МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. С.А. НАЗАРОВ

ТЕНЗОР И МЕРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ.

3. Характеристики поврежденности, ассоциированные с инвариантным интегралом

Для упругого тела, ослабленного периодическим семейством дефектов, вводятся четырехвалентный тензор поврежденности и соответствующие меры поврежденности. Меры связываются с собственными числами некоторого пучка, содержащего упомянутый тензор, а сам тензор восстанавливается по значениям инвариантного интеграла M на внешней поверхности тела. Названные характеристики входят в асимптотические формулы для приращений деформаций и потенциальной энергии, разрыхленности тела и т.п. Определяются меры поврежденности, адаптированные к фиксированному напряженному состоянию и в частных случаях совпадающие с классической скалярной функцией поврежденности. Выводится кинетическое уравнение накопления повреждений.

1. Предварительное обсуждение. Накопление повреждений – весьма сложное явление, связанное с взаимодействием различных физических процессов и имеющее явно вырожденную стохастическую природу. Для его упрощенного описания обычно вводится тензор поврежденности П (а также вектор или скаляр) и момент разрушения определяется критическими значениями некоторых функционалов от П – мер поврежденности μ_i (см. [1–8] и др.). Далее предлагаются определения П и μ_i, соотнесенные с известным инвариантным интегралом M [9, 10]. Такой интеграл, вычисленный по поверхности однородного тела, равен нулю, однако согласно [11] его значение для поврежденного тела содержит характеристики дефектов. Подобно тому, как интеграл Черепанова – Райса J [12, 13] обусловливает развитие трещин (см. [14] и др.), интеграл M связывается с мерой поврежденности, адаптированной к однородному напряженному состоянию, реализующемуся в бездефектной среде. При этом четырехвалентный тензор поврежденности П полностью восстанавливается по значениям M, отвечающим базисным напряженным состояниям (в трехмерном случае требуется 21 опыт).

Далее повреждения интерпретируются как поры, но тот же математический аппарат позволяет рассмотреть произвольные инородные включения, причем для установления взаимосвязей между изучаемыми объектами не нужно конкретизировать их форму или упругие свойства. Универсальность подхода обеспечивается систематическим использованием понятия тензора (матрицы) упругой поляризации дефекта [15, 16] – в конечном счете все искомые величины выражаются именно через этот тензор.

Перечислим упрощающие предположения, необходимые здесь для устранения математических трудностей при помощи аппарата теории осреднения (см. [17–20] и др.). Во-первых, семейство повреждений обладает периодической структурой и в фиксированный момент времени дефекты являются полостями, у которых фиксирована форма, но не размер (например, трещинами). Во-вторых, вплоть до самого разрушения материал находится в упругом состоянии. Последнее условие означает, что рассматриваются хрупкие материалы в начальной стадии накопления повреждений, т.е. пластические эффекты считаются незначительными, а экстраполяция до момента разрушения используется лишь при нормировке мер поврежденности. Геометрическое требование связано с применением теории осреднения.

Используется та же матричная запись уравнений теории упругости, что и в [11, 16]: под $D(\nabla) = (D^1(\nabla),\ldots, D^6(\nabla))$ подразумевается 3×6-матричный дифференциальный оператор, фигурирующий в определении 6-столбцов деформаций $\varepsilon(u)$ и напряжений $\sigma(u)$ по 3-столбцу смещений $u = (u_1, u_2, u_3)^t$:

$$\varepsilon(u; x) = D(\nabla)^t u(x), \qquad \sigma(u; x) = AD(\nabla)^t u(x) \tag{1.1}$$

$$D^i(\nabla) = e^i\partial_i, \quad D^4(\nabla) = 2^{-1/2}(0, \partial_3, \partial_2)^t, \quad D^5(\nabla) = 2^{-1/2}(\partial_3, 0, \partial_1)^t$$
$$D^6(\nabla) = 2^{-1/2}(\partial_2, \partial_1, 0)^t, \quad \nabla = \mathrm{grad} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^t, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i \tag{1.2}$$

Здесь t – знак транспонирования, e^i – орт оси x_i ($i = 1, 2, 3$), а A – симметрическая положительно определенная матрица размером 6×6, составленная из упругих модулей материала. Уравнения равновесия в однородном теле Ω и краевые условия на нагруженной поверхности $\Gamma = \partial\Omega$ с внешней нормалью n принимают вид

$$-D(\nabla)AD(\nabla)^t u^0(x) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1.3}$$

$$D(n(x))AD(\nabla)^t u^0(x) = p(x), \qquad x \in \Gamma \tag{1.4}$$

Семейство пор-дефектов в поврежденном теле представляет собой объединение всевозможных сдвигов $\overline{\omega}_\rho(q_1, q_2, q_3)$ множества $\overline{\omega}_\rho = \{x \in \mathbf{R}^3 : \rho^{-1}x \in \overline{\omega}\}$ на расстояния $q_i l_i$ вдоль осей x_i (q_i – целые числа). Масштабированием сведем характерный размер тела Ω к единичному и предположим, что величины $\mathrm{diam}\,\omega$ и $l_i l_0^{-1}$ также имеют единичные порядки, а $l_0 = (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{1/2}$ и $h = \rho l_0^{-1}$ суть малые параметры. Итак, поврежденное тело Ω^d определяется равенством

$$\Omega^d = \Omega \setminus \cup\overline{\omega}_\rho(q_1, q_2, q_3) \tag{1.5}$$

