

УДК 531.5

© 2001 г. А.Г. ПЕТРОВ

ОБ УСРЕДНЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача Коши для уравнений Гамильтона в стандартной форме. Гамильтониан – периодическая по времени функция. Для определения положения точек последования Пуанкаре строится отображение по данному гамильтониану системы. Отображение представлено через одну функцию, которая определяется из полученного уравнения типа Гамильтона – Якоби. Решение получено в виде сходящегося ряда по степеням малого параметра стандартной формы. Частичные суммы ряда определяют последовательность, сходящуюся к точному отображению Пуанкаре гамильтоновой системы. Причем отображение любого приближения имеет якобиан, тождественно равный единице.

Развитый подход применяется для построения новой процедуры усреднения гамильтоновых систем. Автономный гамильтониан, приближающий точки последования Пуанкаре, представлен в виде асимптотического ряда. Метод демонстрируется на решении следующих задач.

1. Исследование движения частиц несжимаемой среды в тонком слое, граница которого меняется по периодическому закону.
2. Движение сферического маятника при произвольной вибрации точки подвеса.

1. О методах усреднения гамильтоновых систем. Рассматривается задача Коши для уравнений Гамильтона системы с n степенями свободы в стандартной форме [1] (стр. 385–394):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \varepsilon H_Y, & \dot{Y} &= -\varepsilon H_X, & X(t_0) &= X_0, & Y(t_0) &= Y_0 \\ H_X &= \partial H / \partial X, & H_Y &= \partial H / \partial Y \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $H(t, X, Y) = H(t + 2\pi, X, Y)$ – произвольная достаточно гладкая 2π -периодическая функция, X, Y – n -мерные векторы.

Асимптотическая процедура метода усреднения [1, 2] позволяет построить для любого целого $k > 0$ близкую к тождественной каноническую замену переменных $X, Y \rightarrow \tilde{X}, \tilde{Y}$, параметрически зависящую от времени с периодом 2π так, что уравнения для новых переменных будут иметь вид автономной гамильтоновой системы с точностью до малых порядка ε^k , а именно

$$\dot{\tilde{X}} = \varepsilon \tilde{H}_{\tilde{Y}}, \quad \dot{\tilde{Y}} = -\varepsilon \tilde{H}_{\tilde{X}}, \quad \tilde{X}(t_0) = X_0, \quad \tilde{Y}(t_0) = Y_0 \quad (1.2)$$

$$\tilde{H}(t, X, Y, \varepsilon) = \bar{H}(X, Y\varepsilon) + R(t, X, Y, \varepsilon), \quad R = O(\varepsilon^k) \quad (1.3)$$

где $\bar{H}(X, Y)$ – независящая от времени и $R(t, X, Y)$ – периодическая по времени функции. Систему уравнений (1.2) можно заменить на более простую автономную систему уравнений Гамильтона, отбросив в гамильтониане малый остаточный член R :

$$\dot{\bar{X}} = \varepsilon \bar{H}_{\bar{Y}}, \quad \dot{\bar{Y}} = -\varepsilon \bar{H}_{\bar{X}}, \quad \bar{X}(t_0) = X_0, \quad \bar{Y}(t_0) = Y_0 \quad (1.4)$$

Решение (1.4) приближает решение задачи (1.2) тем точнее, чем меньше R . Усредненный гамильтониан \bar{H} определяется с помощью производящей функции $X\bar{Y} + \varepsilon S(t, X, \bar{Y})$ по следующим формулам [1]:

$$H(t, X, \bar{Y} + \varepsilon S_X(t, X, \bar{Y})) + S_t(t, X, \bar{Y}) = \bar{H}(X + \varepsilon S_Y(t, X, \bar{Y}), \bar{Y}) \quad (1.5)$$

$$S(t_0, X, \bar{Y}) = 0, \quad S(t_0 + 2\pi, X, \bar{Y}) = S(t_0, X, \bar{Y}) \quad (1.6)$$

Разложения функций \bar{H} и S по степеням ε находятся из решения задачи (1.5) и (1.6) единственным образом. Если оборвать разложения на ε^{k-1} , то получим соответствующее приближение для \bar{H} в (1.3) и каноническую замену переменных

$$\bar{X} = X + \varepsilon \partial S / \partial \bar{Y}, \quad Y = \bar{Y} + \varepsilon \partial \bar{S} / \partial X \quad (1.7)$$

$$S = S_0(t, X, \bar{Y}) + \varepsilon S_1(t, X, \bar{Y}) + \dots + \varepsilon^{k-1} S_{k-1}(t, X, \bar{Y}).$$

Принятое в (1.6) начальное условие отличается от традиционного, в котором обычно ставится условие отсутствия нулевой гармоники. Это условие согласно (1.7) обеспечивает совпадение решений задач Коши (1.1) и (1.4) в точках $t_n = t_0 + 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) кратные периоду с точностью до ε^k :

$$X(t_n) = X_n, \quad Y(t_n) = Y_n, \quad \bar{X}(t_n) = X_n + O(\varepsilon^k), \quad \bar{Y}(t_n) = Y_n + O(\varepsilon^k) \quad (1.8)$$

Такой частный способ усреднения будем называть стробоскопическим усреднением функции $H(t, X, Y)$. Он позволяет вычислять положения точек последования Пуанкаре непосредственно из решения задачи Коши (4.3) с точностью до ε^k , без обращения к системе (1.7). В разложениях \bar{H} по ε можно достичь очень высокой точности. Однако, следует учесть принципиальную невозможность точного определения усредненного гамильтониана для любой гамильтоновой системы (1.1). Теорема Нейштатта [3] утверждает, что всегда существует последовательность канонических замен (1.7) с экспоненциально малой, неумлучшаемой в общем случае, оценкой остаточного члена

$$\|\nabla R\| \leq \exp(-C/\varepsilon), \quad \nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y) \quad (1.9)$$

Число последовательных замен оценивается величиной $1/\varepsilon$. (В вырожденном случае $H_0 = 0$ оценка такова $\|\nabla R\| \leq \exp(-C/\varepsilon^2)$, а число последовательных замен оценивается величиной $1/\varepsilon^2$.)

Точное определение усредненного автономного гамильтониана возможно только для интегрируемых гамильтоновых систем.

Точки последования Пуанкаре усредненной автономной системы \bar{X}_n, \bar{Y}_n (1.4) лежат на интегральных кривых $\bar{H}(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \bar{H}(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$. Для отклонения точек последования Пуанкаре X_n, Y_n исходной системы от интегральных кривых системы с гамильтонианом \bar{H} из теоремы Нейштатта вытекает оценка

$$\|\bar{H}(X_n, Y_n) - \bar{H}(X_0, Y_0)\| \leq \varepsilon C_1 \exp(-C/\varepsilon)(t - t_0) \quad (1.10)$$

где C_1 – постоянная, независящая от ε . (В вырожденном случае оценка сверху такова $\varepsilon^2 C_1 \exp(-C/\varepsilon^2)(t - t_0)$, $\|\nabla R\| \leq \exp(-C/\varepsilon^2)$.)

