \dots, J-1$.

Уравнения равновесия граничных узлов свободного каркаса получаются из уравнений (1.13) путем отбрасывания в них несуществующих величин и из-за ограниченности объема не приводятся. В изучаемой теории они играют роль статических граничных условий. Если же на граничные узлы наложены внешние связи, предписывающие им смещения U_j^{*} и углы поворота Θ_j^{*} , то упомянутые уравнения следует заменить геометрическими граничными условиями вида $U_j = U_j^{*}$, $\Theta_j = \Theta_j^{*}$.

Итак, деформирование каркаса описано с точностью до узловых смещений U_j , углов поворота Θ_j , начальных усилий $N_{j\alpha}$ и моментов $H_{j\alpha}$ (или $M_{j\alpha}$, см. (1.6), (1.8)). Для отыскания всех этих величин предназначены уравнения (1.9) (или (1.10)), (1.11), (1.13), которые в изучаемой теории играют роль соответственно физических, геометрических и статических зависимостей. Однако они еще не образуют полной совокупности определяющих соотношений теории.

Это объясняется тем, что число статических искомым $N_{j\alpha}$, $H_{j\alpha}$ в свободном незамкнутом каркасе, равно $12IJ + 6(I + J)$, превосходит число $6IJ + 6(I + J)$ независимых уравнений равновесия в этих неизвестных на $6IJ$ (в силу предполагаемого глобального равновесия свободного каркаса общее число уравнений равновесия сокращено на 6). Следовательно, рассматриваемая задача $6IJ$ раз статически неопределима, и должно существовать такое же количество уравнений совместности деформаций. Они без труда устанавливаются путем исключения узловых смещений U_j и углов поворота Θ_j из геометрических соотношений (1.11) и имеют вид

$$\begin{aligned}
 \lambda^{3-2\alpha} \Delta_{3-\alpha}^{+} U_{\alpha\alpha} - c^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^{+} U_{\alpha,3-\alpha} - (-1)^{\alpha} c^{2-\alpha} \Theta_{3\alpha} - s [\delta_{\alpha 1} \Theta_{21} + \delta_{\alpha 2} (1 + \nabla_2^{+}) U_{31}] &= 0 \\
 \Delta_1^{+} \Theta_{32} - c \Delta_2^{+} \Theta_{31} - s (1 + \nabla_2^{+}) \Theta_{21} &= 0 \\
 \Delta_{3-\alpha}^{+} \Theta_{\alpha\alpha} - c^{\alpha-1} \Delta_{\alpha}^{+} \Theta_{\alpha,3-\alpha} + \delta_{\alpha 2} s (1 + \nabla_2^{+}) \Theta_{31} &= 0 \\
 \Delta_1^{+} U_{32} + \Theta_{11} - \lambda [c \Delta_2^{+} U_{31} + \Theta_{22} - s (1 + \nabla_2^{+}) U_{21}] &= 0 \\
 (m = 0, 1, 2, \dots, I-1; n = 0, 1, 2, \dots, J-1)
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

В случае замкнутого каркаса, когда его элементы, соответствующие значениям $n = 0$ и $n = N$, совпадают, и имеет место дискретная периодичность

$\nabla_2^{\pm N} N_{j\alpha} = N_{j\alpha}$, $\nabla_2^{\pm N} H_{j\alpha} = H_{j\alpha}$ (под $\nabla_2^{\pm N}$ понимается N -кратный оператор ∇_2^{\pm}), число статических искомого и уравнений равновесия сокращается соответственно на $6I$ и $6(I+1)$. Это, казалось бы, приводит к превышению числа статических искомого над числом уравнений, служащих для их определения, на 6. Однако в силу замкнутости каркаса появляется ровно столько же дополнительных условий, обеспечивающих отсутствие в нем жестких дислокационных обобщенных смещений, гарантирующих однозначность обобщенных смещений при обходе замкнутого контура каркаса.

Уравнения (1.9) (или (1.10)), (1.11), (1.13) и (1.15) образуют полную замкнутую систему определяющих соотношений теории призматического каркаса.