При этом справа в (1.5) фигурируют только те сдвиги $\overline{\omega}_\rho(q_1, q_2, q_3)$, которые попадают вовнутрь Ω (поверхностных повреждений нет). Иными словами, рассматривается периодическое семейство внутренних полостей-дефектов, размеры которых много меньше расстояний между ними. Математически задача сводится к решению системы уравнений с краевыми условиями

$$-D(\nabla)AD(\nabla)^t u^d(x) = 0, \qquad x \in \Omega^d \tag{1.6}$$

$$D(n(x))AD(\nabla)^t u^d(x) = p(x), \qquad x \in \Gamma \tag{1.7}$$

$$D(n(x))AD(\nabla)^t u^d(x) = 0, \qquad x \in \Gamma^d = \partial\Omega^d \setminus \Gamma \tag{1.8}$$

Внутренняя поверхность Γ^d свободна от напряжений. Теория осреднения сопоставляет задаче (1.6) – (1.8) аппроксимирующую ее задачу для однородного тела с матрицей A^* эффективных упругих модулей

$$-D(\nabla)A^*D(\nabla)^t u^*(x) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1.9}$$

$$D(n(x))A^*D(\nabla)^t u^*(x) = p(x), \qquad x \in \Gamma \tag{1.10}$$

В [11] известные формулы определения A^* по ω и A приспособлены к матричной записи уравнений равновесия.

2. Матрица (тензор) поврежденности и основные меры. Согласно п. 7 [11] возникновение и развитие дефектов-полостей приводит к ослаблению жесткостных свойств материала, т.е. матрица ΔA приращений упругих модулей оказывается неположительно определенной

$$\Delta A = A^* - A \leqslant \mathbf{0} \tag{2.1}$$

Известно (см. [17, 18] и п. 6 [11]), что при условии локализации разрушений внутри ячеек периодичности (т.е. они сохраняют связность – нет макротрещин), матрица A^* остается положительно определенной

$$A^* = A + \Delta A > \mathbf{0} \tag{2.2}$$

В качестве матрицы поврежденности Π возьмем симметрическую неотрицательно определенную 6×6-матрицу, имеющую размерность матрицы податливости A^{-1}:

$$\Pi = -A^{-1}(\Delta A)A^{-1} \tag{2.3}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\Pi a = \mu A^{-1} a, \quad a \in \mathbf{R}^6 \tag{2.4}$$

Имеется шесть собственных значений

$$\mu_i \equiv \mu_i(\Pi, A) \quad (i = 1, \ldots, 6) \tag{2.5}$$

Величины (2.5) и назначаются мерами поврежденности. Простая алгебраическая обработка уравнения (2.4) при учете (2.1) и (2.3), показывает, что μ_i – вещественные неотрицательные числа, а собственные векторы $a^1, \ldots, a^6$, отвечающие $\mu_1, \ldots, \mu_6$, можно подчинить условиям биортогональности

$$\langle A^{-1}a^i, a^k \rangle = \delta_{i,k} \quad (i = 1, \ldots, 6) \tag{2.6}$$

При этом $\langle \, , \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{R}^6$, $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера.

Пусть $a \in \mathbf{R}^6$, $a \neq 0$ и

$$a = c_1 a^1 + \ldots + c_6 a^6 \tag{2.7}$$

В силу (2.3) $A^* = A(A^{-1} - \Pi)A$. При учете (2.4), (2.6) и (2.2) находим, что

$$0 < \langle (A^{-1} - \Pi)a, a \rangle = \sum_{i=1}^{6} c_i^2 \left\{ \langle A^{-1}a^i, a^i \rangle - \langle \Pi a^i, a^i \rangle \right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{6} c_i^2 (1 - \mu_i) \langle A^{-1}a^i, a^i \rangle = \sum_{i=1}^{6} c_i^2 (1 - \mu_i) \tag{2.8}$$