Отсюда можно сделать вывод, что за асимптотически большое время $t - t_0 \leq T = \exp(C/\varepsilon)/C_1$ уход точек последования Пуанкаре исходной системы (1.1) от интегральной кривой усредненной системы (1.4) не превышает малой величины ε . Неравенство (1.10) гарантирует близость точек последования Пуанкаре исходной и усредненной систем по крайней мере на экспоненциально большом отрезке време-

ни T . (В вырожденном случае $T = \exp(C/\varepsilon^2)/C_1$.) Свойства системы (1.1) на бесконечном интервале времени изучены в теории КАМ и изложены в монографиях [4, 5, 6, 7]. Так, для системы с одной степенью свободы из существования невырожденного устойчивого равновесия усредненной системы вытекает существование в его окрестности периодического движения системы (1.1) и его устойчивость по Ляпунову [4, 5]. Таких простых критериев устойчивости движения по Ляпунову для систем с более чем одной степенью свободы не существует. Тем не менее, неравенство (1.10) дает достаточно полную информацию о физическом поведении точек последования Пуанкаре вблизи положения устойчивого равновесия усредненной системы. Точки последования Пуанкаре системы (1.1) при любых достаточно малых возмущениях не выйдут за пределы ε -окрестности, по крайней мере, за время T . Такая ситуация будет трактоваться как устойчивость периодического движения на экспоненциально большом отрезке времени. Вывод о такой устойчивости можно сделать, исследуя только локальные свойства усредненного гамильтониана в окрестности точки равновесия. Для получения усредненного гамильтониана ниже предлагается иная общая и достаточно эффективная процедура [8].

2. Процедура усреднения. *Предложение 1.* Пусть функция $\Psi(t, x, y)$ является решением следующей задачи

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x + \frac{\varepsilon}{2} \Psi_y, y - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_x\right), \quad \Psi(t_0, x, y) = 0 \quad (2.1)$$

Тогда она определяет параметрическое представление решения задачи Коши (1.1) по следующим формулам

$$X = x + \frac{\varepsilon}{2} \Psi_y(t, x, y), \quad Y = y - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_x(t, x, y) \quad (2.2)$$

$$X_0 = x - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_y(t, x, y), \quad Y_0 = y + \frac{\varepsilon}{2} \Psi_x(t, x, y) \quad (2.3)$$

Предложение 2. Усредненный (стробоскопически) гамильтониан $\bar{H}(X, Y)$ для системы (1.1) с гамильтонианом $H(t, X, Y)$ с точностью до ε^k можно определить из решения следующей системы уравнений и начальных условий:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x + \frac{\varepsilon}{2} \Psi_y, y - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_x\right), \quad \Psi(t_0, x, y) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \bar{H}\left(x + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_y, y - \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_x\right), \quad \bar{\Psi}(t_0, x, y) = 0$$

$$\Psi(t_0 + 2\pi, x, y) - \bar{\Psi}(t_0 + 2\pi, x, y) = O(\varepsilon^k) \quad (2.5)$$

где $\Psi(t, x, y)$ и $\bar{\Psi}(t, x, y)$ – две вспомогательные функции, определяющие решение задач Коши (1.1) и (1.4).

Прежде чем перейти к доказательству, поясним смысл сформулированных предложений. Формулы (2.2) и (2.3) приведены в [9] (стр. 54–55) и представляют параметрическое представление отображения с сохранением элементарной площади. Два соотношения (2.2) определяют отображение области $(x, y) \in \Omega'$ на область $(X, Y) \in \Omega$. Следующие два соотношения (2.3) определяют отображение области $(x, y) \in \Omega'$ на область $(X_0, Y_0) \in \Omega_0$. Можно показать, что якобианы обоих отображений равны

$$J = \partial(X, Y) / \partial(x, y) = \partial(X_0, Y_0) / \partial(x, y) = 1 + \varepsilon^2 / 4 (\Psi_{xx} \Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2) \quad (2.6)$$

Если J не обращается в ноль и не имеет особых точек в области $(x, y) \in \Omega'$, то решение

задачи Коши (1.1) дается суперпозицией обратного отображения (2.3) области $(X_0, Y_0) \in \Omega_0$ на область $(x, y) \in \Omega'$ и отображения (2.2) области $(x, y) \in \Omega'$ на область $(X, Y) \in \Omega$, (фиг. 1). В результате получается отображение области (X_0, Y_0) на область $(X, Y) \in \Omega$, с якобианом равным единице.

Уравнения (2.2) и (2.3) можно переписать в следующем виде:

$$X - X_0 = \varepsilon \Psi_y, \quad Y - Y_0 = -\varepsilon \Psi_x, \quad x = (X + X_0)/2, \quad y = (Y + Y_0)/2 \quad (2.7)$$

из которого следует, что точка (x, y) лежит посередине между точками (X, Y) и (X_0, Y_0) (фиг. 1).

Перейдем к доказательству предложения 1. Если продифференцировать по времени уравнения (2.7) и подставить вместо производных правые части (1.1) $\dot{X} = 2\dot{x} = \varepsilon H_y$, $\dot{Y} = 2\dot{y} = -\varepsilon H_x$, то получим $d\Psi_y/dt = H_y$, $d\Psi_x/dt = H_x$ или

$$\nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla H \left(t, x + \frac{\varepsilon}{2} \Psi_y, y - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_x \right), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

Интеграл уравнения (2.8) с точностью до произвольной функции времени совпадает с уравнением (2.1). С этой же точностью определены функция Гамильтона и функция Ψ . Начальное условие в (2.1) обеспечивает выполнение начального условия (1.1). Предложение 1 доказано.

Предложение 2 является следствием предложения 1. Действительно, функции, Ψ , $\bar{\Psi}$, найденные из уравнений (2.4), определяют по предложению 1 параметрические представления решений задач (1.1) и (1.4). Условие (2.5) обеспечивает выполнение условия (1.8), что и требовалось показать.

3. Примеры точного определения усредненного гамильтониана. Точное определение усредненного гамильтониана, вообще говоря, невозможно. Ниже рассмотрены два случая интегрируемых систем, для которых усредненный гамильтониан и функции Ψ , $\bar{\Psi}$ определяются точно.