2. Альтернативные постановки задач. Примем сначала за основные, определяемые в первую очередь, неизвестные узловые смещения U_j и углы поворота Θ_j . Подставляя выражения (1.11) в формулы (1.10), а полученный результат в уравнения равновесия (1.13), приходим к системе уравнений в частных разностях с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} D_{\alpha\alpha}U_\alpha + D_{\alpha 3}\Theta_3 + D_{\alpha,6-\alpha}\Theta_{3-\alpha} + \delta_{\alpha 2}D_{26}U_3 + \tilde{P}_\alpha^* &= 0 \\ \lambda D_{13}U_1 + D_{23}U_2 + D_{33}\Theta_3 + D_{35}\Theta_2 + \tilde{M}_3^* &= 0 \\ \lambda^{2\alpha-3}D_{3-\alpha,3+\alpha}U_{3-\alpha} + \delta_{\alpha 2}D_{35}\Theta_3 + D_{3+\alpha,3+\alpha}\Theta_\alpha + \lambda^{\alpha-1}D_{3+\alpha,6}U_3 + \tilde{M}_\alpha^* &= 0 \\ -D_{26}U_2 - D_{46}\Theta_1 - D_{56}\Theta_2 + D_{66}U_3 + \tilde{P}_3^* &= 0 \quad (m=1,2,\dots,I-1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

двенадцатого совокупного порядка, на что указывают разностные операторы (см. (1.2))

$$\begin{aligned} D_{\alpha\alpha} &= c^{2\alpha-2}g_{0\alpha}\Delta_\alpha^2 + 12\lambda^{3-2\alpha}g_{3,3-\alpha}^*\Delta_{3-\alpha}^2 - 12\delta_{\alpha 2}s^2g_{12}^*(\Delta_2^2 + 4) \\ D_{\alpha 3} &= -6(-c)^{2-\alpha}g_{3,3-\alpha}^*(\Delta_{3-\alpha}^+ + \Delta_{3-\alpha}^-), \quad D_{15} = 6sg_{32}^*\Delta_2^2 \\ D_{24} &= -6sg_{12}^*(\Delta_2^2 + 4), \quad D_{26} = cs\lambda(g_{02} + 12g_{12}^*)(\Delta_2^+ + \Delta_2^-) \\ D_{33} &= 2\lambda g_{31}^*(\Delta_1^2 + 6) + 2c^2g_{32}^*(\Delta_2^2 + 6) + s^2g_{22}^*(\Delta_2^2 + 4) \\ D_{35} &= -cs(g_{22}^* - 2g_{32}^*)(\Delta_2^+ + \Delta_2^-) \\ D_{3+\alpha,3+\alpha} &= c^{2\alpha-2}g_{\alpha\alpha}^*\Delta_\alpha^2 - 2\lambda^{2\alpha-3}g_{\alpha,3-\alpha}^*(\Delta_{3-\alpha}^2 + 6) + 2\delta_{\alpha 2}s^2g_{32}^*(\Delta_2^2 - 2) \\ D_{3+\alpha,6} &= 6c^{2-\alpha}g_{\alpha,3-\alpha}^*(\Delta_{3-\alpha}^+ + \Delta_{3-\alpha}^-) \\ D_{66} &= 12(g_{21}^*\Delta_1^2 + c^2\lambda g_{12}^*\Delta_2^2) - s^2\lambda g_{02}(\Delta_2^2 + 4) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Свободные члены в уравнениях системы (2.1) равны

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\alpha^* &= P_\alpha^* - c^{\alpha-1}\Delta_\alpha^-\tilde{N}_{\alpha\alpha}^* - \Delta_{3-\alpha}^-\tilde{N}_{\alpha,3-\alpha}^* - \delta_{\alpha 2}s(1 + \nabla_2^-)\tilde{N}_{32}^* \\ \tilde{M}_3^* &= M_3^* - \Delta_1^-\tilde{H}_{31}^* + l_1\tilde{N}_{21}^* + c(\Delta_2^-\tilde{H}_{32}^* - l_2\tilde{N}_{12}^*) + s(1 + \nabla_2^-)\tilde{H}_{22}^* \\ \tilde{M}_\alpha^* &= M_\alpha^* - c^{\alpha-1}\Delta_\alpha^-\tilde{H}_{\alpha\alpha}^* + \Delta_{3-\alpha}^-\tilde{H}_{\alpha,3-\alpha}^* - l_{3-\alpha}\tilde{N}_{3,3-\alpha}^* + \delta_{\alpha 2}s[(1 + \nabla_2^-)\tilde{H}_{32}^* - l_2\tilde{N}_{12}^*] \\ \tilde{P}_3^* &= P_3^* - \Delta_1^-\tilde{N}_{31}^* - c\Delta_2^-\tilde{N}_{32}^* + s(1 + \nabla_2^-)\tilde{N}_{22}^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аналогичным образом получаются и статические граничные условия в узловых смещениях и углах поворота, которые опять же из-за ограниченности объема здесь не

выписываются. Эти условия или (и) геометрические граничные условия вместе с уравнениями (2.1) образуют дискретную разностную краевую задачу, предназначенную для отыскания искоемых узловых смещений U_j и углов поворота Θ_j .

