

УДК 539.3

© 2001 г. И.Т. ДЕНИСЮК

НАПРЯЖЕНИЯ ВБЛИЗИ КОНИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА СРЕД

Исследование упругого равновесия среды с коническими включениями предполагает знание локального напряженного состояния вблизи особых точек, что дает возможность конструировать определяющие функции аналогично двумерным задачам тел с угловыми включениями [1]. В данной работе изучается локальное напряженное состояние, обусловленное коническими особенностями поверхности раздела сред. Особенность напряжений для некоторых случаев круговых конических тел приведена в [2].

1. Постановка задачи. Пусть неограниченная упругая среда содержит инородное включение, ограниченное конической поверхностью S с вершиной в начале декартовой системы координат $Oxyz$, прямолинейными образующими и направляющей L_0 , очерченной ортом $\vec{r}_0(s)$ образующей с началом в точке O , где s – длина дуги направляющей, отсчитываемая от некоторой начальной точки (фиг. 1).

Введем криволинейные координаты ρ, θ, s согласно равенству

$$\vec{r} = \rho(\sin \theta \vec{r}_0(s) + \cos \theta \vec{n}(s)) \quad (1.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, $\vec{n} = [\vec{r}_0, d\vec{r}_0/ds]$ – нормаль к образующей $\vec{r}_0(s)$ в конической точке, $\rho = |\vec{r}|$, θ – угол, образованный вектором \vec{r}_0 с нормалью \vec{n} , $[\]$ – символ векторного произведения. Такие координаты ортогональны с коэффициентами Ламе

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = \rho H_0, \quad H_0 = \sin \theta + d \cos \theta, \quad d = \left| [\vec{r}_0, d^2 \vec{r}_0 / ds^2] \right| \quad (1.2)$$

и при $\theta = \pi/2$ соотношения (1.1) описывают коническую поверхность S .

Композиция подвергнута внешним силовым статическим воздействиям. Уравнение равновесия [2]:

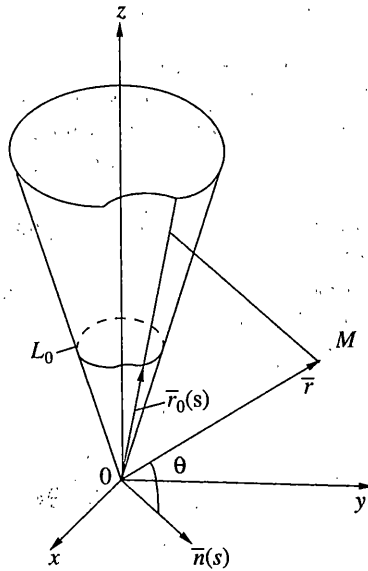
$$(\lambda_i + 2G_i) \text{grad div } \vec{u}_i - G_i \text{rot rot } \vec{u}_i = 0 \quad (1.3)$$

где \vec{u}_i – вектор перемещений, $\lambda_i = \nu_i E_i / ((1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i))$, G_i, E_i – модули сдвига и упругости, ν_i – коэффициент Пуассона (значение индекса $i = 0$ отвечает матрице, а $i = 1$ – включению), должно выполняться во всех точках матрицы ($i = 0$) и включения ($i = 1$), в том числе и в конической точке O .

На конической поверхности выполняются условия идеального механического контакта, заключающиеся в непрерывности вектора перемещений при переходе через поверхность раздела и статического равновесия элементов конической поверхности. Они имеют вид:

в точках гладкости

$$\begin{aligned} u_{\rho 0} - u_{\rho 1} = 0, \quad u_{\theta 0} - u_{\theta 1} = 0, \quad u_{s 0} - u_{s 1} = 0 \\ \sigma_{\theta 0} - \sigma_{\theta 1} = 0, \quad \tau_{\rho \theta 0} - \tau_{\rho \theta 1} = 0, \quad \tau_{\theta s 0} - \tau_{\theta s 1} = 0 \end{aligned}$$



Фиг. 1

в конической точке O :

$$\begin{aligned} \lim(u_{\rho 0} - u_{\rho 1}) = 0, \quad \lim(u_{\theta 0} - u_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(u_{s 0} - u_{s 1}) = 0 \\ \lim(\sigma_{\theta 0} - \sigma_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(\tau_{\rho \theta 0} - \tau_{\rho \theta 1}) = 0, \quad \lim(\tau_{\theta s 0} - \tau_{\theta s 1}) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $u_{\rho i}, u_{\theta i}, u_{s i}$ – компоненты вектора перемещений, $\sigma_{\theta i}, \tau_{\rho \theta i}, \tau_{\theta s i}$ – тензора напряжений, пределы берутся при $M_0 \rightarrow O, M_0 \in S$.