Пример 1. Рассмотрим вынужденные колебания линейного осциллятора под действием силы, меняющейся по гармоническому закону с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) + Qb \sin t$. Решение уравнения для Ψ (2.1) ищется в виде:

$$\varepsilon \Psi = (q^2 + p^2) \operatorname{tg}(\varepsilon \Delta t / 2) + \varepsilon [qU(t) + pV(t)], \quad \Delta t = t - t_0$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим линейные уравнения для U и V . Решение уравнений имеет вид:

$$U = \frac{2b \sin t}{1 - \varepsilon^2} \left(\sin \frac{\Delta t}{2} - \varepsilon \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \cos \frac{\Delta t}{2} \right)$$

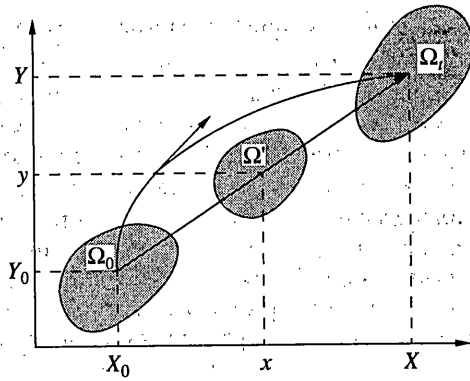
$$V = \frac{2b \cos t}{1 - \varepsilon^2} \left(\varepsilon \sin \frac{\Delta t}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \cos \frac{\Delta t}{2} \right)$$

Усредненный гамильтониан ищется в виде

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) - QQ_C - PP_C$$

где Q_C, P_C — неизвестные пока постоянные. Тогда решение уравнения (2.4) с гамильтонианом \bar{H} имеет вид

$$\varepsilon \bar{\Psi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\varepsilon \Delta t}{2} \right) (q^2 + p^2 - 2qQ_C - 2pP_C)$$



Фиг. 1

Далее находим значения функций Ψ и $\bar{\Psi}$ при $\Delta t = 2\pi$:

$$\epsilon\Psi = \operatorname{tg}(\epsilon\pi) \left[q^2 + p^2 - \frac{2b\epsilon}{1-\epsilon^2} (\epsilon q \sin t_0 + p \cos t_0) \right]$$

$$\epsilon\bar{\Psi} = \operatorname{tg}(\epsilon\pi) [q^2 + p^2 - 2qQ_C - 2pP_C]$$

Приравнявая значения этих функций согласно (2.5), найдем неизвестные постоянные Q_C, P_C и усредненный гамильтониан

$$Q_C = \frac{b\epsilon^2}{1-\epsilon^2} \sin t_0, \quad P_C = \frac{b\epsilon}{1-\epsilon^2} \cos t_0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2} [(\bar{Q} - Q_C)^2 + (\bar{P} - P_C)^2]$$

Якобианы преобразований $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ и $(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$ определяются по (2.6) и равны $J = 1/\cos^2(2\pi\epsilon)$. При $\epsilon^2 = 1$ якобианы обращаются в ∞ и усредненный гамильтониан не существует.

Таким образом, при $\epsilon \neq 1$ точки последования Пуанкаре Q_n, P_n расположены на окружности с центром $C(Q_C, P_C)$: $(Q_n - Q_C)^2 + (P_n - P_C)^2 = \text{const}$. Их положения находятся из решения задачи Коши (1.4) для упрощенного гамильтониана \bar{H} . Угловые расстояния между соседними точками равны $2\pi\epsilon$. Отображение последования является поворотом плоскости на угол $2\pi\epsilon$ относительно центра $C(Q_C, P_C)$.

На фиг. 2, а изображена сплошной линией фазовая траектория с гамильтонианом H при $\epsilon = 0.2, b = -3.67, t_0 = 1.37$, штриховой линией — фазовая траектория $\bar{H} = \text{const}$. Точки последования Пуанкаре, обозначенные звездочками, располагаются на окружности радиуса 1.2 с центром $C(-0.15, -0.15)$.

Пример 2. Рассмотрим систему с гамильтонианом $\bar{H} = \frac{1}{2}(Q^2 - P^2) + Qb \sin t$, определяющую движение точки под действием отталкивающего центра и силы, меняющейся по гармоническому закону. Этот пример следует из примера 1 формальной заменой $P \rightarrow iP, P_C \rightarrow iP_C, \epsilon \rightarrow i\epsilon$. Для усредненного гамильтониана отсюда получим

$$\bar{H} = \frac{1}{2} [(\bar{Q} - Q_C)^2 - (\bar{P} - P_C)^2]$$

$$Q_C = -\frac{b\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \sin t_0, \quad P_C = \frac{b\epsilon}{1+\epsilon^2} \cos t_0$$

Фазовые точки Q_n, P_n в моменты времени кратные периоду 2π лежат на гиперболе со смещенным центром.

На фиг. 2, b изображена сплошной линией фазовая траектория с гамильтонианом H при $\varepsilon = 0.1$, $b = 1.47$, $t_0 = -1.95$, штриховой линией – фазовая траектория $\bar{H} = \text{const}$. Точки последования Пуанкаре, обозначенные звездочками, располагаются на правой ветви гиперболы с центром $C(0.06, 0.06)$. Отображение последования является гиперболическим поворотом плоскости на угол $2\pi\varepsilon$ относительно центра $C(Q_C, P_C)$.

4. Асимптотические выражения для усредненных гамильтонианов. Перейдем к выводу стробоскопического усреднения гамильтониана стандартного вида $\varepsilon H(X, Y, \varepsilon)$. Подобный вид гамильтониана определяет движение частиц несжимаемой жидкости под действием поверхностных волн, а также при периодических деформациях границы двумерной области, заполненной несжимаемой средой. Для коэффициентов разложений $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \dots$ из первого уравнения (2.4) получим решения

$$\Psi_0 = \int_{t_0}^t H dt, \quad \Psi_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (H_x \Psi_{0y} - H_y \Psi_{0x}) dt, \dots \quad (4.1)$$

Процесс можно неограниченно продолжать.