Пусть теперь роль основных неизвестных отведена силам $N_{j\alpha}$ и моментам $H_{j\alpha}$. Для нахождения их служат уравнения равновесия (1.13), включая устанавливаемые по ним указанным выше образом статические граничные условия, и уравнения совместности деформаций (1.15), выраженные через эти же неизвестные путем исключения полных деформаций α -стержней с помощью зависимостей (1.9). Эта система из двенадцати уравнений, содержащая такое же число искоемых величин $N_{j\alpha}, H_{j\alpha}$, сводится к системе всего шести уравнений относительно шести же силовых функций $\varphi_j[m, n], \psi_j[m, n]$ ($\alpha = 1, 2; j = 1, 2, 3$) – дискретных аналогов функций напряжений. Действительно нетрудно видеть, что общее решение системы (1.13) представимо в виде

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha} &= l_{3-\alpha}^{-1} \Delta_{3-\alpha}^- \varphi_\alpha + N_{\alpha\alpha}^* \\ N_{\alpha,3-\alpha} &= -c^{\alpha-1} l_{3-\alpha}^{-1} \Delta_{3-\alpha}^- \varphi_\alpha - \delta_{\alpha 2} s l_2^{-1} (1 + \nabla_2^-) \psi_3 + N_{\alpha,3-\alpha}^* \\ H_{3\alpha} &= c^{2-\alpha} (\varphi_\alpha + \Delta_{3-\alpha}^- \varphi_3) + \delta_{\alpha 1} s (1 + \nabla_2^-) \psi_2 + H_{3\alpha}^* \\ H_{\alpha\alpha} &= \Delta_{3-\alpha}^- \psi_\alpha - (-\lambda)^{\alpha-1} \psi_3 + H_{\alpha\alpha}^* \\ H_{\alpha,3-\alpha} &= c^{\alpha-1} \Delta_{3-\alpha}^- \psi_\alpha - \delta_{\alpha 2} s [\varphi_1 + (1 + \nabla_2^-) \varphi_3] + H_{\alpha,3-\alpha}^* \\ N_{3\alpha} &= (-c)^{2-\alpha} l_2^{-1} \Delta_{3-\alpha}^- \psi_3 + \delta_{\alpha 1} s l_1^{-1} (1 + \nabla_2^-) \varphi_2 + N_{3\alpha}^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $N_{j\alpha}^*, H_{j\alpha}^*$ – какое-либо ее частное решение, для нахождения которого можно воспользоваться какой-то основной системой метода сил или эвристическими соображениями. Можно, наконец, принять

$$\begin{aligned} N_{11}^*[m, n] &= -\sum_{i=0}^m P_1^*[i, n], & N_{22}^*[m, n] &= -c^{-1} \sum_{i=0}^n P_2^*[m, i] \\ H_{31}^*[m, n] &= -\sum_{i=0}^m M_3^*[i, n], & H_{11}^*[m, n] &= -\sum_{i=0}^m M_1^*[i, n] \\ H_{22}^*[m, n] &= -c^{-1} \sum_{i=0}^n M_2^*[m, i], & N_{31}^*[m, n] &= -\sum_{i=0}^m P_3^*[i, n] \\ N_{\alpha,3-\alpha}^*[m, n] &= H_{\alpha,3-\alpha}^*[m, n] = H_{32}^*[m, n] = N_{32}^*[m, n] = 0 \end{aligned}$$

Анализ уравнений равновесия граничных узлов свободного незамкнутого призматического каркаса приводит к условиям

$$\varphi_j = 0, \quad \psi_j = 0 \quad (m = -1, l \quad \text{и (или)} \quad n = -1, J; j = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

Если же свободный каркас замкнут, то те из этих условий, которые отвечают фиксированным значениям n , заменяются условиями дискретной периодичности

$$\nabla_2^{\pm N} \varphi_j = \varphi_j, \quad \nabla_2^{\pm N} \psi_j = \psi_j \quad (2.6)$$

Подставляя теперь выражения (2.4) в уравнения совместности деформаций, выраженные через внутренние силовые факторы, приходим к системе уравнений в частных разностях с постоянными же коэффициентами

$$\begin{aligned} R_{\alpha\alpha} \varphi_\alpha + R_{\alpha,3-\alpha} \varphi_{3-\alpha} + R_{\alpha 3}^- \varphi_3 + R_{\alpha}^- [\frac{1}{2}(3-\alpha)\psi_2 + \frac{1}{6}(4-\alpha)\lambda\psi_3] + N_\alpha &= 0 \\ R_{13}^+ \varphi_1 + R_{23}^+ \varphi_2 + R_{33} \varphi_3 + R_2^- (\psi_2 + \frac{1}{2}\lambda\psi_3) + H_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha 2}[R_1^+ \varphi_1 + R_2^+(\frac{1}{2}\varphi_2 + \varphi_3)] + R_{3+\alpha, 3+\alpha} \psi_\alpha + R_{3+\alpha}^+ \psi_3 + H_\alpha &= 0 \\ \lambda[\frac{1}{2}R_2^+ \varphi_1 + R_2^+(\frac{1}{3}\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_3)] + R_4^- \psi_1 + R_5^- \psi_2 + R_{66} \psi_3 + N_3 &= 0 \\ (m = 0, 1, 2, \dots, I-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots, J-1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