Определим локальное напряженное состояние, обусловленное конической особенностью поверхности раздела сред.

2. Представление локальных перемещений. Для уравнения равновесия упругой среды (1.3), представленного в декартовых координатах, выполняется преобразование подобия

$$\bar{u} = A\bar{u}(Bx, By, Bz) \quad (2.1)$$

где $A = A(B); A, B \in \mathbb{R}, \bar{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ – вектор перемещения, идентифицирующий индекс i для упрощения записи опущен.

Дифференцируя соотношение (2.1) по B , получим систему уравнений

$$u_j dA / dB + A(\text{grad } u_j, \bar{r}) = 0 \quad (2.2)$$

где j принимает значения x, y, z .

Решение уравнения (2.2) таково:

$$u_j = F_j(x, y, z) \quad (2.3)$$

здесь $F_j(x, y, z)$ – однородная функция m_j -го порядка переменных x, y, z .

Переходя в соотношениях (2.3) к координатам ρ, θ, s согласно (1.1), получим

$$u_\rho = \rho^{m_1} A(\theta, s), \quad u_\theta = \rho^{m_2} B(\theta, s), \quad u_s = \rho^{m_3} C(\theta, s) \quad (2.4)$$

$$m_k = m_k(\theta, s) \quad (k = \overline{1, 3})$$

и, таким образом, перемещения в окрестности конической точки представляются как степенные функции величины ρ .

Подставляя выражения для перемещений (2.4) в уравнения равновесия (1.3), записанные в координатах ρ , θ , s , и приравнивая выражения при степенях ρ нулю, получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных $A(\theta, s)$, $B(\theta, s)$, $C(\theta, s)$, $m_k(\theta, s)$, которая из-за громоздкости не выписана. Для ее совместности необходимо, чтобы $m_k(\theta, s) = \text{const}$.

Рассмотрим сначала случай, когда величина H_0 в выражении коэффициента Ламе h_3 (1.2) не зависит от переменной s , что отвечает, например, круговым коническим поверхностям. Исходная система дифференциальных уравнений совместима, если $m_1 = m_2 = m$ и распадается на две системы:

$$\begin{aligned} aA + \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H_0 \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial A}{\partial s} \right) + b \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 B) &= 0 \\ c \frac{\partial A}{\partial \theta} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 B) \right) + m(m+1)B + \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial B}{\partial s} \right) &= 0 \\ c \frac{1}{H_0} \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\mu_0}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 B) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial B}{\partial s} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial s} = 0, \quad \mu_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial C}{\partial s} \right) - \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 C) \right) &= 0 \\ \frac{\mu_0}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial C}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 C) \right) + m_3(m_3+1)C &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a = \mu_0(m+2)(m-1), \quad b = \mu_0(m-1) - (1+m), \quad c = \mu_0(2+m) - m \\ \mu_0 = 2(1-\nu)/(1-2\nu), \quad A = A(\theta, s), \quad B = B(\theta, s), \quad C = C(\theta, s) \end{aligned}$$

Функции $A(\theta, s)$, $B(\theta, s)$ выражают перемещения, поэтому они периодические по переменной s и представимы рядами Фурье, которые подставляются в уравнения (2.5). В результате убеждаемся, что уравнения удовлетворяются только при нулевых гармониках, то есть функции не зависят от s . Тогда система (2.5) переходит в систему

$$\begin{aligned} aA + (\partial(\sin \theta_1 \partial A / \partial \theta_1) / \partial \theta_1) / \sin \theta_1 + b(\partial(\sin \theta_1 B) / \partial \theta_1) / \sin \theta_1 &= 0 \\ c \partial A / \partial \theta_1 + \mu_0 \partial((\partial(\sin \theta_1 B) / \partial \theta_1) / \sin \theta_1) / \partial \theta_1 + m(m+1)B &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где учтено, что $H_0 = \sqrt{1+d^2} \sin \theta_1$, $\theta_1 = \theta + \alpha$, $\text{tg } \alpha = d$.

Умножая первое уравнение системы (2.7) на c , действуя оператором $-H_0^{-1}(\partial / \partial \theta_1)H_0$ на второе и складывая результаты, получим выражение функции $B(\theta_1)$ посредством $A(\theta_1)$. Подставляя такое представление в первое уравнение системы (2.7), придем к уравнению

$$L_{m-1}L_{m+1}[A(\theta_1)] = 0 \quad (2.8)$$

где $L_k = d^2 / d\theta_1^2 + \text{ctg } \theta_1 d / d\theta_1 + k(k+1)$ ($k = m \pm 1$) — оператор Лежандра [3].

