

УДК 534.2

© 2001 г. О.Ю. ДИНАРИЕВ, В.Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

ОБ АКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСАХ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Известно, что упругое тело конечных размеров имеет счетный набор мод собственных колебаний, частоты которых имеют точку сгущения на бесконечности. Если это упругое тело поместить в некоторую бесконечную среду, то, вообще говоря, спектр собственных колебаний может исчезнуть. Однако в широком классе случаев моды собственных колебаний можно выделить и для конечных неоднородностей в бесконечной среде; при этом появляется эффект затухания мод вследствие излучения на пространственную бесконечность, а соответствующие собственные частоты приобретают мнимые части. В такой ситуации собственные моды называют акустическими резонансами. Соответствующий раздел акустики, посвященный исследованию этих явлений, называется акустической спектроскопией или резонансной акустической спектроскопией [1].

Концептуальный и математический аппарат в теории акустических резонансов в значительной мере заимствован из квантовой механики [2], где на изучение резонансов были затрачены большие усилия.

В настоящей работе изложен ряд теоретических и численных результатов, касающихся резонансов в упругих слоистых средах. Среда с самого начала предполагается бесконечной; таким образом, результаты исследования приложимы к телам, для которых полный размер много больше характерного размера неоднородности. Подобная постановка имеет смысл во многих задачах сейсмологии.

Будем рассматривать упругие волны (продольные или поперечные), описываемые уравнением

$$\rho \partial_t^2 u - \partial_x (E \partial_x u) = f(t, x) \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$ – функция перемещений, $\rho = \rho(x)$ – плотность, $E = E(x)$ – модуль упругости. Введем некоторую величину с размерностью давления E_0 (характерное значение модуля упругости), и определим новую пространственную координату y с помощью дифференциального соотношения

$$dy = E_0 dx / E(x)$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\kappa^2 \partial_y^2 u - \partial_y^2 u = E_0^{-2} f(t, y) E(y) \quad (2)$$

$$\kappa = \kappa(x) = (\rho(x) E(x))^{1/2} E_0^{-1}$$

Обсудим граничные условия. Предположим, что вне некоторого пространственного интервала с длиной L функция $\kappa = \kappa(y)$ постоянна: $\kappa(y) = \kappa_-$, $y < 0$; $\kappa(y) = \kappa_+$, $y > L$. Примем, что внешняя сила $f(t, y)$ достаточно быстро стремится к нулю при $y \rightarrow \pm\infty$, и будем искать решения уравнения (2), которые можно интерпретировать, как отклик на возмущающую внешнюю силу. Тогда следует наложить условия излучения на

бесконечности

$$(\kappa_+ \partial_y u + \partial_y u) \rightarrow 0, \text{ если } y \rightarrow +\infty \quad (3)$$

$$(\kappa_- \partial_y u - \partial_y u) \rightarrow 0, \text{ если } y \rightarrow -\infty \quad (4)$$

Выполним в задаче (2)–(4) преобразование Фурье по времени. Тогда получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\partial_y^2 v + \omega^2 \kappa^2 v = F \quad (5)$$

с граничными условиями

$$(i\omega \kappa_+ v + \partial_y v) \rightarrow 0, \text{ если } y \rightarrow +\infty \quad (6)$$

$$(i\omega \kappa_- v - \partial_y v) \rightarrow 0, \text{ если } y \rightarrow -\infty \quad (7)$$

$$u = v(\omega, y) = \int \exp(-i\omega t) u(t, y) dt$$

$$F = F(\omega, y) = -E_0^{-2} \int \exp(-i\omega t) df(t, y) E(y)$$

Введем в рассмотрение два решения однородного уравнения (5) (т.е. когда $F = 0$) $v_+ = v_+(\omega, y)$, $v_- = v_-(\omega, y)$, которые удовлетворяют соответственно следующим граничным условиям:

$$v_+ \rightarrow \exp(-i\omega \kappa_+ y), \text{ если } y \rightarrow +\infty$$

$$v_- \rightarrow \exp(i\omega \kappa_- y), \text{ если } y \rightarrow -\infty$$