и опять двенадцатого совокупного порядка, что легко устанавливается по разностным операторам

$$\begin{aligned} R_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{3}(c^{2\alpha-2}\kappa_{3,3-\alpha} - s^2\kappa_{21}\delta_{\alpha 2})\Delta_\alpha^2 + \lambda^{3-2\alpha}\kappa_{0\alpha}\Delta_{3-\alpha}^2 - c^{4-2\alpha}\kappa_{3\alpha} - \frac{1}{3}(\alpha+2)s^2\kappa_{21} \\ R_{\alpha,3-\alpha} &= \frac{1}{2}[(c^{2\alpha-2}\kappa_{3,3-\alpha} - s^2\kappa_{21}\delta_{\alpha 2})\Delta_\alpha^+ - (c^{4-2\alpha}\kappa_{3\alpha} - s^2\kappa_{21}\delta_{\alpha 1})\Delta_{3-\alpha}^+ - 2s^2\kappa_{21}] \\ R_{\alpha 3}^\pm &= \frac{1}{2}(c^{2\alpha-2}\kappa_{3,3-\alpha} - s^2\kappa_{21}\delta_{\alpha 2})\Delta_\alpha^2 \pm (c^{4-2\alpha}\kappa_{3\alpha} - s^2\kappa_{21}\delta_{\alpha 1})\Delta_{3-\alpha}^\pm - 2s^2\kappa_{21} \\ R_1^\pm &= \mp cs[(\kappa_{21} + \kappa_{31})\Delta_2^\pm \pm 2\kappa_{31}], \quad R_2^\pm = \pm cs(\kappa_{21} + \kappa_{31})(\Delta_2^+ + \Delta_2^-) \\ R_{33} &= \kappa_{32}\Delta_1^2 + (c^2\kappa_{31} - s^2\kappa_{21})\Delta_2^2 - 4s^2\kappa_{21} \\ R_{3+\alpha, 3+\alpha} &= \kappa_{\alpha\alpha}\Delta_{3-\alpha}^2 + (c^{2\alpha-2}\kappa_{\alpha, 3-\alpha} - s^2\kappa_{31}\delta_{\alpha 2})\Delta_\alpha^2 - 4s^2\kappa_{31}\delta_{\alpha 2} \\ R_{3+\alpha}^\pm &= -(-\lambda)\alpha^{-1}[\frac{1}{2}(c^{2\alpha-2}\kappa_{\alpha, 3-\alpha} - s^2\kappa_{31}\delta_{\alpha 2})\Delta_\alpha^2 \pm \kappa_{\alpha\alpha}\Delta_{3-\alpha}^\pm - 2s^2\kappa_{31}\delta_{\alpha 2}] \\ R_{66} &= \frac{1}{3}[\kappa_{12}\Delta_1^2 + \lambda^2(c^2\kappa_{21} - s^2\kappa_{31})\Delta_2^2] - \kappa_{11} - \lambda^2\kappa_{22} - \frac{4}{3}(\lambda s)^2\kappa_{31} \end{aligned}$$

Под $N_\alpha, H_3, H_\alpha, N_3$ в системе (2.7) понимаются левые части соответствующих уравнений (1.15) после замены в них $U_{j\alpha}, \Theta_{j\alpha}$ на $U_{j\alpha}^*, \Theta_{j\alpha}^*$. Дискретная разностная краевая задача (2.7), (2.4) (или (2.5)) служит для отыскания силовых функций, по которым искомые силы $N_{j\alpha}$ и моменты $H_{j\alpha}$ находятся по формулам (2.4).

Заметим, что в случае незамкнутого каркаса в пределе при $\theta \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ но так, что $l_2 = 2sR$ сохраняет заданное конечное значение; изложенная теория переходит, как и следовало ожидать, в теорию пространственного деформирования плоской ортогональной решетки [3].

Теория призматического каркаса допускает обобщения в различных направлениях. Остановимся на принципиальной стороне некоторых из них.