Решаем его путем последовательных интегрирований. После первого шага получаем

$$L_{m+1}[A(\theta_1)] = C_1 P_{m-1}(\cos \theta_1) + C_2 Q_{m-1}(\cos \theta_1) \quad (2.9)$$

здесь $P_{m-1}(\cos \theta_1)$, $Q_{m-1}(\cos \theta_1)$ — функции Лежандра первого и второго родов.

Теперь решение (2.9) представляем суммой общего решения однородного и суммой частного решения неоднородного

$$A(\theta_1) = C_3 P_{m+1}(\cos \theta_1) + C_4 Q_{m+1}(\cos \theta_1) + A_2(\theta_1) \quad (2.10)$$

Для нахождения частного решения $A_2(\theta_1)$ выполним в (2.9) преобразования

$$d^2 A / d\theta_1^2 + \operatorname{ctg} \theta_1 dA / d\theta_1 + ((m+1)(m+2) + \delta)A - \delta A = C_1 P_{m-1}(\cos \theta_1) + C_2 Q_{m-1}(\cos \theta_1)$$

и полагая $(m+1)(m+2) + \delta = (m-1)m$, а также учитывая определяющее уравнение для функций Лежандра [3], находим

$$A_2(\theta_1) = -\delta^{-1}(C_1 P_{m-1}(\cos \theta_1) + C_2 Q_{m-1}(\cos \theta_1)) \quad (2.11)$$

Из представлений (2.10), (2.11) следует решение (2.8):

$$A(\theta_1) = N_1 P_{m-1}(\cos \theta_1) + N_2 Q_{m-1}(\cos \theta_1) + N_3 P_{m+1}(\cos \theta_1) + N_4 Q_{m+1}(\cos \theta_1) \quad (2.12)$$

а из второго уравнения системы (2.7), получаем

$$B(\theta_1) = d_1 d(N_1 P_{m-1}(\cos \theta_1) + N_2 Q_{m-1}(\cos \theta_1)) / d\theta_1 + d_2 d(N_3 P_{m+1}(\cos \theta_1) + N_4 Q_{m+1}(\cos \theta_1)) / d\theta_1 \quad (2.13)$$

$$d_1 = (\mu_0(a - m(m-1)) - cb) / (bm(m+1)),$$

$$d_2 = (\mu_0(a - (m+1)(m+2)) - cb) / (bm(m+1))$$

где N_p ($p = \overline{1,4}$) – постоянные.

Решение системы (2.6) представляется функциями Лежандра

$$C(\theta_1) = C_5 P_{m_3}^1(\cos \theta) + C_6 Q_{m_3}^1(\cos \theta) \quad (2.14)$$

Удаляя в формулах (2.12)–(2.14) неограниченные выражения, перемещения (2.4) представляем в виде

$$u_{\rho i} = \rho^m (N_{1i} P_{m-1}(\cos \theta_1) + N_{2i} P_{m+1}(\cos \theta_1))$$

$$u_{\theta i} = \rho^m d(d_{1i} N_{1i} P_{m-1}(\cos \theta_1) + d_{2i} N_{2i} P_{m+1}(\cos \theta_1))$$

$$u_{s i} = \rho^{m_3} N_{3i} P_{m_3}^1(\cos \theta_1) \quad (2.15)$$

где N_{ji} ($j = \overline{1,3}$; $i = \overline{0,1}$) – произвольные постоянные.

Пусть H_0 являются функцией переменных θ и s , тогда исходная система дифференциальных уравнений совместима при $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и принимает вид:

$$aA + \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H_0 \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial A}{\partial s} \right) + bK = 0$$

$$c \frac{\partial A}{\partial \theta} + m \frac{\partial K}{\partial \theta} + m(m+1)B + \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} Q \right) = 0$$

$$c \frac{1}{H_0} \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{m}{H_0} \frac{\partial K}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_0} Q \right) + m(m+1)C = 0 \quad (2.16)$$

$$K = \frac{1}{H_0} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 B) + \frac{\partial C}{\partial s} \right), \quad Q = \frac{\partial B}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 C)$$

Действуя оператором $\partial/\partial s$ на второе уравнение (2.16), а $-(\partial/\partial \theta)H_0$ на третье и

суммируя результаты, получаем

$$M_m[H_0^{-1}Q(\theta, s)] = 0 \quad (2.17)$$

где оператор имеет вид

$$M_m[\] = \frac{1}{H_0} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) + m(m+1) \quad (2.18)$$