и определим функцию Грина

$$G(\omega, y, y_0) = \Delta^{-1} \begin{cases} v_+(\omega, y) v_-(\omega, y_0), & y > y_0 \\ v_-(\omega, y) v_+(\omega, y_0), & y < y_0 \end{cases}$$

$$\Delta = \partial_y v_+(\omega, y_0) v_-(\omega, y_0) - v_+(\omega, y_0) \partial_y v_-(\omega, y_0)$$

Поскольку, как легко проверить, выполняется уравнение

$$(\partial_y^2 + \omega^2 \kappa^2(y)) G(\omega, y, y_0) = \delta(y - y_0)$$

где в правой части стоит δ -функция Дирака, то можно выписать формальное решение задачи (5)–(7):

$$v(\omega, y) = \int G(\omega, y, y_0) F(\omega, y_0) dy_0$$

Граничные условия (6), (7) автоматически удовлетворяются в силу принятых граничных условий на функции $v_+ = v_+(\omega, y)$, $v_- = v_-(\omega, y)$.

Функции $v_+ = v_+(\omega, y)$, $v_- = v_-(\omega, y)$ аналитически продолжают на комплексные значения ω . При соответствующем продолжении функции Грина $G(\omega, y, y_0)$ могут возникать особые точки, связанные с обращением в нуль функции Δ . Исследуем этот вопрос более подробно.

Функция Δ – определитель Вронского, построенный по двум решениям однородного уравнения $v_+ = v_+(\omega, y)$, $v_- = v_-(\omega, y)$. Поэтому эта функция зависит только от параметра ω : $\Delta = \Delta(\omega)$. Обращение Δ в нуль при некотором значении $\omega = \Omega$ означает, что при этом значении комплексной частоты функции v_+ и v_- пропорциональны:

$$v_+(\Omega, y) = C v_-(\Omega, y) \quad (8)$$

Уравнение

$$\Delta(\omega) = 0 \quad (9)$$

не имеет решений при $\text{Im}\omega < 0$, а при $\text{Im}\omega = 0$ имеет только одно решение: $\omega = 0$. Доказательство этого утверждения приведено в п. 1 Приложения.

Итак, в общем случае решения уравнения (9) имеют вид $\Omega_0 = 0$, Ω_n ($n = 1, \dots, \dots$, $\text{Im}\Omega_n > 0$). Решение $\Omega_0 = 0$ существует всегда. Решения с положительной мнимой частью могут и отсутствовать, как показывает тривиальный случай $\kappa = \text{const}$, $\Delta = -2i\kappa\omega$.

Комплексные величины Ω_n могут также быть получены из теории рассеяния. В теории рассеяния рассматриваются решения $V = V(\omega, x)$ однородного уравнения с асимптотиками на бесконечности

$$V \rightarrow T \exp(-i\omega x_+) y, \text{ если } y \rightarrow +\infty$$

$$V \rightarrow \exp(-i\omega x_-) y + R \exp(i\omega x_-) y, \text{ если } y \rightarrow -\infty$$

Здесь $T = T(\omega)$ – коэффициент прохождения, $R = R(\omega)$ – коэффициент отражения. Введенная выше функция $\Delta(\omega)$ явным образом вычисляется через коэффициент прохождения

$$\Delta(\omega) = 2i\omega \kappa T(\omega)^{-1} \quad (10)$$

Доказательство равенства (10) приведено в п. 2 Приложения.

Таким образом, при аналитическом продолжении на комплексные значения ω величины Ω_n определяются, как полюса коэффициента прохождения. Отметим, что при этом величины Ω_n должны также являться полюсами коэффициента отражения. В самом деле, в противном случае при переходе к пределу $\omega \rightarrow \Omega_n$ для функции $T(\omega)^{-1}V(\omega, y)$ получается некоторое решение однородного дифференциального уравнения, которое равно нулю при $y < 0$ и отлично от нуля $y > L$.

В небольшом наборе случаев, когда акустическая задача рассеяния имеет решение в аналитической форме [3], величины Ω_n могут быть рассчитаны через полюса Γ -функций.