Первое обобщение свяжем с искусственным введением несовместностей смещений и углов поворота смежных элементов каркаса в местах их сочленения. Пусть $d_{j\alpha}^{(s)}$ и $\vartheta_{j\alpha}^{(s)}$ ($s = 0, 1; j = 1, 2, 3$) – взаимные смещения и углы поворота соответственно вдоль и вокруг локальной оси x_j начала ($s = 0$) и конца ($s = 1$) α -стержня с примыкающими к нему узлами каркаса. Если геометрические условия сопряжения (1.4), (1.5) заменить равенствами

$$\begin{aligned} u_{\alpha 1}(0) &= \lambda^{1-\alpha}U_\alpha + d_{\alpha 1}^{(0)}, \quad u_{31}(0) = U_3 + d_{31}^{(0)}, \quad \theta_{j1}(0) = \Theta_j + \vartheta_{j1}^{(0)} \\ u_{12}(0) &= \lambda U_1 + d_{12}^{(0)}, \quad u_{\alpha+1,2}(0) = \delta_{\alpha 1}(cU_2 - s\lambda U_3) + \delta_{\alpha 2}(sU_2 + c\lambda U_3) + d_{\alpha+1,2}^{(0)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \theta_{12}(0) &= \Theta_1 + \vartheta_{12}^{(0)}, \quad \theta_{\alpha+1,2}(0) = \delta_{\alpha 1}(c\Theta_2 + s\Theta_3) + \delta_{\alpha 2}(s\Theta_2 - c\Theta_3) + \vartheta_{\alpha+1,2}^{(0)} \\ u_{\alpha 1}(1) &= \lambda^{1-\alpha}\nabla_1^+ U_\alpha - d_{\alpha 1}^{(1)}, \quad u_{31}(1) = \nabla_1^+ U_3 - d_{31}^{(1)}, \quad \theta_{j1}(1) = \nabla_1^+ \Theta_j - \vartheta_{j1}^{(1)} \\ u_{12}(1) &= \lambda \nabla_2^+ U_1 - d_{12}^{(1)}, \quad u_{\alpha+1,2}(1) = \nabla_2^+ [\delta_{\alpha 1}(cU_2 + s\lambda U_3) - \delta_{\alpha 2}(sU_2 - c\lambda U_3)] - d_{\alpha+1,2}^{(1)} \\ \theta_{12}(1) &= \nabla_2^+ \Theta_1 - \vartheta_{12}^{(1)}, \quad \theta_{\alpha+1,2}(1) = \nabla_2^+ [\delta_{\alpha 1}(c\Theta_2 - s\Theta_3) - \delta_{\alpha 2}(s\Theta_2 + c\Theta_3)] - \vartheta_{\alpha+1,2}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

то, во-первых, претерпят изменения формулы (1.6) для смещений $u_{j\alpha}(x)$ и углов

поворота $\theta_{j\alpha}(x)$ α -стержней, в правых частях которых из-за новых геометрических условий сопряжения (2.8) появятся слагаемые $d_{j\alpha}^{(0)}$ и $\vartheta_{j\alpha}^{(0)}$, а во-вторых, измениться смысл величин $U_{j\alpha}^*$, $\Theta_{j\alpha}^*$ (см. (1.12), (2.9)), которые теперь становятся равными

$$U_{j\alpha}^* = u_{j\alpha}^*(1) + d_{j\alpha}, \quad \Theta_{j\alpha}^* = \theta_{j\alpha}^*(1) + \vartheta_{j\alpha}, \quad d_{j\alpha} = d_{j\alpha}^{(0)} + d_{j\alpha}^{(1)}, \quad \vartheta_{j\alpha} = \vartheta_{j\alpha}^{(0)} + \vartheta_{j\alpha}^{(1)}$$

Введение через них в определяющие соотношения несовместностей в явном виде дает возможность влиять непосредственно на характер взаимодействия элементов каркаса и тем самым существенным образом расширить круг задач, которые могут быть изучены как в рамках построенной выше теории, так и рассматриваемых ниже ее обобщений. Если, например, потребовать, чтобы все несовместности, исключая величины $\vartheta_{j\alpha}^{(0)}$ и $\nabla_{\alpha}^{-} \vartheta_{j\alpha}^{(1)}$, отвечающие некоторым фиксированным значениям m, n , равнялись нулю вместе с $M_j, M_{j\alpha}$ и $\nabla_{\alpha}^{-} m_{j\alpha}$ (1) при тех же фиксированных m, n , то в итоге приходим к задаче о каркасе с шарнирным соединением α -стержней в выделенном фиксированными значениями m, n узле. Очевидные рассуждения указывают на способ полного нарушения связей (повреждения) отдельных элементов каркаса. Необходимо лишь следить за тем, чтобы вводимые повреждения и взаимные подвижности соседних элементов каркаса в местах их сочленения не влекли за собой его геометрическую изменчивость.