Умножая первое уравнение системы (2.16) на s , применяя оператор $-H_0^{-1}(\partial/\partial\theta)H_0$ ко второму, а $-H_0^{-1}\partial/\partial s$ к третьему и слагая результаты, получаем уравнение, в которое подставляем выражение для $K(\theta, s)$, найденное из первого уравнения системы (2.16). В результате приходим к определяющему дифференциальному уравнению для функции $A(\theta, s)$:

$$M_{m-1}M_{m+1}[A(\theta, s)] = 0 \quad (2.19)$$

где операторы даются формулами (2.18).

Функции $B(\theta, s)$ и $C(\theta, s)$, как следует из второго и третьего уравнений (2.16), выражаются посредством $Q(\theta, s)$ и $A(\theta, s)$ так:

$$\begin{aligned} B(\theta, s) &= -\frac{1}{m(m+1)} \left(c \frac{\partial A}{\partial \theta} + \mu_0 \frac{\partial K}{\partial \theta} + \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_0} Q \right) \right) \\ C(\theta, s) &= -\frac{1}{m(m+1)} \left(\frac{c}{H_0} \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\mu_0}{H_0} \frac{\partial K}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_0} Q \right) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$K = -(M_{m-1}[A] + (a - (m-1)m)A) / b$$

Построим приближенное решение определяющего уравнения (2.17). Для конкретного вида направляющей L_0 функции H_0 и H_0^{-1} являются s_0 - периодическими (s_0 - длина направляющей). В классе таких функций строим $Q(\theta, s)$ [4]:

$$Q(\theta, s) = \sum_{n=0}^N (Q_{n1}(\theta) \cos nls + Q_{n2}(\theta) \sin nls) + O(N^{-1}), \quad l = 2\pi / s_0 \quad (2.21)$$

Подставляя отрезки рядов Фурье для H_0 , H_0^{-1} , $Q(\theta, s)$ типа (2.21) в уравнение (2.17), группируя и приравнивая выражения при гармониках $n = \overline{0, N}$ нулю, получим систему $2N + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных $Q_{n1}(\theta)$ и $Q_{n2}(\theta)$. Решение системы представляется в виде [5]:

$$Q_{nq}(\theta) = \sum_{j=1}^{2(2N+1)} C_{nqj} \Phi_{j,m}(\theta) \quad (q = \overline{1, 2}) \quad (2.22)$$

где $\Phi_{j,m}(\theta)$ - функции фундаментального множества решений полученной системы, C_{nqj} - произвольные постоянные.

Уравнение (2.19) решаем последовательным интегрированием аналогично выполненному для уравнения (2.8) и используя построенное выше решение уравнения (2.17). В результате получим

$$A(\theta, s) = \sum_{n=0}^N (A_{n1}(\theta) \cos nls + A_{n2}(\theta) \sin nls) + O(N^{-1}) \quad (2.23)$$

$$A_{nq}(\theta) = \sum_{j=1}^{4(2N+1)} C_{nqj} \Phi_j(\theta), \quad \Phi_j(\theta) = \begin{cases} \Phi_{j,m-1}(\theta), & j = \overline{1, 2(2N+1)} \\ \Phi_{j,m+1}(\theta), & j = \overline{2(2N+1)+1, 4(2N+1)} \end{cases}$$

Тогда перемещения (2.4) представляются на основе (2.20), (2.22), (2.23) в виде

$$\begin{aligned} u_{\rho i} &= \rho^m \sum_{n=0}^N (A_{n1}^{(i)}(\theta) \cos nls + A_{n2}^{(i)}(\theta) \sin nls) + O(N^{-1}) \\ u_{\theta i} &= \rho^m \sum_{n=0}^N (B_{n1}^{(i)}(\theta) \cos nls + B_{n2}^{(i)}(\theta) \sin nls) + O(N^{-1}) \\ u_{si} &= \rho^m \sum_{n=0}^N (C_{n1}^{(i)}(\theta) \cos nls + C_{n2}^{(i)}(\theta) \sin nls) + O(N^{-1}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$A_{nq}^{(i)}(\theta) = \sum_{j=1}^{2(2N+1)} N_{nj}^{(i)} \Phi_{j,k}^{(i)}(\theta), \quad B_{nq}^{(i)}(\theta) = \sum_{j=1}^{3(2N+1)} N_{nj}^{(i)} E_{jq}^{(i)}(\theta)$$

$$C_{nq}^{(i)}(\theta) = \sum_{j=1}^{3(2N+1)} N_{nj}^{(i)} F_{jq}^{(i)}(\theta)$$

где $\Phi_{j,k}^{(i)}(\theta)$ – функции фундаментальной системы решений, ограниченные при $\theta \in [-\pi, \pi]$; $E_{jq}^{(i)}(\theta)$, $F_{jq}^{(i)}(\theta)$ – известные функции, $N_{nj}^{(i)}$ – произвольные постоянные.