Отметим, что при гладкой функции $\kappa = \kappa(y)$ однородная задача имеет асимптотическое решение ВКБ [4]:

$$v = \kappa^{-1/2} \exp\left(-i\omega \int_0^y \kappa(y_0) dy_0\right) (1 + O(\omega^{-1})) \quad (11)$$

Эта асимптотика справедлива, когда $|\omega| \rightarrow +\infty$, а величина $\text{Im}\omega$ остается ограниченной. Очевидно, что в условиях применимости асимптотики (11) коэффициент прохождения не имеет особенностей. Поэтому в любой полосе $0 \leq \text{Im}\omega < \Lambda < +\infty$ может существовать лишь конечный набор решений уравнения (10) Ω_n ($n = 0, \dots, N$).

Если выполнить обратное преобразование Фурье, то можно получить решение исходного уравнения (2):

$$u(t, y) = (2\pi)^{-1} \int \exp(i\omega t) G(\omega, y, y_0) F(\omega, y_0) d\omega dy_0 \quad (12)$$

Интегрирование по ω в формуле (12) должно осуществляться по контуру, лежащем ниже всех особенностей подынтегрального выражения. Пусть все особенности внешней силы $F(\omega, y)$ лежат выше прямой $\text{Im}\omega = \Lambda$. Это предположение, в частности, означает, что внешняя сила $f(t, y)$ обращается в нуль при $t \leq t_*$ для некоторого значения t_* (теорема Пэли – Винера [5]). Передвигая контур интегрирования в (12) вверх с обходом полюсов и взятием соответствующих вычетов, получаем формулу

$$u(t, y) = i \int dy_0 \text{Res}_{\Omega_0} [G(\omega, y, y_0) F(\omega, y_0)] + \\ + i \sum_{n=1}^N \exp(i\Omega_n t) \int dy_0 \text{Res}_{\Omega_n} [G(\omega, y, y_0) F(\omega, y_0)] + O(\exp(-\Lambda t))$$

Таким образом, величины Ω_n ($n > 0$) соответствуют затухающим колебаниям (резонансам), возбуждаемым внешней силой в среде. При этом $\alpha_n = \text{Re}\Omega_n$ – частота резонанса, $\beta_n = \text{Im}\Omega_n$ – коэффициент затухания. Соответственно $T_n = 2\pi/\alpha_n$ – период колебания, $\tau_n = 1/\beta_n$ – среднее время жизни резонанса. На практике представляет интерес как абсолютная величина времени жизни τ_n , так и относительная величина $\xi_n = \tau_n/T_n = \alpha_n/(2\pi\beta_n)$. При малой абсолютной величине τ_n можно ожидать повышенного отклика при возбуждении среды на частотах близких к α_n . С другой стороны, высокая величина ξ_n означает, что соответствующий резонанс существует достаточно долго при прохождении через среду пучка волн с частотой, близкой к α_n .

Наиболее простой случай, когда резонансы вычисляются в явном виде, – это случай трехслойной кусочно-постоянной модели

$$\kappa = \kappa_-, \quad y < 0; \quad \kappa = \kappa_0, \quad 0 \leq y \leq L; \quad \kappa = \kappa_+, \quad L < y$$

На каждом из интервалов находится решение в виде суммы экспонент; стыковка осуществляется из условий непрерывности самой функции v и ее производной. Затем можно выписать уравнение (9) для резонансов. Если опустить решение $\Omega_0 = 0$, то уравнение для величин Ω_n ($n > 0$) имеет вид

$$\exp(2i\kappa_0\omega L) = \gamma \quad (13)$$

$$\gamma = (\kappa_0 - \kappa_+)(\kappa_- - \kappa_0)/(\kappa_0 + \kappa_+)(\kappa_- + \kappa_0)$$

В зависимости от знака γ имеется два набора решений: (а) если $\gamma > 0$:

$$A_+ = \{(2\kappa L)^{-1}(2\pi n + i\beta) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

(б) если $\gamma < 0$:

$$A_- = \{(2\kappa L)^{-1}(\pi + 2\pi n + i\beta) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$\beta = -\ln |\gamma|$$

Если $\gamma = 0$, уравнение (13) решений не имеет.