Разложение для $\bar{\Psi}$, соответствующее автономному гамильтониану, находится аналогично из второго уравнения (2.4) и существенно проще. Функция $\varepsilon\bar{\Psi}$ нечетная по аргументу εt . Действительно, второе уравнение (2.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial \varepsilon \bar{\Psi}}{\partial \varepsilon t} = \bar{H} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_y, y - \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_x \right)$$

Пользуясь интегралом автономной гамильтоновой системы

$$\bar{H} \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_y, y - \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_x \right) = \bar{H} \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_y, y + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\Psi}_x \right)$$

уравнение можно привести также к виду

$$\frac{\partial(-\varepsilon\bar{\Psi})}{\partial(-\varepsilon t)} = \bar{H} \left(x + \frac{1}{2}(-\varepsilon\bar{\Psi}_y), y - \frac{1}{2}(-\varepsilon\bar{\Psi}_x) \right)$$

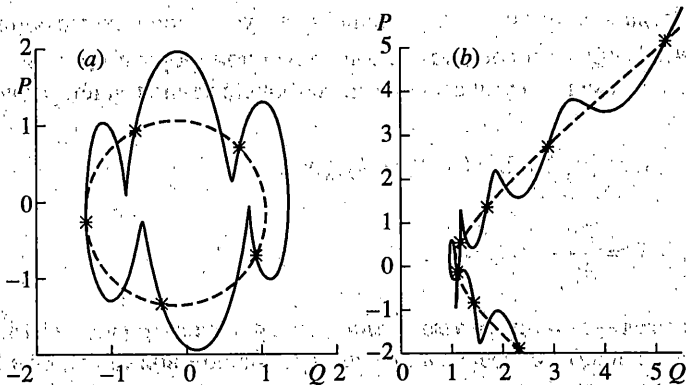
Решение второго уравнения получается из решения первого заменами $\varepsilon\bar{\Psi} \rightarrow -\varepsilon\bar{\Psi}$, $\varepsilon t \rightarrow -\varepsilon t$. Из единственности решения следует, что функция $\varepsilon\bar{\Psi}$ нечетная по аргументу εt . Отсюда в разложение входят только нечетные степени εt :

$$\varepsilon\bar{\Psi} = \varepsilon t \bar{\Psi}_0 + (\varepsilon t)^3 \bar{\Psi}_2 + \dots + (\varepsilon t)^{2n+1} \bar{\Psi}_{2n+1} \\ \bar{\Psi}_0 = \bar{H}, \quad \bar{\Psi}_2 = \frac{1}{24} (\bar{H}_{xx} \bar{H}_y^2 - 2\bar{H}_{xy} \bar{H}_x \bar{H}_y + \bar{H}_{yy} \bar{H}_x^2), \dots \quad (4.2)$$

Разложения (4.1) и (4.2) определяют по формулам (2.2) и (2.3) отображение последовательности Пуанкаре, порождаемое исходной и усредненной гамильтоновыми системами. В силу теоремы об аналитичности решения по параметру ε эти разложения являются степенными рядами, сходящимися в некоторой области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. В монографии [10] приведена оценка радиуса сходимости по ε , которая получается методом мажорант.

Разложение для $\varepsilon\bar{H}$ находится из равенства $\Psi = \bar{\Psi}$ при $t = t_0 + 2\pi$. С точностью до ε^3 это разложение имеет вид

$$\varepsilon\bar{H} = \varepsilon \langle H \rangle - \frac{\varepsilon^2}{2} \left\langle \left\{ H, \int_{t_0}^t H dt \right\} \right\rangle + O(\varepsilon^3), \quad \langle H \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} H dt \\ \left\{ H, \int_{t_0}^t H dt \right\} = H_y \int_{t_0}^t H_x dt - H_x \int_{t_0}^t H_y dt \quad (4.3)$$



Фиг. 2

где $\langle H \rangle$ означает среднее значение соответствующей функции на отрезке времени $[t_0, t_0 + 2\pi]$, фигурными скобками обозначены скобки Пуассона. Результат (4.3) распространяется на общий случай системы с n степенями свободы.

Разложение (4.3) является асимптотическим, и, вообще говоря, расходится. Оно приближает положение точек последования Пуанкаре с любой степенью точности по ϵ , но, вообще говоря, будет оставаться неустранимая экспоненциально малая ошибка приближения порядка $\exp(-C/\epsilon)$.

В [1] приводится разложение для усредненного по Боголюбову гамильтониана до членов второго порядка. Главный член этого разложения совпадает с (4.3), а члены более высоких порядков разложения отличаются. Это указывает на отличие стробоскопического усреднения по Боголюбову.

Движение в быстро осциллирующем поле можно свести к системе уравнений (1.1) с гамильтонианом:

$$\epsilon H = \epsilon h(Q, P) + V(t, Q), \quad \langle V \rangle = 0 \quad (4.4)$$

где Q и P – безразмерные координаты и импульс, $V(t, Q)$ – осцилляционная часть потенциальной энергии с периодом по времени равным 2π , ϵ – отношение частоты собственных колебаний к частоте вынужденных колебаний. Первое слагаемое определяет медленные колебания около положения равновесия с частотой порядка ϵ . Второе слагаемое является возмущением с частотой 1, много большей собственной частоты ϵ . В частности, при $h = P^2/2 + U(Q)$ уравнения (1.1) определяют движение материальной точки в быстро осциллирующем поле, исследование которых методом усреднения описано в [14] (стр. 119–122) и [16].

Общую теорию таких движений можно построить, сведя гамильтониан 4.4 к стандартному виду с помощью производящей функции

$$S(t, Q, \bar{P}) = -W(t, Q) + Q\bar{P}, \quad W = \int_{t_0}^t V(t, Q) dt - \left\langle \int_{t_0}^t V(t, Q) dt \right\rangle \quad (4.5)$$

В новых переменных $\bar{Q} = S_P = Q$, $P = S_Q = -W_Q(t, Q) + \bar{P}$ гамильтониан примет стандартный вид

$$\epsilon H^*(t, \bar{Q}, \bar{P}) = \epsilon h(\bar{Q}, \bar{P} - W_Q(t, \bar{Q})) \quad (4.6)$$

и к нему можно применить формулу (4.3). Обычно гамильтониан квадратичен по

импульсам P . Тогда в силу $\langle W_0 \rangle = 0$ главный член усредненного гамильтониана представляется суммой $h(Q, P)$ и средним от квадратичной формы производных W по координатам. Для системы с двумя степенями свободы главный член разложения имеет вид:

$$\bar{H} = h(Q, P) + \frac{1}{2}(h_{11}\langle W_1^2 \rangle + 2h_{12}\langle W_1 W_2 \rangle + h_{22}\langle W_2^2 \rangle) \quad (4.7)$$

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial P_i \partial P_j}, \quad W_j = \frac{\partial W}{\partial Q_j} \quad (i, j = 1, 2)$$

5. Примеры исследования систем стандартного вида. *Пример 1.* [8, 11] Рассматривается течение жидкости, создаваемое прогрессивной волной длины 2π в тяжелой жидкости конечной глубины d . Безразмерная функция тока εH представляется разложением по амплитуде волны ε [12]:

$$\varepsilon H = \varepsilon F_0(Y) \sin(X+t) + O(\varepsilon^2), \quad F_0 = \text{sh}(Y+d) / \text{sh}(d), \dots$$