Отсюда вытекает, что $\mu_i < 1$. Таким образом

$$\mu_i(\Pi, A) \in [0, 1) \quad (i = 1, \ldots, 6) \tag{2.9}$$

В п. 5 [11] установлено, что $A^* > \mathbf{0}$ до тех пор, пока разрушение локализовано в ячейках. Простейшим примером, когда матрица A^* теряет положительную определенность, может служить слияние микродефектов в семейство параллельных магистральных трещин. Описанную ситуацию следует связывать с полным разрушением образца. Однако последнее не обязательно: требование $A^* > \mathbf{0}$ нарушается при объединении групп микродефектов, образовании семейства мелких трещин и появлении новой структуры повреждений с масштабным параметром $H \gg h$ (даже при сохранении периодичности нужна перестройка процедуры осреднения). Не различая механизмы разрушения, возьмем единицу в качестве критических значений всех шести мер поврежденности (основание: при $\mu_{i^\circ} = 1$ матрицы $A^{-1} - \Pi$ и A^* не могут быть положительно определенными в силу (2.8)).

Подобно п. 7 [16] по введенной 6×6-матрице $\Pi = (\Pi_{mn})$ восстанавливается тензор поврежденности $\Pi_{(T)} = (\Pi_{kl}^{ij})$. Меры поврежденности следует определять как собственные числа тензорного пучка

$$\mu \mapsto \Pi_{(T)} - \mu A_{(T)}^{-1}: \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E} \tag{2.10}$$

При этом в (2.10) $A_{(T)}$ – тензор, отвечающий матрице A, а $\mathbf{E}$ – линеал симметрических двухвалентных тензоров, $\dim \mathbf{E} = 6$.

3. Первичные свойства характеристик поврежденности. Будем заниматься начальным этапом накопления повреждений

$$\mu_i \ll 1 \quad (i = 1,\ldots,6) \tag{3.1}$$

Пусть нагрузка p создает в однородном теле Ω постоянные поля напряжений σ° и деформаций $\varepsilon^\circ = A^{-1}\sigma^\circ$. Осредненные поля в теле с дефектами обозначаем σ^* и ε^*:

$$\varepsilon^* = (A^*)^{-1}\sigma^*, \qquad \sigma^* = \sigma^\circ \tag{3.2}$$

Условие (3.1) означает, в частности, что норма матрицы $\Delta A A^{-1}$ мала. Пренебрегая младшими членами (они обозначаются многоточием), выводим из (2.2), (2.3) и (3.1), что

$$\begin{aligned}\varepsilon^* &= (A^*)^{-1}\sigma^* = (A + \Delta A)^{-1}\sigma^\circ = A^{-1}(1 + \Delta A A^{-1})^{-1}\sigma^\circ = \\ &= A^{-1}(1 - \Delta A A^{-1} + \ldots)\sigma^\circ = \varepsilon^\circ + \Pi\sigma^\circ + \ldots\end{aligned} \tag{3.3}$$

Матрица поврежденности описывает главную линейную часть приращения столбца деформаций, вызванного появлением дефектов в напряженном теле.

Вычислим аналогичное приращение $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}^* - \mathbf{U}$ потенциальной энергии деформации. По формуле Бетти имеем

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(u)^t \varepsilon(u)\,dx = -\tfrac{1}{2}\operatorname{mes}_3 \Omega\langle\sigma^\circ, \varepsilon^\circ\rangle = -\tfrac{1}{2}\operatorname{mes}_3 \Omega\langle A^{-1}\sigma^\circ, \sigma^\circ\rangle \tag{3.4}$$

Таким образом, в соответствии с (3.3) находим

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}^* - \mathbf{U} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{mes}_3 \Omega\big(\langle\sigma^\circ, \varepsilon^* - \varepsilon^\circ\rangle + \ldots\big) = -\tfrac{1}{2}\operatorname{mes}_3 \Omega\langle\Pi\sigma^\circ, \sigma^\circ\rangle + \ldots \tag{3.5}$$

Пренебрежем младшими членами и используем минимаксимальное свойство собственных значений (см., например, [21]):

$$\begin{aligned}\mu_{\min} &\equiv \min\{\mu_1,\ldots,\mu_6\} = \min\left\{\langle\Pi a, a\rangle\langle A^{-1}a, a\rangle^{-1} \mid a \in \mathbf{R}^6\right\} \\ \mu_{\max} &\equiv \max\{\mu_1,\ldots,\mu_6\} = \max\left\{\langle\Pi a, a\rangle\langle A^{-1}a, a\rangle^{-1} \mid a \in \mathbf{R}^6\right\}\end{aligned} \tag{3.6}$$

В результате согласно (3.4), (3.5) получаем

$$\mathbf{U}\mu_{\min} \leqslant \Delta\mathbf{U} \leqslant \mathbf{U}\mu_{\max} \tag{3.7}$$

Относительное приращение потенциальной энергии за счет появления в теле семейства дефектов заключено между минимальным и максимальным значениями мер поврежденности.