Итак, все резонансы располагаются на прямой, параллельной действительной оси. Это не соответствует рассмотренному выше приближению ВКБ, поскольку нарушено условие его применения (гладкость $\kappa(y)$). Вообще говоря, все реальные среды имеют плавно меняющиеся свойства. Приближение кусочно-постоянной среды имеет смысл в ограниченном диапазоне действительных частот, когда соответствующие длины волн существенно превышают характерные размеры переходных областей.

Непосредственно из основного дифференциального уравнения можно получить априорные ограничения на распределение резонансов в комплексной области. Рассмотрим частный случай $\kappa_- = \kappa_+ = \zeta$. Обозначим $v = \kappa^2 - \zeta^2$. Для определения резонансов имеем спектральную задачу

$$(\partial_y^2 + \omega^2(\zeta^2 + v))v = 0 \quad (14)$$

с граничными условиями

$$v \rightarrow C_+ \exp(-i\omega\zeta y), \quad \text{если } y \rightarrow +\infty \quad (15)$$

$$v \rightarrow C_- \exp(i\omega\zeta y), \quad \text{если } y \rightarrow -\infty \quad (16)$$

Введем функцию $g(\omega, y) = i(2\zeta\omega)^{-1} \exp(-i\omega\zeta|y|)$ и будем искать решение задачи (14) – (16) в виде

$$v(\omega, y) = \int g(\omega, y - y_0) V(\omega, y_0) dy_0$$

№	a_1	κ_1	a_2	κ_2	a_3	κ_3
1	0.14	0.33	0.8	1.51	0.06	0.37
2	0.09	0.24	0.8	1.63	0.11	0.23
3	0.075	1.51	0.81	0.84	0.124	1.48

При подстановке в уравнение (14) получаем интегральное уравнение на функцию $V(\omega, y)$:

$$V(\omega, y) = (2\zeta)^{-1} i\omega v(y) \int \exp(-i\omega |y - y_0|) V(\omega, y_0) dy_0 \quad (17)$$

Очевидно, что функция V обращается в нуль вне интервала, на котором отлична от нуля функция $v(y)$. При этом граничные условия (15), (16) удовлетворяются автоматически.

Уравнение (17) можно рассматривать как линейное уравнение вида

$$KV = V \quad (18)$$

где K – интегральный оператор, действующий в пространстве функций на отрезке $[0, L]$. Если ввести в этом пространстве подходящую норму так, чтобы оператор K был непрерывным, то мы получим необходимое условие существования решения уравнения (18)

$$\|K\| \geq 1 \quad (19)$$

Поскольку выбор нормы и функционального пространства неоднозначен, то неравенство (19) фактически представляет собой набор априорных оценок на резонансы. Например, если выбрать пространство непрерывных функций с нормой $\max |V|$, то оценка (19) дает неравенство

$$|\omega| \zeta^{-2} \max_{0 \leq y \leq L} |v(y)| (\text{Im } \omega)^{-1} (\exp(L\zeta \text{Im } \omega / 2) - 1) \geq 1$$

В частности, видно, что резонансы с достаточно малыми значениями $\text{Im } \omega$ (достаточно большими временами жизни) могут существовать при достаточно больших значениях $|\omega|$ и (или) при достаточно больших значениях $\max_{0 \leq y \leq L} |v(y)|$.

Для выявления закономерностей распределения резонансов была произведена серия численных расчетов на кусочно-постоянных моделях, причем предполагалось равенство акустических жесткостей на бесконечности $\kappa_+ = \kappa_-$. Для представления результатов расчетов в безразмерном виде использовалась система единиц измерения, в которой равны единице акустическая жесткость на бесконечности и суммарная длина включения: $\kappa_+ = \kappa_- = 1, L = 1$.