где первый член разложения получен из решения линейной задачи, второй и все последующие члены разложения выражаются линейно через гармоники $\sin k(x+t)$, $\cos k(x+t)$. Первый член разложения (4.3) $\langle H \rangle$ равен нулю. Вычисляя второй член разложения, с точностью до ε^2 находим усредненный гамильтониан и скорость переноса частиц жидкости (Стокс 1847 г.):

$$\varepsilon \bar{H} = -\frac{\varepsilon^2 \text{sh}[2(\bar{Y}+d)]}{4 \text{sh}^2 d}, \quad \bar{v}_x = \frac{\partial \varepsilon \bar{H}}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\varepsilon^2 \text{ch}[2(Y+d)]}{2 \text{sh}^2 d}, \quad \bar{v}_y = 0$$

Заметим, что вывод этого результата обычным способом требует значительно больших выкладок [12, 13]: вычисление второго нелинейного слагаемого в разложении εH и, затем, решение уравнений движения частиц (1.1) с учетом обоих членов разложения. Тогда как, в данном методе достаточно подставить линейное слагаемое в (4.3), чтобы вычислить усредненный гамильтониан.

Пример 2. [8, 11] Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое, ограниченном двумя вертикальными прямыми, снизу горизонтальной прямой и сверху криволинейной границей, изменяющейся со временем по периодическому закону. В безразмерных декартовых координатах такую область можно представить в виде: $0 \leq X \leq 2\pi$; $0 \leq Y \leq 1 + \varepsilon h(t, X)$, где $h(t, X)$, ограниченная по абсолютной величине функция, с периодом по времени 2π . Частицы на подвижной границе перемещаются только по оси Y . Тогда функция тока εH для течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя определяется следующим выражением

$$\varepsilon H = \varepsilon q(t, X)(3\zeta^2 - 2\zeta^3), \quad \zeta = \frac{Y}{1 + \varepsilon h(t, X)}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial X} = 0 \quad (5.1)$$

где q – безразмерный расход в сечении с координатой X связан с функцией деформации границы h уравнением неразрывности. Продольная скорость εH_Y как функция поперечной координаты ζ изменяется по параболе, обращаясь в ноль на границах $\zeta = 0$, $\zeta = 1$.

Определяем по (4.3) стробоскопически усредненный гамильтониан: $\varepsilon \bar{H} = 6\varepsilon^2 \langle qh \rangle \zeta^2 (1 - \zeta)^2 (2\zeta - 1)$, $\zeta = Y / (1 + \varepsilon h(t_0, X))$.

При деформировании по закону бегущей синусоидальной волны находим $h = \sin(X-t)$, $q = \sin(X-t) + \sin t$, $\langle qh \rangle = 1/2 (1 - \cos X)$, $\zeta = Y / (1 + \varepsilon \sin X)$. Функция $\bar{H}(X, Y)$ принимает наибольшее H_{\max} и наименьшее H_{\min} значения при $X = \pi$, $\zeta = 1/2 \pm \sqrt{5}/10$.

Фазовые траектории при $0 \leq \bar{H} \leq H_{\max}$ непрерывно заполняют верхнюю половину области Ω_0 , при $H_{\min} \leq \bar{H} \leq 0$ — ее нижнюю половину.

На фиг. 3 изображены точки последования Пуанкаре за время равное 100π : а) для усредненного гамильтониана \bar{H} и в) для исходного гамильтониана (5.1) путем численного интегрирования уравнений Гамильтона. В начальный момент времени точки имели координаты $X_0 = \pi, Y_0 = 0.09, 0.16, 0.25, 0.75, 0.83, 0.91$. Как видно из рисунка, точки последования Пуанкаре располагаются на замкнутых кривых. Численные расчеты показывают, что в этой задаче при любой конечной амплитуде $0 < \varepsilon < 0.8$ точки последования Пуанкаре лежат на замкнутых инвариантных кривых, близких к интегральным кривым стробоскопически усредненного гамильтониана.

6. Сферический маятник с колеблющейся точкой подвеса. Сферический маятник имеет две степени свободы: θ — угол отклонения маятника, отсчитываемый от нижнего положения равновесия, φ — азимутальный угол, отсчитываемый от оси Ox . Точка подвеса испытывает периодические колебания во всех трех направлениях со скоростями v_1, v_2, v_3 соответственно по горизонтальным направлениям x, y и вертикальному z . Функция Лагранжа имеет следующий вид [14]:

$$L = \frac{ml^2}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \left(\sin \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] + ml \cos \theta \left(g - \frac{dv_3}{d\tau} \right) - ml \sin \theta \left(\frac{dv_1}{d\tau} \cos \varphi + \frac{dv_2}{d\tau} \sin \varphi \right)$$

где m, l — соответственно масса и длина маятника.

Введём безразмерные время t и параметры ε, b_n ($n = 1, 2, 3$):

$$t = \omega \tau, \quad b_n = \frac{v_n}{\sqrt{gl}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{g}{l\omega^2}}, \quad \theta = \frac{d\theta}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

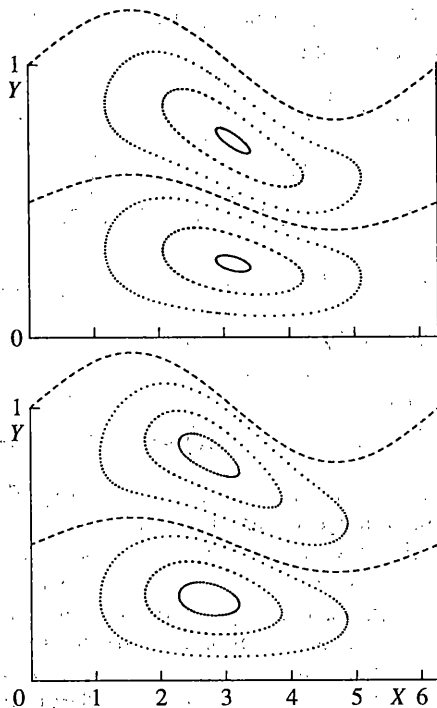
где ω — частота вибраций. Тогда, опуская в функции Лагранжа размерный множитель $m\omega l \sqrt{gl}$, получим

$$L = -b_3 \cos \theta - \sin \theta (b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) + \varepsilon [\cos \theta + \frac{1}{2} ((\dot{\theta}/\varepsilon)^2 + (\sin \theta \dot{\varphi}/\varepsilon)^2)]$$