3. Условия контакта. Подставляя представления для перемещений (2.15) или (2.24) и полученные на их основе выражения напряжений [2] в условия (1.4) и полагая $\theta = \pi/2$, группируя и приравнивая выражения при степенях ρ и гармониках $n = \overline{0, 2N+1}$ нулю, получим однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Для представлений (2.15) это будет одна система четвертого порядка относительно неизвестных N_{ji} ($j = \overline{1, 2}; i = \overline{0, 1}$) и система второго порядка с неизвестными N_{30}, N_{31} , а для представлений (2.25) система $6(2N+1)$ уравнений с $6(2N+1)$ неизвестными $N_{nj}^{(i)}$.

Условиями их разрешимости является равенство их главных определителей нулю, что дает характеристические уравнения для показателей m в представлениях (2.15) или (2.24). При наличии корней таких уравнений, принадлежащих интервалу $(0, 1)$, получаем, что локальные напряжения будут иметь особенность порядка $1 - m$ в конической точке. Для таких значений m находим нетривиальные решения систем алгебраических уравнений и устанавливаем распределение локальных напряжений.

4. Примеры. 4.1. Круговое коническое включение. Как иллюстрация предложенного подхода установим локальное напряженное состояние вблизи вершины кругового конического включения с поверхностью

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c_1^2 = 0 \quad (4.1)$$

Уравнение направляющей L_0 , являющейся линией пересечения единичной сферы и поверхности (4.1), находим с помощью сферических координат и параметризуя, получаем

$$x = e^{-1} \cos es, \quad y = e^{-1} \sin es, \quad z = c_1 / (ae), \quad e = a^{-1}(a^2 + c_1^2)^{1/2}, \quad d = c_1 / a$$

Поскольку H_0 не зависит от s , то перемещения берем в виде (2.15) и подставляя в условия (1.4), получаем систему

$$a_{k1}N_{10} + a_{k2}N_{20} + a_{k3}N_{11} + a_{k4}N_{21} = 0, \quad (k = \overline{1, 4}) \quad (4.2)$$

$$a_{11} = -a_{13} = P_{m+1}, \quad a_{12} = -a_{14} = P_{m-1}, \quad a_{21} = d_{10}P'_{m+1}, \quad a_{22} = d_{20}P'_{m-1}$$

$$a_{23} = -d_{11}P'_{m+1}, \quad a_{24} = -d_{21}P'_{m-1}, \quad a_{31} = \gamma(a_{220}P_{m+1} - 2d_{10} \operatorname{ctg} \theta_0 P'_{m+1})$$

$$a_{32} = a_{210}P_{m-1} - 2d_{20} \operatorname{ctg} \theta_0 P'_{m-1}, \quad a_{33} = -\gamma(a_{221}P_{m+1} - d_{11} \operatorname{ctg} \theta_0 P'_{m+1})$$

$$\begin{aligned}
a_{34} &= -\gamma(a_{211}P_{m-1} - d_{21} \operatorname{ctg} \theta_0 P'_{m+1}), \quad a_{41} = ((m-1)d_{10} + 1)P'_{m+1}, \\
a_{42} &= ((m-1)d_{20} + 1)P'_{m-1}, \quad a_{43} = \gamma((1-m)d_{11} - 1)P'_{m+1}, \quad a_{44} = \gamma((1-m)d_{21} - 1)P'_{m-1} \\
a_{21i} &= \lambda_i(m+2 - d_{2i}(m-1)m + 2(1 - d_{2i}(m-1)m)), \quad a_{22i} = \lambda_i(m+2 - d_{1i}(m+1)(m+2)) + \\
&+ 2(1 - d_{1i}(m+1)(m+2)), \quad \lambda_i = 2\nu_i / ((1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)), \\
d_{2i} &= b_{2i} / ((m-1)m - b_{1i}) = (e_{2i} - (m-1)m) / (e_{1i}(m-1)m), \\
d_{1i} &= b_{2i} / (b_{1i} - (m+1)(m+2)) = (e_{2i} - (m+1)(m+2)) / (e_{1i}(m+1)(m+2)), \\
e_{1i} &= \mu_i(m-1) - (m+1), \quad e_{2i} = \mu_i(m-1)(m+2), \quad b_{1i} = m(m+1) / \mu_i, \quad b_{2i} = m+2 - m / \mu_i, \\
\mu_i &= 2(1 - \nu_i) / (1 - 2\nu_i), \quad \gamma = G_1 / G_0, \quad P_{m\pm 1} = P_{m\pm 1}(\theta_0), \quad P'_{m\pm 1} = P'_{m\pm 1}(\theta_0), \quad \theta_0 = \pi / 2 + \alpha
\end{aligned}$$