Соотношения (3.3), (3.5) и (3.7) выполняются лишь при условии (3.1) – в противном случае найденные зависимости становятся существенно нелинейными. Еще одно неравенство $\varphi \leqslant \mu_{\min}$ справедливо без ограничения (3.1) и вытекает из формул (3.6), а также (7.4) в [11] и (3.5) в [16]. *Разрыхленность материала* $\varphi = [\operatorname{mes}_3 S]^{-1}\operatorname{mes}_3\omega$ (*относительный объем пор*) *не превосходит минимальной меры поврежденности.*

4. Индифферентные и адаптированные меры; функции поврежденности (сплошности). Если нагрузка остается постоянной или меняется разве лишь подобно, то естественно выделить одну меру поврежденности, которая соответствует возникающему напряженному состоянию. В таких условиях логично ограничиться скалярной функцией поврежденности [2] (сплошности [1]). Если же, например, в образце возможны только трехосные состояния и положение осей фиксировано, то разумно следить за тремя мерами. Далее вводятся понятия адаптированных и индифферентных мер.

Пусть $\mathbf{H}$ – линейное подпространство в $\mathbf{R}^6$ с размерностью $m < 6$. Включение $\sigma^\circ \in \mathbf{H}$ показывает, какие поля напряжений возникают в теле; при этом внешняя нагрузка p берется из множества

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \{p : p(x) = D(n(x))^t \sigma^\circ, \sigma^\circ \in \mathbf{H}\} \tag{4.1}$$

Например, если допускаются трехосные состояния, привязанные к декартовой системе x, то в обозначениях (1.1) (см. также п. 1 [16]) имеем

$$\mathbf{H} = \left\{\sigma \in \mathbf{R}^6 : \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0\right\}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{H}) = \left\{p : p(x) = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i n_i(x)\right\} \tag{4.2}$$

Пусть $\mathbf{T}$ – ортогональный проектор в $\mathbf{H}$ относительно скалярного произведения из (2.6), т.е. $\mathbf{T}a = a$ и $\langle A^{-1}a, b - \mathbf{T}b\rangle = 0$ для любых $a \in \mathbf{H}$ и $b \in \mathbf{R}^6$. Рассмотрим аналогичное (2.4) спектральное уравнение

$$\Pi_\mathbf{H} a = \mu A_\mathbf{H}^{-1} a, \quad a \in \mathbf{H}, \quad \Pi_\mathbf{H} = \mathbf{T}\Pi\mathbf{T}, \quad A_\mathbf{H} = \mathbf{T}A\mathbf{T} \tag{4.3}$$

Теперь имеется m собственных значений

$$\mu_{i\mathbf{H}} \equiv \mu_i(\Pi, A, \mathbf{H}) \in [0, 1) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{4.4}$$

Величины (4.4) назовем мерами поврежденности, адаптированными к напряженным состояниям из $\mathbf{H}$. Благодаря принципу Рэлея

$$\mu_{\min} \leqslant \min\left\{\langle \Pi a, a\rangle\langle A^{-1}a, a\rangle^{-1} \mid a \in \mathbf{H}\right\} \leqslant \mu_{i\mathbf{H}} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\langle \Pi a, a\rangle\langle A^{-1}a, a\rangle^{-1} \mid a \in \mathbf{H}\right\} \leqslant \mu_{\max} \tag{4.5}$$

Адаптированные меры не выходят из промежутка $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, *в котором размещены основные.*

Если a^i – столбец, отвечающий основной мере из (2.9), и $\mathbf{T}a^i = 0$ ($a^i \perp \mathbf{H}$), то μ_i – мера, индифферентная к напряженным состояниям из $\mathbf{H}$, т.е. нагружения, при которых разрушение связывается с критическими значениями μ_i, не реализуются в $\mathbf{H}$. Пусть $\mathbf{H}$ составлено из линейных комбинаций собственных векторов $a^{i_1}, \ldots a^{i_m}$ уравнения (2.4). Тогда $\mathbf{H}$-адаптированные меры (4.4) оказываются основными, а основные меры μ_j с $j \neq i_1, \ldots, i_m$ – индифферентными. В случае одномерного подпространства $\mathbf{H}$ существует лишь одна $\mathbf{H}$-адаптированная мера $\mu_\mathbf{H}$, причем

$$\mu_\mathbf{H} = \langle \Pi a, a\rangle\langle A^{-1}a, a\rangle^{-1}, \quad a \in \mathbf{H}, \quad a \neq 0 \tag{4.6}$$

Величины $1 - \mu_\mathbf{H}$ и $\mu_\mathbf{H}$, следуя [1] и [2], назовем функциями сплошности и поврежденности. В силу (4.5), (4.6) и (3.5):

$$\mu_\mathbf{H} \geqslant \varphi, \quad \mu_\mathbf{H} = \frac{\Delta\mathbf{U}}{\mathbf{U}} + \ldots, \quad 1 - \mu_\mathbf{H} = 1 - \frac{\Delta\mathbf{U}}{\mathbf{U}} + \ldots = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}} + \ldots = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{U}^*} + \ldots$$