Отсюда, введя импульсы $P_\theta = \dot{\theta}/\varepsilon$ и $P_\varphi = \dot{\varphi} \sin^2 \theta/\varepsilon$, получим безразмерный вид Гамильтониана системы

$$H = \frac{1}{2} (P_\theta^2 + P_\varphi^2 / \sin^2 \theta) - \cos \theta + V/\varepsilon \quad (6.1)$$

$$V = -b_3(t) \cos \theta - \sin \theta (b_1(t) \cos \varphi + b_2(t) \sin \varphi)$$



Фиг. 3

Определяем по (4.5) $W = b_3 \cos \theta + (b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) \sin \theta$, а затем усредненный гамильтониан:

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left(P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) + U \quad (6.2)$$

$$U = -\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} (B - B_1 \cos 2\tilde{\varphi}) - \frac{\sin 2\theta}{2} B_2 \cos(\tilde{\varphi} - \Delta)$$

где B, B_1, B_2, Δ – постоянные коэффициенты

$$B = \langle b_3^2 \rangle - (\langle b_1^2 \rangle + \langle b_2^2 \rangle) / 2, \quad B_1 = \sqrt{(\langle b_1^2 \rangle - \langle b_2^2 \rangle)^2 / 4 + \langle b_1 b_2 \rangle^2}$$

$$B_2 = \sqrt{\langle b_1 b_3 \rangle^2 + \langle b_2 b_3 \rangle^2}, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \gamma_1, \quad \Delta = \gamma_2 - \gamma_1, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$2\gamma_1 = \arg(\langle b_1^2 \rangle - \langle b_2^2 \rangle + i\langle b_1 b_2 \rangle), \quad \gamma_2 = \arg(\langle b_1 b_3 \rangle + i\langle b_2 b_3 \rangle)$$

Формулы (6.2) представляют стробоскопическое усреднение гамильтониана (6.1) сферического маятника с произвольными периодическими вибрациями точки подвеса.

Если в точке θ, φ функция U имеет не вырожденный минимум, то по теореме Лагранжа в этой точке равновесие системы с усредненным гамильтонианом будет устойчивым. В окрестности этой точки по теории малого параметра Пуанкаре будет существовать периодическое движение, которое будет устойчивым по крайней мере на экспоненциально большом промежутке времени. Таким образом, задача устойчивости точек равновесия сферического маятника сводится к исследованию на минимум потенциальной энергии U в (6.2). Карту изолиний функции U удобно представить, спроектировав точку сферы с координатами θ, φ на горизонтальную плоскость с координатами $\xi = \sin \theta \cos \tilde{\varphi}$, $\eta = \sin \theta \sin \tilde{\varphi}$. Тогда U , как функция декартовых координат ξ, η плоскости будет иметь вид

$$U = -ZU_1 + U_2, \quad U_2 = \frac{1}{2}(B - B_1)\xi^2 + \frac{1}{2}(B + B_1)\eta^2 \quad (6.3)$$

$$U_1 = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} (1 + B_2(\xi \cos \Delta + \eta \sin \Delta))$$

где $Z = 1$ для нижней полусферы, $Z = -1$ – для верхней. Ниже приводятся результаты исследования устойчивости различных точек равновесия сферического маятника на экспоненциально большом отрезке времени.

7. Плоские колебания точки подвеса. Изучается поведение маятника при вибрациях точки подвеса в вертикальной плоскости. На вибрацию, в направлении перпендикулярном вертикальной плоскости, наложено ограничение $b_2 = 0$, а координаты материальной точки, вообще говоря, произвольны. Тогда потенциальная энергия (6.3) упрощается

$$U_2 = \frac{1}{2}(\langle b_3^2 \rangle - \langle b_1^2 \rangle)\xi^2 + \frac{1}{2}\langle b_3^2 \rangle\eta^2 \quad (7.1)$$

$$U_1 = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} (1 + \langle b_1 b_3 \rangle \xi)$$

Точки устойчивого равновесия определяются из решения задачи минимума функции двух переменных $U(\xi, \eta) = -ZU_1 + U_2$, $Z = \pm 1$.

1. Колебания плоского маятника изучены при наличии только вертикальной или горизонтальной вибраций точки подвеса Капицей [14]. Строгое решение задачи устойчивости при вертикальной вибрации приведено в [15]. Исследование общего случая вибраций методом усреднения уравнений движения проведено в [16]. Те же результаты можно получить, не выписывая уравнений, решая задачу минимума функции $U(\xi, 0)$. Ограничиваясь случаем $\langle b_1 b_3 \rangle = 0$ из (7.1), получаем следующее

уравнение равновесия и условие его устойчивости:

$$U_{\xi} = 0, \quad U_{\xi\xi} > 0 \quad (7.2)$$

$$U = \frac{1}{2}\beta\xi^2 - Z\sqrt{1-\xi^2}, \quad \beta = \langle b_3^2 \rangle - \langle b_1^2 \rangle.$$

При $|\beta| < 1$ имеются две стационарные точки, нижняя $\xi_1 = 0$ ($Z = 1$) – устойчивая, верхняя $\xi_2 = 0$ ($Z = -1$) – неустойчивая. Если $\beta > 1$, то оба эти положения устойчивы, и есть две дополнительные неустойчивые боковые точки равновесия $\xi_{3,4} = \pm\sqrt{1-1/\beta^2}$. Наконец, если $\beta < -1$, то нижняя и верхняя точки равновесия $\xi_{1,2}$ будут неустойчивыми, а боковые $\xi_{3,4}$ – устойчивыми. В этом случае (одной степени свободы) легко проверяются условия теоремы Арнольда [4], согласно которой устойчивые точки будут устойчивыми по Ляпунову.

При достаточно малом, отличном от нуля значении $\langle b_1 b_3 \rangle$, все точки равновесия сдвигаются пропорционально этой величине, а условия устойчивости с точностью до ее квадрата сохраняются. Соответствующие формулы точек равновесия для общих пространственных вибраций будут приведены ниже.

2. *Общий случай* [8]. Все найденные выше точки равновесия плоского маятника будут точками равновесия и для сферического маятника при $\eta = 0$. Для выяснения их устойчивости достаточно добавить к условию $U_{\xi\xi} > 0$ второе условие $U_{\eta\eta} > 0$, так как $U_{\xi\eta} = 0$. Можно показать, что точки устойчивого равновесия плоского маятника остаются устойчивыми и для сферического маятника, а новых точек устойчивого равновесия не добавляется.

При $\langle b_1 b_3 \rangle = 0$ функция U зависит от двух параметров β и $\langle b_3^2 \rangle$

$$U = \frac{1}{2}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\langle b_3^2 \rangle\eta^2 - Z\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}, \quad Z = \pm 1 \quad (7.3)$$

Задача устойчивости точек равновесия в этом случае имеет следующее решение. Характер устойчивости четырех, полученных для плоского маятника, точек равновесия не меняется. Кроме того, при $\langle b_3^2 \rangle > 1$ добавляются две неустойчивые точки равновесия $\eta_{5,6} = \sqrt{1-1/\langle b_3^2 \rangle}$ (точки максимума U).