Приравниваем главный определитель системы (4.2) нулю, что дает характеристическое уравнение задачи

$$|a_{kp}| = 0 \quad (k, p = \overline{1, 4}) \quad (4.3)$$

Решение системы (4.2) имеет вид

$$N_{01} = h / N_{02}, \quad N_{11} = gN_{02}, \quad N_{12} = tN_{02} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
h &= ((a_{22} + a_{24})(a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}) - (a_{32} + a_{34})\Delta_0) / ((a_{31} + a_{33})\Delta_0 - \\
&- (a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11})(a_{21} + a_{23})) = ((a_{41}a_{12} - a_{42}a_{11})(a_{22} + a_{24}) - \\
&- (a_{42} + a_{44})\Delta_0) / ((a_{41} + a_{43})\Delta_0 - (a_{21} + a_{23})(a_{41}a_{12} - a_{42}a_{11})), \\
g &= 1 + a_{11}((a_{21} + a_{23})h - (a_{22} + a_{24})) / \Delta_0, \quad t = h - a_{12}(g - 1), \quad \Delta_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

Распределение локальных напряжений и смещений в окрестности конической точки, найденное с помощью (2.15) и (4.4) следующее: в матрице

$$\begin{aligned}
\sigma_p^\circ &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj}(P_{m_j-1}(\cos \theta_1) + g_{12j}^\circ h_{qj} P_{m_j+1}(\cos \theta_1))) \right) + O(1) \\
\sigma_\theta^\circ &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj}(g_{21j}^\circ P_{m_j-1}(\cos \theta_1) - d_{02j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1 + \right. \\
&+ h_{qj}(g_{32j}^\circ P_{m_j+1}(\cos \theta_1) + d_{01j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j+1}(\cos \theta_1) / d\theta_1)) \left. \right) + O(1) \\
\sigma_s^\circ &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj}(g_{31j}^\circ P_{m_j-1}(\cos \theta_1) + d_{02j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1 + \right. \\
&+ h_{qj}(g_{32j}^\circ P_{m_j+1}(\cos \theta_1) + d_{01j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j+1}(\cos \theta_1) / d\theta_1)) \left. \right) + O(1) \\
\tau_{\rho\theta}^\circ &= G_0 \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj}((m-1)d_{02j} + 1)dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1) \right) + O(1) \\
u_\rho^\circ &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j} \sum_{q=1}^2 (k_{qj}(P_{m_j-1}(\cos \theta_1) + h_{qj} P_{m_j+1}(\cos \theta_1))) \right) + O(r) \\
u_\theta^\circ &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j} \sum_{q=1}^2 (k_{qj}(d_{02j} dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1 + h_{qj} d_{02j} dP_{m_j+1}(\cos \theta_1) / d\theta_1)) \right) + O(r) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^1 &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj} (g_{11j}^1 g_j P_{m_j-1}(\cos \theta_1) + g_{12j}^1 t_j P_{m_j+1}(\cos \theta_1))) \right) + O(1) \\ \sigma_\theta^1 &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj} (g_j (g_{21j}^1 P_{m_j-1}(\cos \theta_1) - d_{12j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + t_j (g_{22j}^1 P_{m_j+1}(\operatorname{ctg} \theta_1) - d_{11j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j+1}(\cos \theta_1) / d\theta_1)) \right) + O(1) \\ \sigma_s^1 &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj} (g_j (g_{31j}^1 P_{m_j-1}(\cos \theta_1) + d_{12j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + t_j (g_{31j}^1 P_{m_j+1}(\cos \theta_1) + d_{11j} \operatorname{ctg} \theta_1 dP_{m_j+1}(\cos \theta_1) / d\theta_1)) \right) + O(1) \\ \tau_{p\theta}^1 &= G_1 \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j-1} \sum_{q=1}^2 (k_{qj} (((m_j - 1)d_{12j} + 1)g_j dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1 + \right. \\ &\quad \left. + ((m_j - 1)d_{11j} + 1)t_j dP_{m_j+1}(\cos \theta_1) / d\theta_1)) \right) + O(1), \\ u_p^1 &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j} \sum_{q=1}^2 (k_{qj} (g_j P_{m_j-1}(\cos \theta_1) + t_j P_{m_j+1}(\cos \theta_1))) \right) + O(r), \\ u_\theta^1 &= \sum_{j=1}^l \left(\rho^{m_j} \sum_{q=1}^2 (k_{qj} (g_j d_{12j} dP_{m_j-1}(\cos \theta_1) / d\theta_1 + t_j d_{11j} dP_{m_j+1}(\cos \theta_1) / d\theta_1)) \right) + O(r) \\ g_{11j}^i &= 2G_i m_j + \lambda_i (m_j + 2) - d_{i2j} (m_j - 1) m_j, \quad g_{12j}^i = 2G_i m_j + \lambda_i (m_i + 2) - \\ &\quad - d_{i1j} (m_j + 1) (m_j + 2), \quad g_{21j}^i = \lambda_i (m_i - 2) - d_{i1j} m_j (m_j - 1) + 2G_i (1 - d_{i1j} (m_j - 1) m_j), \\ g_{22j}^i &= \lambda_i (m_j + 2 - d_{i1j} (m_j + 1) (m_j + 2)) + 2G_i (1 - d_{i1j} (m_j + 1) (m_j + 2)), \\ g_{31j}^i &= \lambda_j (m_j + 2 - d_{i1j} (m_j - 1) m_j) + 2G_i, \\ g_{23j}^i &= \lambda_i (m_j + 2 - d_{i1j} (m_j + 1) (m_j + 2)) + 2G_i \quad (i = \overline{0, 1}) \end{aligned}$$