Критические значения адаптированных мер могут быть меньше единицы. Так, например, для функции поврежденности согласно (4.6) и (2.7) получаем

$$\mu_{\mathbf{H}} = \langle \Pi a, a \rangle = \sum_{k=1}^{6} c_k^2 \mu_k, \quad a \in \mathbf{H}, \quad \langle A^{-1}a, a \rangle = 1$$

т.е. неравенство $\mu_{\mathbf{H}} < 1$ может сохраниться даже тогда, когда несколько основных мер достигли критического значения 1 (см. (4.5) для общего случая). Вопрос о выборе критических значений для адаптированных мер решается алгебраически, но разумно, поступая аналогично [3], принять их равными 1, поскольку завершающая стадия образования макротрещин носит динамический и неустойчивый характер, а потому оказывается кратковременной.

5. О применении инвариантного интеграла M. Следующие две формулы по существу установлены в [16, 11]:

$$\Pi = -A^{-1}\Delta A^{-1} = -A^{-1}P^*A^{-1} + \ldots \tag{5.1}$$

$$M(u^d; \Gamma) = \tfrac{3}{2}\mathrm{mes}_3\, \Omega \langle \varepsilon^\circ, P^*\varepsilon^\circ \rangle + \ldots = \tag{5.2}$$

$$= \tfrac{3}{2}\mathrm{mes}_3\, \Omega \langle \varepsilon^\circ, A^{-1}P^*A^{-1}\varepsilon^\circ \rangle = \ldots = -\tfrac{3}{2}\mathrm{mes}_3\, \Omega \langle \sigma^\circ, \Pi\sigma^\circ \rangle$$

Здесь P^* – матрица объемной поляризации дефектов (п. 7 [11]), а M – один из инвариантных интегралов (см. [9, 10], а также п. 2 [11]). Итак, *интеграл M*, вычисленный по решению задачи (1.6) – (1.8) при $p = D(n)\sigma^\circ$, *пропорционален в главной мере поврежденности, адаптированной к напряженному состоянию* σ°. В силу (4.6) коэффициент пропорциональности равен $-\tfrac{3}{2}\mathrm{mes}_3\, \Omega\langle \sigma^\circ, A^{-1}\sigma^\circ \rangle$ и вычисляется по данным задачи. Подчеркнем, что на решениях задач (1.3), (1.4) и (1.9), (1.10) интеграл M аннулируется (см. [11]).

Если интеграл M вычислен при любом способе нагружения, то 6×6-матрица $\Pi = (\Pi_{ij})$ восстанавливается полностью, например, из соотношений

$$-\tfrac{2}{3}(\mathrm{mes}_3\, \Omega)^{-1} M(\mathbf{u}^i; \Gamma) = \langle \mathbf{e}^i, \Pi\mathbf{e}^i \rangle + \ldots = \Pi_{ii} + \ldots$$

$$-\tfrac{2}{3}(\mathrm{mes}_3\, \Omega)^{-1} M(\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^j; \Gamma) = \langle \mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j, \Pi(\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j) \rangle + \ldots =$$

$$= \Pi_{ii} + 2\Pi_{ij} + \Pi_{jj} + \ldots \quad (i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6)$$

При этом $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^6$ – орты в $\mathbf{R}^6$, а $\mathbf{u}^i$ – решение задачи (1.6) – (1.8), отвечающее одноосному нагружению $p = D(n)\mathbf{e}^i$.

Согласно [11, 16] все результаты сохраняются, если под дефектами подразумевать упругие включения.

6. Стержень с периодическим семейством трещин. Рассмотрим однородный изотропный стержень $\Omega = G \times (-L, L)$, допуская в нем трехосные состояния, привязанные к его оси и сечению G. Поврежденный стержень Ω^d описывается формулой (1.5) с дефектами-трещинами $\overline{\omega}_\rho$:

$$\overline{\omega} = \{x : x_3 = 0, x' = (x_1, x_2) \in \overline{\Sigma}\} \tag{6.1}$$

Области $\Sigma, G \subset \mathbf{R}^2$ ограничены простыми гладкими контурами.