На фиг. 4 изображены изолинии $U(\xi, \eta)$ при $\langle b_1 b_3 \rangle = 0$ в проекциях нижней (слева) и верхней (справа) полусфер.

а). При $\langle b_1^2 \rangle = 2$, $\langle b_3^2 \rangle = 0,5$, ($\beta = -1,5$) имеется четыре точки равновесия. В нижней полусфере: две боковые точки минимума $\xi_{3,4}$ – устойчивые, нижний полюс "седло" неустойчивая. В верхнем полюсе точка максимума ξ_2 – неустойчивая.

б). При $\langle b_1^2 \rangle = 0,5$, $\langle b_3^2 \rangle = 2$, ($\beta = 1,5$) имеется шесть точек равновесия. На нижней полусфере нижний полюс $\xi_1 = 0$ абсолютного минимума U – устойчивый. На верхней полусфере: верхняя точка ξ_2 локального минимума U – устойчивая, две боковые точки типа "седло" $\xi_{3,4}$ – неустойчивые и две боковые точки максимума $\eta_{5,6}$ – неустойчивые.

8. Пространственные колебания точки подвеса. Если вибрации подчинены условиям $\langle b_1 b_3 \rangle = \langle b_2 b_3 \rangle = 0$ и, следовательно, $B_2 = 0$, то вид функции U совпадает с (7.3) с точностью до замены параметров $B - B_1 = \beta$ и $B + B_1 = \langle b_3^2 \rangle$ и все предыдущие результаты для плоских вибраций переносятся без изменений.

Рассмотрим самый общий случай, в котором $B_2 \neq 0$. В этом случае нижний и верхний полюсы не будут точками равновесия. При $B_2 \ll 1$ близкие к ним положения равновесия можно определить с точностью до малых третьего порядка по B_2 :

$$\xi_0 = B_2 \frac{Z \cos \Delta}{Z + B - B_1}, \quad \eta_0 = B_2 \frac{Z \sin \Delta}{Z + B + B_1}, \quad Z = \pm 1.$$

С точностью до B_2^2 условие их устойчивости совпадает с полученным условием устойчивости при $B_2 = 0$. Существует также второе боковое положение равновесия, близкое к рассмотренному при $B_2 = 0$.

Приведенное исследование позволяет управлять положением устойчивого равновесия маятника. Изменяя вибрации точки подвеса, можно привести его в любую точку сферы.

Отметим также частный случай вертикальных вибраций точки подвеса по периодическому закону, изученный в [17] $\langle b_1 b_2 \rangle = \langle b_1 b_3 \rangle = \langle b_2 b_3 \rangle = 0$, $\langle b_1^2 \rangle = \langle b_2^2 \rangle$. Это возможно, например, при круговом по горизонтали движении точки подвеса и не зависящих от них случайных вертикальных вибрациях. В этом случае координата ϕ – циклическая, и гамильтониан (6.2) приводится к гамильтониану системы с одной степенью свободы:

$$\bar{H} = \frac{P_\phi^2}{2} + U, \quad U = \frac{C^2}{2 \sin^2 \theta} - \cos \theta + \frac{B \sin^2 \theta}{2} \quad (8.1)$$

$$C = P_\phi = \sqrt{\frac{l}{g} \frac{d\phi}{d\tau}} \sin^2 \theta, \quad B = \langle b_3^2 \rangle = \frac{\langle v_3^2 \rangle}{gl}$$

где v_3 – вертикальная компонента скорости движения точки подвеса.

Заметим, что система приводится к такому же гамильтониану (8.1) в существенно более общем случае. В системе могут быть горизонтальные вибрации, подчиненные условиям: $\langle b_1 b_2 \rangle = \langle b_1 b_3 \rangle = \langle b_2 b_3 \rangle = 0$, $\langle b_1^2 \rangle = \langle b_2^2 \rangle$. Это возможно, например, при круговом по горизонтали движении точки подвеса и не зависящих от них случайных вертикальных вибрациях.

С точностью до постоянного множителя гамильтониан (8.1) совпадает с гамильтонианом [17], полученным методом возмущений с иным малым параметром $\sqrt{A/l}$, где A – амплитуда периодических вертикальных вибраций. Задача о равновесиях системы в [17] сведена к исследованию критических точек потенциальной энергии $\Pi(x, a, b)$, которая связана с потенциальной энергией $U(\theta, C, B)$ в (8.1) следующим образом: $U = 2B\Pi$, $x = \cos \theta$, $a = C^2/B$, $b = 1/B$. В [17] найдена бифуркационная кривая в виде $F(a, b) = 0$, разбивающая плоскость параметров a, b на две области: G_1 и G_2 . В первой области G_1 система имеет одну точку равновесия x_1 , а во второй G_2 – три точки равновесия x_1, x_2, x_3 . Функция $F(a, b)$ представляет собой многочлен шестой степени по параметру a и третьей степени по b достаточно сложного вида.