На фиг. 1–3 представлены участки плоскости комплексной частоты вблизи начала координат с отмеченными резонансами; расчеты проводились на 5-слойной модели с параметрами:

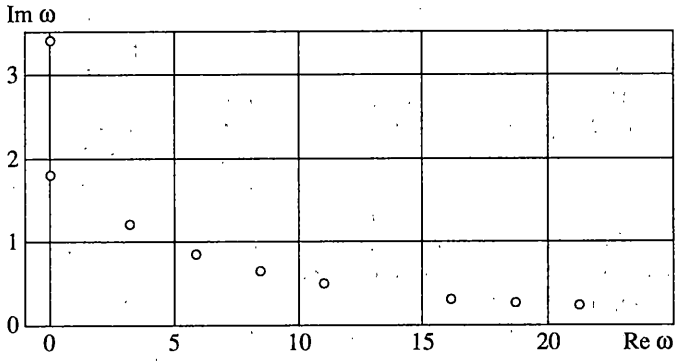
$$\kappa = 1, y < 0, y > 1; \kappa = \kappa_1, 0 < y < a_1$$

$$\kappa = \kappa_2, a_1 < y < a_1 + a_2$$

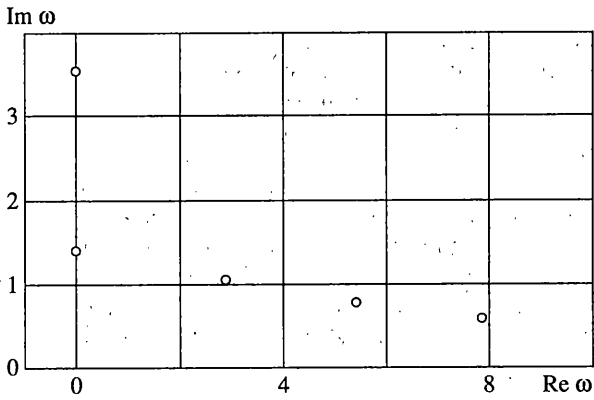
$$\kappa = \kappa_3, a_1 + a_2 < y < a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Конкретные значения параметров для трех вариантов представлены в таблице (номер варианта соответствует номеру фигуры).

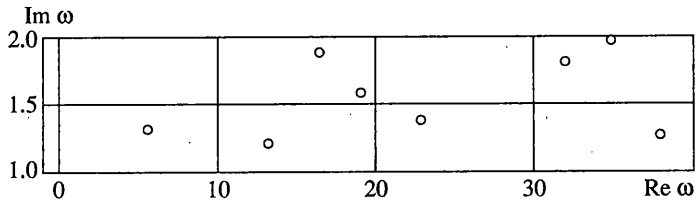
Отметим, что варианты 1 и 2 показывают наличие резонансов с параметрами ξ порядка 10^2 . Кроме того, интересно, что в этих вариантах имеются резонансы с нулевой



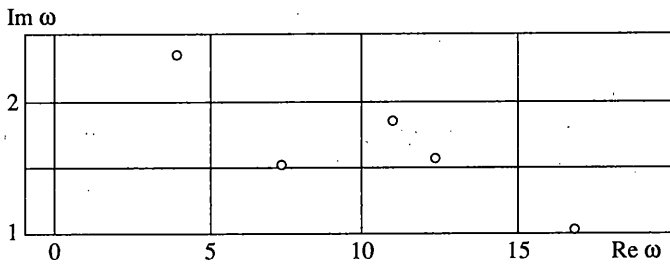
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

действительной частотой; соответствующие моды возбуждаются низкочастотными внешними силами, и параметр ξ формально равен бесконечности. Для этих мод характерен неволновой механизм ухода энергии на пространственную бесконечность.

На фиг. 4 представлены резонансы для случайно-периодической среды. Отрезок $[0,1]$ был разбит на 10 отрезков с длиной 0.1, причем каждый из маленьких отрезков случайным образом разбивался на две части с параметрами $\kappa_1 = 0.35$, $\kappa_2 = 1.5$.

Варианты 1 и 2 соответствуют случаю стоячих волн, захваченных в упругой среде между двумя параллельными трещинами с мягким наполнителем. Точнее говоря, система представляет собой жесткую вставку (дайку кристаллических пород) между двумя мягкими прослоями. Экспериментальные данные, подтверждающие существование таких волн, отмечались в литературе [6], однако для их объяснения предлагались модели со специальной реологией вещества в трещинах.

Модель 3 соответствует слою мягкой, например, разрушенной, породы, в жесткой рамке или, другой интерпретации, трещине, залеченной средой с меньшей акустической жесткостью. Жесткая рамка может быть, например, результатом внедрения кристаллических пород.