В соответствии с условиями нагружения σ° и p берутся из множеств (4.2) (три нижние компоненты столбца σ, сдвиговые напряжения, нулевые). Матрицы A и P, Π оказываются блочнодиагональными и их можно усечь до размеров 3×3 (верхние левые блоки). Сохраним за ними прежние символы и введем усеченные столбцы $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})^t$ и т.п. Обозначив E_0 и ν_0 модуль Юнга и коэффициент Пуассона, получаем

$$A = k_0 \begin{Vmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^{-1} = E_0^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & -\nu_0 & -\nu_0 \\ -\nu_0 & 1 & -\nu_0 \\ -\nu_0 & -\nu_0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{6.2}$$

$$P = -k_0 m_\Sigma \begin{Vmatrix} \beta^2 & \beta^2 & \beta \\ \beta^2 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{Vmatrix}, \quad k_0 = \frac{E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}, \quad \beta = \frac{\nu_0}{1-\nu_0}$$

Здесь m_Σ – скалярная безразмерная величина, зависящая от формы Σ трещины (6.1). Для эллиптической трещины матрица поляризации P найдена в [22], а для произвольной трещины формула (6.2) для P и неравенство $m_\Sigma > 0$ проверяются на основе общих определений [15, 22] и представления Папковича – Найбера. Результаты вычислений показывают, что

$$\Pi = k_0^{-1} m_\Sigma^* \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{6.3}$$

$$m_\Sigma^* = \tau^{-1} m_\Sigma, \quad P^* = \tau^{-1} P, \quad \tau = h^{-3} l_1 l_2 l_3$$

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = m_\Sigma^* \tag{6.4}$$

$$a^1 = E_0^{1/2}\mathbf{e}^1, \quad a^2 = E_0^{1/2}\mathbf{e}^2, \quad a^3 = k_0^{1/2}(\beta\mathbf{e}^1 + \beta\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2) \tag{6.5}$$

Другие три меры поврежденности μ_4, μ_5, μ_6 индифферентны к рассматриваемым трехосным напряженным состояниям. Первая пара равенств (6.4) отражает тот факт, что трещина не реагирует на продольные растяжения. В силу (6.2) и (6.5) $a^3 = k_0^{-1/2} A\mathbf{e}^3$, т.е. мера μ_3 адаптирована к одноосной деформации стержня. Наконец, в силу (4.6) мера поврежденности, адаптированная к растяжению вдоль оси цилиндра, имеет вид

$$\mu(\Pi, A, \mathbf{e}^3) = \frac{\langle \Pi\mathbf{e}^3, \mathbf{e}^3\rangle}{\langle A^{-1}\mathbf{e}^3, \mathbf{e}^3\rangle} = \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0}(1-2\nu_0)m_\Sigma^* \equiv \alpha\mu_3 \tag{6.6}$$

Мера (6.6) не является основной и в качестве ее критического значения, вообще говоря, следует взять величину $\alpha < 1$.

Формулы (6.3) – (6.6) относятся к случаю (3.1) малой поврежденности материала. При размерах трещин, сравнимых с l_0, матрица Π теряет блочную структуру (наблюдаемую асимптотически!) и сделанные заключения о мерах $\mu_1, \ldots, \mu_6$ и (6.6) перестают быть верными.

В [1, 2] накопление повреждений в растягиваемом силой P стержне описывается функцией сплошности $\psi \leqslant 1$, связанной с площадью эффективного сечения $s_* = \psi s_0$, где $s_0 = \mathrm{mes}_2\, G$ – номинальная площадь. В силу (3.3):

$$\varepsilon_3^\circ = \langle \mathbf{e}^3, \varepsilon^\circ\rangle = \langle \mathbf{e}^3, A^{-1}\mathbf{e}^3\rangle P s_0^{-1}$$

$$\varepsilon_3^* = \langle \mathbf{e}^3, \varepsilon^*\rangle = \varepsilon_3^\circ + \langle \mathbf{e}^3, \Pi\mathbf{e}^3\rangle P s_0^{-1} + \ldots$$

Поэтому ту же деформацию, что и поврежденный стержень Ω^d, испытывает однородный стержень с площадью сечения $s_* = s(1 - \langle \mathbf{e}^3, \Pi\mathbf{e}^3\rangle\langle \mathbf{e}^3, A^{-1}\mathbf{e}^3\rangle^{-1} + \ldots)$. Отсюда и из (6.6) выводим формулу $\psi = 1 - \mu(\Pi, A, \mathbf{e}^3)$, демонстрирующую, что в рассматриваемой частной задаче предлагаемые определения переходят в классические, т.е. $\mu(\Pi, A, \mathbf{e}^3) = 1 - \psi$ – функция поврежденности [2].