где l — число корней $m_j \in (0, 1)$ характеристического уравнения (4.3).

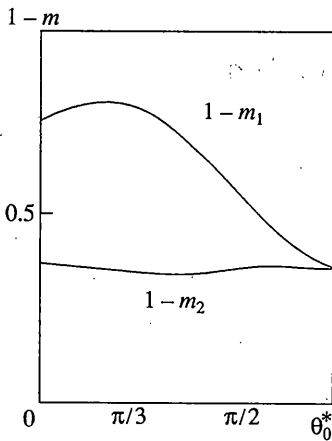
Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются по формулам

$$k_{1j} = (h_j - h_{2j}) N_{02j} / (h_{1j} - h_{2j}), \quad k_{2j} = (h_j - h_{1j}) N_{02j} / (h_{2j} - h_{1j}) \quad (4.6)$$

$$h_{1j} = -a_{32j} / a_{31j}, \quad h_{2j} = -a_{12j} / a_{11j}$$

В формулах (4.5), (4.6) величины с индексом j вычисляются согласно соответствующим величинам в (4.2), (4.4) при $m = m_j$, например, $g_{11j}^i = g_{11}^i|_{m=m_j}$.

Устремляя в соотношениях (4.6) $G_1 \rightarrow 0$ ($G_1 \rightarrow \infty$), получим случай матрицы с коническим вырезом абсолютно жестким включением и $k_{2j} = 0$ ($k_{1j} = 0$), а характеристическое уравнение (4.3) переходит в $a_{31j} a_{42j} - a_{32j} a_{41j} = 0$ ($\Delta_{0j} = 0$). Таким образом, сингулярные составляющие локальных напряжений (4.5), как и в случае особой линии поверхности раздела сред [6] являются суперпозицией мягкой и жесткой составляющих.



Фиг. 2

Полагая в уравнении (4.3) $\alpha = \pi/2$, что соответствует случаю упругого иглообразного включения, получаем пустое множество корней. Это согласуется с данными для жестких и пустотелых иглообразных включений, если в известном решении для среды с жестким эллиптическим диском, например [7], или эллиптической трещиной [8] осуществить предельный переход при $e \rightarrow 1$, учитывая при этом асимптотику эллиптического интеграла первого рода [9] $E(\pi/2; 1) = O(\ln(1-e))$.

При $\alpha = 0$, что соответствует случаю сочленения двух разнородных полупространств, уравнение (4.3) не имеет корней и сингулярные составляющие в локальных напряжениях отсутствуют. Для однородной среды ($\gamma = 1, \nu_1 = \nu_0$) получаем ожидаемый результат $k_{qj} = 0$.

Система уравнений с неизвестными N_{31}, N_{30} , получаемая на основе перемещений u_{si} , имеет нулевое решение, поэтому в распределении напряжений (4.5) отсутствуют соответствующие составляющие.