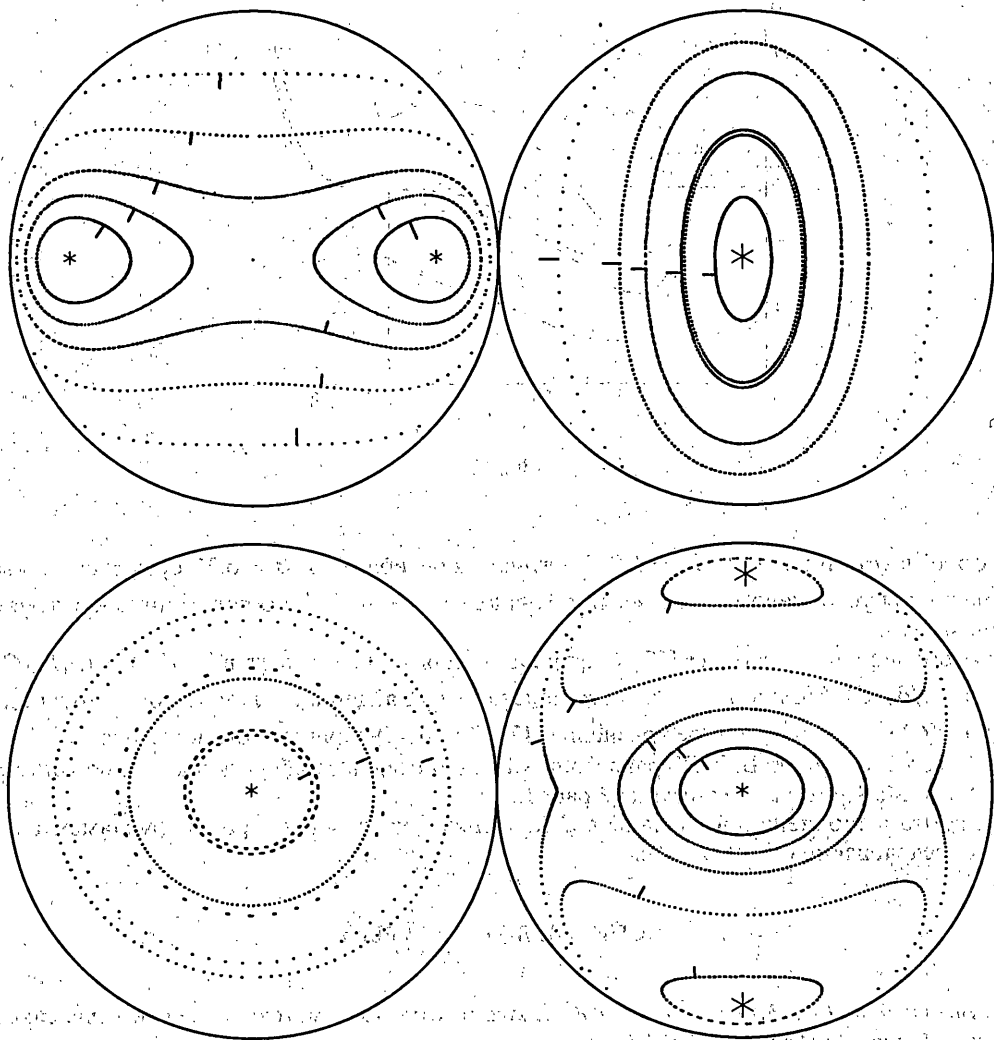
Ниже бифуркационная кривая получена в параметрическом виде $a(C), b(C)$, где $a(C), b(C)$ – элементарные функции, так что $F(a(C), b(C)) \equiv 0$.

9. Осесимметричные движения. Задача устойчивости по Ляпунову осесимметричных движений с гамильтонианом (8.1) сводится к исследованию на минимум функции U и применению теоремы Арнольда [4].

Критические точки определяются из уравнения $U'_\theta = 0$, которое удобно выразить через функцию двух переменных $f(\theta, C) = C^2/\sin^4 \theta - 1/\cos \theta$ в виде $f(\theta, C) = B$. Из решения системы двух уравнений: $f = B$, $\partial f(\theta, C)/\partial \theta = 0$ находим бифуркационную кривую $\theta = \theta_*(C)$, $B = B_*(C)$:

$$x_*(C) = \cos \theta_* = -[(C^2/2)^{1/3} + \sqrt{(C^2/2)^{2/3} + 1}]^{-1}$$

$$B_*(C) = \frac{C^2}{\sin^4 \theta_*} - \frac{1}{\cos \theta_*} = \frac{C^2}{2} + \frac{3C^{2/3}}{2^{4/3}} + \left(\frac{C^{4/3}}{2^{2/3}} + 1 \right)^{3/2}$$

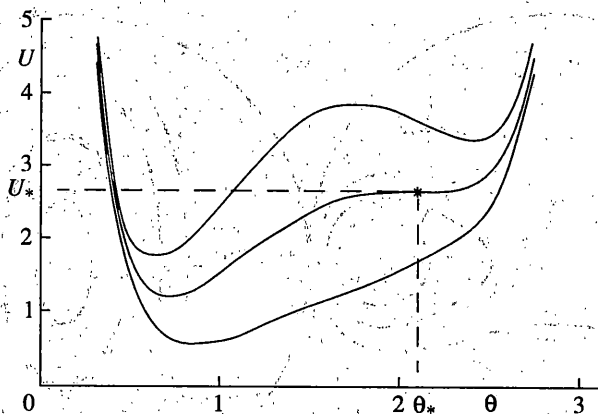


Фиг. 4

Зависимость $B_*(C)$ на отрезке $C \in (0, 1)$ близка к линейной $B_* = 2.7C + 1$. Ошибка аппроксимации не превышает 2%.

Окончательное решение задачи таково. При $B < B_*$ имеется одна критическая точка минимума $0 < \theta_1 < \pi/2$. При $B > B_*$ имеются три критические точки $0 < \theta_1 < \pi/2$, $\pi/2 < \theta_2 < \theta_*$, $\theta_* < \theta_3 < \pi$: θ_1 — точка минимума, θ_2 — точка максимума и θ_3 — точка минимума. Таким образом, при $B < B_*$ имеется одна устойчивая точка равновесия θ_1 . При $B > B_*$ имеются две устойчивые точки равновесия: θ_1, θ_3 и одна точка неустойчивого равновесия θ_2 .

На фиг. 5 изображена функция потенциальной энергии (8.1) осесимметричных движений маятника с колеблющейся точкой подвеса при $C = 1$ и трех различных значениях параметра. При $B = 1.27$ имеется одна точка минимума, соответствующая устойчивому положению равновесия. При бифуркационном значении $B = B_* = 3.77$ кроме одного устойчивого положения равновесия в точке минимума появляется



Фиг. 5

второе неустойчивое $\theta = \theta_* = 2.075$ в точке перегиба. При $B = 6.27$ существуют два положения устойчивого равновесия в точках минимума и одно неустойчивое в точке максимума.

В обозначениях работы [17] бифуркационная кривая имеет вид $a(C) = C^2/B_*(C)$, $b(C) = 1/B_*(C)$. Можно показать, что подстановка найденных элементарных функций $a(C)$, $b(C)$ в бифуркационное уравнение [17] $F(a, b) = 0$ обращает его в тождество.

Автор благодарит В.Ф. Журавлева и А.И. Нейштадта за обсуждение и замечания, а также Д.М. Климова за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00250).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. Нейштадт А.И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПИММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 197–204.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
6. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
8. Петров А.Г. Об усреднении гамильтоновых систем // Докл. АН. 1999. Т. 368. № 4. С. 483–488.
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 544 с.
10. Джакалья Г.Е. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

11. *Петров А.Г.* О движении частиц несжимаемой среды // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 12–19.
12. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
13. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 319 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
15. *Бардин Б.С., Маркеев А.П.* Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
16. *Акуленко Л.Д.* Асимптотический анализ динамических систем подверженных высокочастотным воздействиям // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 23–31.
17. *Маркеев А.П.* О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–210.

Москва

Поступила в редакцию
22.03.1999