7. Локализация разрушения. Изучим процесс неоднородного накопления повреждений в изотропном весомом слое $\Lambda = \{x: z = x_3 \in (-H, 0)\}$, верхнее основание которого защемлено, а на нижнее действует нагрузка p ("обвал штукатурки с потолка"). Считаем, что дефекты – круглые трещины, а осредненное напряженное состояние одноосное. Его неоднородность вызвана двумя причинами: наличием массовых сил и нарушением периодичности семейства дефектов – их размеры меняются вдоль оси z, т.е. A^* и P^* зависят от z (это обстоятельство не сказывается на процедуре осреднения; см. [17–19]). Благодаря одноосности задача теории упругости в квазистатической постановке сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-\partial_z \sigma_3^*(t, z) = -\gamma g, \quad z \in (-H, 0); \quad u_3^*(t, 0) = 0, \quad \sigma_3^*(t, -H) = p \tag{7.1}$$

$$\sigma_3^*(t, z) = \gamma g(H + z) + p \equiv \mathrm{s}(z) \tag{7.2}$$

Здесь γ – плотность материала, g – ускорение свободного падения, а $t \in [0, t_*]$ – времениподобный параметр. Кроме того, в силу (3.2) и (6.2):

$$\sigma_3^*(t, z) = A_{33}^*(t, z)\varepsilon_3^*(t, z) = (k_0 + P_{33}^*(t, z))\partial_z w(t, z) \tag{7.3}$$

Пусть трещины $\Sigma(z)$ лежат в плоскости слоя, z – координата центра, а радиусы в момент t равны $\rho(t, z)$. Пусть еще $K(t, z)$ – коэффициент интенсивности напряжений (КИН) на ребре трещины $\Sigma(z)$, отвечающий первой моде (поскольку отношение $h(z)$ радиусов трещин с расстояния между ними считается малым параметром, $K(t, z)$ "почти постоянен" вдоль ребра, а другие два КИН пренебрежимо малы). Как установлено в [22; с. 129]:

$$P_{33}(t, z) = -k_0 \rho(t, z)^3 m_0, \quad K(t, z) = K_0 \rho(t, z)^{1/2} \varepsilon_3^*(t, z) \tag{7.4}$$

$$m_0 = \frac{16}{3}\frac{(1-\nu_0)^2}{1-2\nu_0}, \quad K_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-\nu_0}{1+\nu_0}\frac{2E_0}{1-2\nu_0}$$

Предположим, что скорость роста трещин зависит от КИН

$$\partial_t \rho(t, z) = R(K(t, z)) \tag{7.5}$$

При этом R – гладкая функция на $(0, +\infty)$; $R(+0) = R'(+0) = 0$. Так как величины ρ и K малы, функция R заменяется главным членом ее разложения

$$R(K) = R_0 K^N, \quad N > 2 \tag{7.6}$$

При $N = 4$ это – разновидность закона Париса (см. [23] и гл. 8 [1]); подчеркнем, что в случае циклического нагружения следует взять $\gamma = 0$, p придать смысл амплитуды, а параметр t по-прежнему считать непрерывным.

Пусть в начальный момент $t = 0$ размеры дефектов одинаковы

$$\rho(0, z) = \rho_0 \tag{7.7}$$

Формулы (7.5), (7.7) замыкают соотношения (7.1) – (7.4). Подставим в (7.4) – (7.7) деформацию ε_3^*, найденную из (7.2), (7.3). Решая задачу Коши (7.5), (7.7) и сохраняя только старшую асимптотическую поправку (произведение $m_0\rho^3$; см. (6.3), (7.4)), при дополнительном условии $N < 8$ получаем уравнение

$$Y(\rho_0) - Y(\rho) = (N-2)(2T_0)^{-1}\mathrm{s}(z)^N t \tag{7.8}$$

$$T_0 = R_0^{-1}(k_0 / K_0)^N, \quad Y(\rho) = \rho^{1-N/2}[1 + N(N-2)(8-N)^{-1} m_0 \rho^3] \tag{7.9}$$

Если из (7.9) удалить малое слагаемое $m_0\rho^3$, то решением уравнения (7.8) служит функция ρ с разрывом в точке

$$t_0(z) = 2(N-2)^{-1} T_0 \rho_0^{1-N/2} (\gamma g(z+H)+p)^{-N}$$

Скорость роста трещин неограниченно увеличивается при $t \to t_0(z) - 0$ (лавинообразный процесс). Велико искушение объявить $\min\{t(z)\}$ моментом разрушения, однако делать это нельзя, поскольку при увеличении размеров трещин точность асимптотических формул падает и необходимо принимать во внимание взаимодействие дефектов (см. [24]). Завершающую стадию развития трещин учтем путем занижения критического значения μ_* меры поврежденности μ_3 (см. (6.4)). В силу (6.2) и (7.4) $\mu_3 = \rho^3 m_*$ и критический радиус трещин $\rho_* = \mu_*^{1/3} m_*^{-1/3}$ естественно соизмерять с каким-либо структурным параметром. Разумеется, равенство $\rho(t, z) = \rho_*$ не обязано ассоциироваться с полным разрушением – возможна смена масштаба периодической структуры, о которой шла речь в разд. 2. Итак, согласно (7.8), момент разрушения вычисляется по формуле

$$t_* = \min\{\tau(\rho_0, z) \mid z \in [-H, 0]\} = \tau(0) \tag{7.10}$$

$$\tau(\rho_0, z) = 2(N-2)^{-1} T_0 (\gamma g H + p)^{-N} (Y(\rho_0) - Y(\rho_*))$$