Из расчетов видно, что модель 3 и модель 4 (случайно-периодическая среда) неблагоприятны для существования долгоживущих резонансов.

Таким образом, существование резонансов является достаточно общим явлением для слоистых сред. С другой стороны, резонансы могут наблюдаться либо в случае их достаточно долгого времени жизни, либо при специальных спектроскопических исследованиях (для волновых процессов с широким спектром частот). В большинстве случаев реализуются короткоживущие резонансы. Долгоживущие резонансы могут существовать в случае фрагментированной среды с определенной геометрией трещин.

Приложение. 1. Предположим обратное, что $\Omega = \alpha + i\beta$ – решение уравнения (9), $\alpha = \text{Re } \Omega$, $\beta = \text{Im } \Omega < 0$. Тогда в силу принятых граничных условий и соотношения (8) функция $v_+ = v_+(\Omega, y)$ экспоненциально убывает на бесконечности.

Из этого факта и уравнения

$$(\partial_y^2 + \Omega^2 \kappa^2(y))v_+ = 0 \quad (20)$$

следует соотношение

$$0 = \int dy (\partial_y (v_+^* \partial_y v_+ - v_+ \partial_y v_+^*) + 4i\alpha\beta v_+^* v_+) = 4i\alpha\beta \int dy v_+^* v_+$$

откуда получаем $\alpha = 0$. Далее, опять обращаясь к уравнению (20), приходим к противоречию

$$0 = \int dy (\partial_y^2 v_+^* v_+ + v_+ \partial_y^2 v_+^*) - 2\beta^2 v_+^* v_+) = -2 \int dy (|\partial_y v_+|^2 + \beta^2 |v_+|^2)$$

Итак, уравнение (9) не имеет решений при $\text{Im } \omega < 0$.

Предположим теперь, что имеется действительное решение уравнения (20) $\Omega = \text{Re } \Omega$. Тогда определитель Вронского

$$\Delta_1 = v_+^* \partial_y v_+ - v_+ \partial_y v_+^*$$

не зависит от y . Однако вычисляя его на бесконечности с помощью равенства (8) и принятых граничных условий, получаем

$$\Delta_1 = -2i\Omega, \text{ если } y \rightarrow +\infty$$

$$\Delta_1 = 2i\Omega|C|^2, \text{ если } y \rightarrow -\infty$$

Эти равенства могут иметь место, если только $\Omega = 0$. Доказательство закончено.

2. Рассмотрим определитель Вронского

$$\Delta_1 = \partial_y V(\omega, y) V(-\omega, y) - V(\omega, y) \partial_y V(-\omega, y)$$

Его значение не зависит от y . В то же время можно вычислить его значения при $y \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ соответственно

$$\Delta_1 = -2i\omega\kappa_+ T(\omega)T(-\omega)$$

$$\Delta_1 = i\omega\kappa_-(-2 + 2R(\omega)R(-\omega))$$

Отсюда вытекает тождество

$$\kappa_+ T(\omega)T(-\omega) + \kappa_- R(\omega)R(-\omega) = \kappa_- \quad (21)$$

Далее, непосредственно из определений следуют соотношения

$$u_+(\omega, y) = T(\omega)^{-1}V(\omega, y)$$

$$u_-(\omega, y) = (V(-\omega, y) - R(-\omega)V(\omega, y))(1 - R(-\omega)R(\omega))^{-1}$$

С помощью этих соотношений можно вычислить Δ при $y \rightarrow +\infty$

$$\Delta = 2i\omega\kappa_+ T(-\omega)(1 - R(-\omega)R(\omega))^{-1} \quad (22)$$

Из формулы (21) и тождества (22) следует формула (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векслер Н.Д. Акустическая спектроскопия. Таллин: Валгус, 1989. 324 с.
2. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966. 339 с.
3. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 413 с.
4. Федорюк М.В. Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. С. 406–447.
5. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 С.
6. Myer L. Sismic wave propagation in fractured media // Mechanics of Jointed and Faulted Rock. Rotterdam: Balkema, 1998. P. 29–38.

Москва

Поступила в редакцию
25.03.1999