Не касаясь деталей, заметим, что путем соответствующей регламентации несовместностей можно учесть самые разнообразные эффекты. Среди них выделим упругий или иной разрывный в отношении обобщенных смещений характер взаимодействия элементов каркаса, повреждения отдельных α -стержней, нагрев и (или) начальную напряженность или деформированность всех или отдельных α -стержней, а также сводящиеся к ним технологические несовершенства, и, наконец, несоосность и (или) то обстоятельство, что упругие линии α -стержней не принадлежат единой призматической поверхности.

Следующее обобщение свяжем с распространением построенной теории на задачи динамики. Наиболее простой, хотя и приближенный, способ получения уравнений движения дает метод сосредоточенных масс. В соответствии с этим методом и принципом Даламбера в соответствующие уравнения равновесия узлов (1.13) следует ввести дополнительно инерционные члены вида $-M\ddot{U}_j$ и $-I_j\ddot{\Theta}_j$ (точки сверху указывают на дифференцирование по времени). Здесь M и I_j — приведенные к узлам массы и массовые моменты инерции относительно локальных осей x_j α -стержней. Значения этих приведенных массовых параметров зависят от схемы дискретизации распределенных инерционных характеристик α -стержней и собственных масс узлов, если таковые имеются в наличии. Строгий учет инерционных свойств каркаса требует поэлементного динамического анализа. Для этого, руководствуясь принципом Даламбера, нужно ввести учитываемые, уже как распределенные, инерционные силы изолированных α -стержней в дифференциальные уравнения их равновесия и скорректировать соответствующим образом уравнения равновесия узлов.

Обобщение обсуждаемых теоретических результатов на случай дискретной геометрической и физической неоднородности каркаса, когда величины l_{α} и $g_{j\alpha}$ меняются в пределах семейств α -стержней, сводится, в конечном счете, к учету некоммутативности перечисленных параметров и разностных операторов. К непринципиальным осложнениям ведет и допустимый отказ от принятого выше соглашения относительно ориентации главных центральных осей поперечных сечений α -стержней.

3. Некоторые аналитические результаты. В качестве примера, иллюстрирующего применение изложенной теории, рассмотрим задачу о деформировании бесконечного ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) замкнутого призматического каркаса под действием радиальных циклически симметричных узловых сил. В этом случае $p_{j\alpha} = r_{j\alpha} = P_{\alpha} = M_j \equiv 0$, а

$P_3 = P_3[m]$. В силу этого (см. (1.7), (1.12), (1.14), (2.3)):

$$u_{j\alpha}^* = \theta_{j\alpha}^* = n_{j\alpha}^* = m_{j\alpha}^* = U_{j\alpha}^* = \Theta_{j\alpha}^* = \tilde{N}_{j\alpha}^* = \tilde{M}_{j\alpha}^* = P_\alpha^* = M_j^* = \tilde{P}_\alpha^* = \tilde{M}_j^* = 0,$$

$$\tilde{P}_3^* = P_3^* = P_3[m]$$

и можно считать, что $U_j = U_j[m]$, $\Theta_j = \Theta_j[m]$. Тогда система (2.1) (см. (2.2)) примет вид

$$g_{01}\Delta_1^2 U_1[m] = 0$$

$$12(\lambda^{-1}g_{31}^*\Delta_1^2 - 4s^2g_{12}^*)U_2[m] - 6g_{31}^*(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)\Theta_3[m] - 24sg_{12}^*\Theta_1[m] = 0$$

$$-6g_{31}^*(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)U_2[m] + [2\lambda g_{31}^*(\Delta_1^2 + 6) + 12c^2g_{32}^* + 4s^2g_{22}^*]\Theta_3[m] = 0$$

$$-24s\lambda^{-1}g_{12}^*U_2[m] + (g_{11}^*\Delta_1^2 - 12\lambda^{-1}g_{12}^*)\Theta_1[m] = 0$$

$$-[2\lambda g_{21}^*(\Delta_1^2 + 6) + 4s^2g_{32}^*]\Theta_2[m] + 6\lambda g_{21}^*(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)U_3[m] = 0$$

$$-6g_{21}^*(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)\Theta_2[m] + (12g_{21}^*\Delta_1^2 - 4s^2\lambda g_{02})U_3[m] + P_3[m] = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

При отсутствии нагрузок на бесконечности первые четыре однородных уравнения имеют только тривиальное решение: $U_\alpha = \Theta_1 = \Theta_3 = 0$ (обобщенные смещения каркаса как жесткого целого в расчет не принимаются). Что касается двух последних уравнений, то им можно придать вид

$$(\nabla_1^+ + 2A + \nabla_1^-)\Theta_2[m] - 3(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)U_3[m] = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2}(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)\Theta_2[m] - (\nabla_1^+ - 2B + \nabla_1^-)U_3[m] = F[m] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$A = 2 + s^2 \frac{g_{32}^*}{\lambda g_{21}^*}, \quad B = 1 + s^2 \frac{\lambda g_{02}}{6g_{21}^*}, \quad F[m] = \frac{P_3[m]}{12g_{21}^*}$$