Так как $m_*(\rho_0^3 - \rho_*^3) < 0$, асимптотические поправки $O(m_0\rho^3)$ в (7.3) и (7.9) понижают прогнозируемое время разрушения. В случае $\gamma \neq 0$ минимум (7.10) достигается в точке $z = 0$, т.е. образуется магистральная трещина ("штукатурка обрушивается полностью"). Если же материал невесомый и $\gamma = 0$, то напряженное состояние однородное и, в принципе, может произойти хрупкое квазиобъемное разрушение, описанное в [25] ("штукатурка осыпается"). Вместе с тем, любая неоднородность материала приводит к локализации разрушения. Так, выбирая величину ρ_0 в (7.7) переменной (изначально неоднородная поврежденность), добиваемся, чтобы $\min \tau(\rho_0(z), z)$ реализовывался в одной или нескольких точках $z_1, \dots z_N$. Тогда трещины появляются в плоскостях $\{x\colon z = z_n\}$ ("штукатурка отслаивается").

8. Кинематическое уравнение поврежденности. Из (6.4) и (7.3) – (7.5) выводим уравнение для функции сплошности $\psi = 1 - \mu_3$:

$$\partial_t \psi(t) = -F_*(1-\psi(t), \sigma_3/\psi(t)) \tag{8.1}$$

$$F_*(1-\psi, \sigma/\psi) = 3m_*^{1/3}[1-\psi]^{2/3} R(K_0 k_0^{-1} m_*^{-1/6} [1-\psi]^{1/6} \sigma_3/\psi) \tag{8.2}$$

Формула (8.1) отличается от полученного в [1] кинетического уравнения с правой частью $-F(\sigma_3/\psi(t))$. Причина расхождения кроется в том, что в [1] убыль сплошности связывалась преимущественно с возникновением и концентрацией дефектов, а при выводе (8.1) отслеживалось только их подрастание. В принципе, аргументы $1 - \psi$ и σ/ψ в (8.1) позволяют учесть оба фактора при условии $F_*(0, s) > 0$, обеспечивающем механизм зарождения дефектов. На основе закона (7.5) соблюсти указанное неравенство не удается, поскольку из-за множителя $[1 - \psi]^{2/3}$ в (8.2) возникает несуразное требование $R(K) = O(K^{-4})$ при $K \to 0$.

В (8.1) заложена зависимость эффективных упругих модулей от поврежденности. Как и в [24], эта зависимость усугубляет обсуждавшийся эффект локализации разрушения благодаря обратной связи: зона с максимальной концентрацией дефектов претерпевает наибольшую деформацию, которая, в свою очередь, увеличивает скорость их развития.

Автор выражает признательность И.И. Аргатову и М.А. Нарбуту за полезные обсуждения предмета статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Тамуж В.П., Лагздыньш А.Ж.* Вариант построения феноменологической теории разрушения // Механика полимеров. 1968. № 4. С. 638–647.
5. *Вакуленко А.А., Качанов М.Л.* Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 159–166.
6. *Кондауров В.И., Никитин Л.В.* Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 207 с.
7. *Leckie F.A., Hayhurst D.R.* Creep rupture of structures // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. 340. No. 1622. P. 323–347.
8. *Janson J., Hult J.* Fracture mechanics and damage mechanics – a combined approach // J. mec. appl. 1977. V. 1. No. 1. P. 69–76.
9. *Knowles J.K., Sternberg E.* On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. V. 44. No. 3. P. 187–211.
10. *Budiansky B., Rice J.R.* Conservation laws and energy-release rates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. No. 1. P. 201–203.
11. *Назаров С.А.* Тензор и меры поврежденности. 2. Инвариантные материалы в телах с рассеянными дефектами // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 121–131.
12. *Черепанов Г.П.* Распространение трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
13. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1968. V. 35. No. 2. P. 379–386.
14. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
15. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* О применении тензоров упругой емкости, поляризации и присоединенной деформации // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. Вып. 16. С. 75–91.
16. *Назаров С.А.* Тензор и меры поврежденности. 1. Асимптотический анализ анизотропной среды с дефектами // МТТ. 2000. № 3. С. 113–124.
17. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984, 352 с.
18. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.
19. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
20. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
21. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1958. 328 с.
22. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.
23. *Paris P.C., Erdogan F.* A critical analysis of crack propagation laws // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng. 1963. V. 85. No. 4. P. 528–534.
24. *Назаров С.А.* Нелинейные эффекты деформирования композитов с регулярной системой мелких трещин // Механика композит. материалов. 1988. № 6. С. 1052–1059.
25. *Бартенев Г.М.* Сверхпрочные и высокопрочные неорганические стекла. М.: Стройиздат, 1974. 240 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
16.11.1998