При численном анализе характеристического уравнения (4.3) функции Лежандра и их производные представлялись посредством гипергеометрических функций [3]. Установлено, что уравнение (4.3) может иметь до двух корней $m_j \in (0, 1)$ ($j = \overline{1, 2}$) и в распределении (4.5) полагаем $l = 2$. Изменение порядка сингулярности $1 - m_j$ ($j = \overline{1, 2}$) показано на примере материалов с коэффициентами Пуассона $\nu_1 = 0,25, \nu_0 = 0,3$, относительной жесткостью включения $\gamma = G_1/G_0 = 0,1$ в зависимости от угла θ_0^* при вершине конуса в его осевом сечении (фиг. 2).

4.2. Угловое многогранное включение. Предложенный подход применим к кусочно гладким коническим поверхностям, дополнив задачу условиями на особых линиях следуя [6]. Пусть поверхностью раздела является поверхность многогранного угла с гранями S_j ($j = \overline{1, N_0}$), ребрами L_j и вершиной в начале декартовой системы координат.

Вершина включения принадлежит каждой из граней и одновременно каждому из ребер и только им, поэтому условия статического равновесия вершины определяются условиями равновесия граней и ребер. Рассмотрим достаточно малую область, содержащую вершину и прилегающую часть грани S_j . Введем локальные координаты ρ_j, θ_j, s_j согласно (1.1). Тогда перемещения поля, возмущенного такой гранью в особой точке O , имеют вид (2.15), или (2.24). Пусть $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ — сопровождающий трехгранник поверхности S_j в некоторой точке M_{0j} ребра L_j , причем \bar{n}_1, \bar{n}_2 лежат в плоскости грани S_j . Введем локальные координаты $\rho_{1j}, \theta_{1j}, s_{1j}$ согласно работе [6]. Перемещения локального поля в окрестности точки M_{0j} ребра L_j принадлежат степенному классу, явный вид их приведен в [6] и здесь не выписываются. Условия механического контакта в вершине включения как точке грани S_j имеют вид (1.4), а одновременно как точке ребер такие условия приведены в [6] при $M_{0j} \rightarrow O$.

На основе формул Серре — Френе имеем [10]:

$$d_j = \left| [\bar{r}_{0j}, d^2 \bar{r}_{0j} / ds_j^2] \right| = \left| k_j [\bar{r}_{0j}, \bar{v}_j] \right| \quad (4.7)$$

где \bar{v}_j — главная нормаль сопровождающего трехгранника направляющей L_{0j} грани S_j , k_j — ее кривизна.

Поскольку направляющими граней являются отрезки прямых, что имеют нулевую кривизну, то из (4.7) следует $d_j = 0$ и H_{0j} не зависит от s_j и перемещения представляются в виде (2.15). Соответствующие характеристические уравнения, получающиеся при удовлетворении условий (1.4) совпадают с уравнением (4.3), которое при $\theta_j = \pi/2$ имеет пустое множество корней на интервале $(0, 1)$. Таким образом, плоские грани не вызывают возмущенного сингулярного поля в вершине O . Напряжения, возмущенные ребрами в вершине O , имеют степенные особенности порядка $1 - m_{jq}$ ($q = \overline{1, 5}$), где m_{jq} – корни характеристических уравнений [6]

$$\sin(m_{jq}\omega_j) = \pm m_{jq} \sin \omega_j \quad (q = \overline{1, 2}), \quad \mu_j \sin(m_{jq}\omega_j) = \pm m_{jq} \sin \omega_j \quad (q = \overline{3, 4})$$

$$m_{j5} = \pi/\omega_j, \quad \mu_j = (\kappa_j \gamma - \kappa_0)/(1 - \gamma), \quad \kappa_j = 3 - 4\nu_j$$

ω_j – величина двугранного угла, образованного $j - 1$ -ой и j -ой гранью.

Численный анализ таких уравнений выполнен в [11], а соответствующее распределение напряжений приведено в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисюк И.Т. Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 148–155.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч. 1. М.: Наука, 1974. 296 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 3. М.: Наука, 1969. 656 с.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 280 с.
6. Денисюк И.Т. Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 64–70.
7. Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т. Напряженно-деформированное состояние изотропного тела в окрестности жестких эллиптических включений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 12. С. 31–35.
8. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения. В кн. Разрушение. Вып. 2. М.: Мир, 1975. С. 83–203.
9. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
10. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: ГИФМЛ, 1958. 244 с.
11. Денисюк И.Т. Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1992. № 4. С. 76–81.

Луцк

Поступила в редакцию
30.03.1999