Для решения системы (3.1) воспользуемся преобразованием Лорана [4]. Пусть образы Лорана

$$u_3(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_3[m]z^m, \quad \theta_2(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Theta_2[m]z^m, \quad f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F[m]z^m \quad (3.2)$$

бесконечных последовательностей $\{U_3[m]\}$, $\{\Theta_2[m]\}$, $\{F[m]\}$ регулярны, по крайней мере, на единичной окружности L . Для искомого функций $u_3(z)$ и $\theta_2(z)$ это предположение оправдывается построенным ниже решением, а для заданной функции $f(z)$ — классом рассматриваемых внешних сил. В силу обратного преобразования Лорана

$$U_3[m] = \frac{1}{2\pi i} \int_L u_3(\zeta) \zeta^{-m-1} d\zeta, \quad \Theta_2[m] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \theta_2(\zeta) \zeta^{-m-1} d\zeta \quad (3.3)$$

$$F[m] = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\zeta) \zeta^{-m-1} d\zeta \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

С помощью этих соотношений система (3.1) преобразуется к виду

$$(\zeta^{-1} + 2A + \zeta)\theta_2(\zeta) - 3(\zeta^{-1} - \zeta)u_3(\zeta) = 0$$

$$\frac{1}{2}(\zeta^{-1} - \zeta)\theta_2(\zeta) - (\zeta^{-1} - 2B + \zeta)u_3(\zeta) = f(\zeta) \quad (\zeta \in L)$$

и в образах Лорана имеет решение

$$u_3(\zeta) = \frac{2f(\zeta)(\zeta^3 + 2A\zeta^2 + \zeta)}{(\zeta - \mu_1)(\zeta - \mu_1^{-1})(\zeta - \mu_2)(\zeta - \mu_2^{-1})}$$

$$\theta_2(\zeta) = \frac{6f(\zeta)(\zeta^3 - \zeta)}{(\zeta - \mu_1)(\zeta - \mu_1^{-1})(\zeta - \mu_2)(\zeta - \mu_2^{-1})} \quad (\zeta \in L)$$

Отсюда после возврата к оригиналам (см. (3.2), (3.3)), с помощью теоремы о вычетах находим выражения

$$U_3[m] = U_3[-m] = \frac{1}{12g_{21}^*} \sum_{j=-\infty}^{\infty} U[m-j]P_3[j] \quad (3.4)$$

$$\theta_2[m] = -\theta_2[-m] = \frac{1}{12g_{21}^*} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Theta[m-j]P_3[j] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Смысл введенных в них обозначений поясняют формулы

$$U[m] = 2(\Gamma[m+1] + 2A\Gamma[m] + \Gamma[m-1]), \quad \Theta[m] = 6(\Gamma[m+1] - \Gamma[m-1]) \quad (3.5)$$

$$\Gamma[m] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\zeta^{-m+1} d\zeta}{(\zeta - \mu_1)(\zeta - \mu_1^{-1})(\zeta - \mu_2)(\zeta - \mu_2^{-1})} = -\frac{1}{2(\eta_1 - \eta_2)} \left(\frac{\mu_1^{-|m|}}{\mu_1} - \frac{\mu_2^{-|m|}}{\mu_2} \right), \quad |\mu_\alpha| > 1$$

$$\mu_\alpha^{\pm 1} = \eta_\alpha \pm \sqrt{\eta_\alpha^2 - 1}, \quad \eta_\alpha = A - B - (-1)^\alpha \sqrt{(A - B)^2 - 2AB + 3}, \quad 2\mu_\alpha^- = \mu_\alpha - \mu_\alpha^{-1}$$

В частности, если $P_3[m] = P\delta_{m0}$, то

$$U_3[m] = P_*U[m], \quad \theta_2[m] = P_*\Theta[m] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad P_* = P/(12g_{21}^*)$$

и согласно зависимостям (1.6)–(1.11) отличные от нуля переменные, описывающие наряду деформированное состояние в элементах каркаса, выражаются формулами

$$\bar{u}_{31}(x; m) = P_*^{-1}u_{31}(x; m) = U[m] - (2x^3 - 3x^2)\Delta_1^+U[m] + (2x^3 - 3x^2 + x)\Theta[m] + (x^3 - x^2)\Delta_1^+\Theta[m]$$

$$\bar{m}_{21}(x; m) = 12(Pl_1)^{-1}m_{21}(x; m) = 6(2x - 1)(\Delta_1^+U[m] - \Theta[m]) + 2(1 - 3x)\Delta_1^+\Theta[m]$$

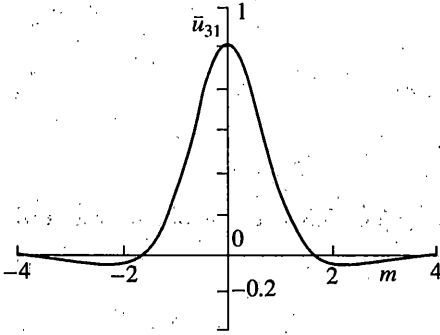
$$\bar{n}_{31}(x; m) = P_*^{-1}n_{31}(x; m) = \Delta_1^+U[m] - \frac{1}{2}(1 + \nabla_1^+)\Theta[m]$$

$$u_{22}(x; m) = P_*s\lambda(2x - 1)U[m], \quad u_{12}(x; m) = P_*\lambda(x - x^2)\Theta[m]$$

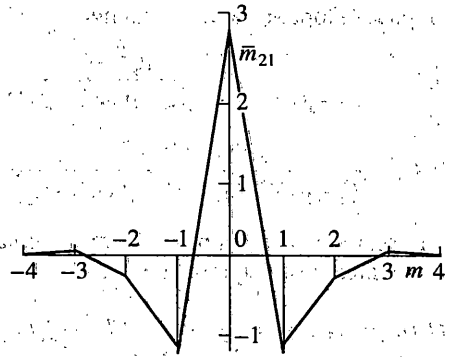
$$\theta_{32}(x; m) = P_*s(1 - 2x)\Theta[m], \quad \theta_{22}(x; m) = P_*c\Theta[m], \quad u_{32}(x; m) = P_*c\lambda U[m]$$

$$n_{22}(x; m) = 2P_*s\lambda g_{02}U[m], \quad m_{32}(x; m) = 2P_*s\lambda g_{32}^*\Theta[m]$$

На фиг. 2, 3 показаны эпюры безразмерных радиального прогиба $\bar{u}_{31}(x; m)$ 1-стержней и изгибающего момента $\bar{m}_{21}(x; m)$ в них, построенные в окрестности действия локальной нагрузки при $N = 16$, $l_1 = 0,2R$, $g_{32} = g_{21}$ и $g_{02} = 400g_{21}^*$. Как видно, полученный результат представляет решение типа дискретного краевого эффекта для призматического каркаса. Оно является дискретным аналогом решения задачи о действии на бесконечную круговую цилиндрическую оболочку осесимметричной локальной нормальной нагрузки [5].



Фиг. 2



Фиг. 3

Этот результат представляет решение типа дискретного краевого эффекта для призматического каркаса и является дискретным аналогом решения задачи о действии на бесконечную круговую цилиндрическую оболочку локальной равномерно распределенной нормальной погонной кольцевой нагрузки [5].

Пусть теперь $P_3[m] = P = \text{const}$. Принимая во внимание соотношение ($\mu_\alpha > 1$):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_\alpha^{-|m|} = \frac{\mu_\alpha + 1}{\mu_\alpha - 1}$$

после очевидных преобразований общего решения (3.4) (см. также (3.5)) приходим к формулам

$$U_3 = \frac{P}{24g_{21}^*(B-1)} = \frac{P}{4s^2\lambda g_{02}}, \quad \Theta_2 \equiv 0$$

Первую из них можно рассматривать как дискретный аналог решения задачи о действии на безмоментную круговую цилиндрическую оболочку постоянного внутреннего давления. Более того, в пределе при $N \rightarrow \infty$ ($\theta \rightarrow 0$; см. (1.3)) и $l_1 \rightarrow 0$, когда каркас вырождается в описывающую его цилиндрическую поверхность радиуса R , это дискретное решение переходит в упомянутое решение для оболочки. В самом деле, если считать, что на эту поверхность, наделенную погонной кольцевой тангенциальной жесткостью $B_2 = g_{02}/l_1$, действует постоянная распределенная нагрузка $p = P(R\theta l_1)$, то для ее нормального размерного смещения w (предельного значения $l_1 U_3$) из обсуждаемого дискретного решения получается в пределе (напомним, что $l_2 = 2sR$) хорошо известное выражение $w = pR^2 B_2^{-1}$ [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбаков Л.С. О теории одной плоской регулярной упругой структуры ферменного типа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 171–179.
2. Рыбаков Л.С. Упругий анализ одной плоской регулярной стержневой структуры // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 198–207.
3. Рыбаков Л.С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 174–189.
4. Гихов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.04.1999