

**СЕМИНАР ПО МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
ИМ. Л.А. ГАЛИНА
ПОД РУКОВОДСТВОМ В.М. АЛЕКСАНДРОВА**

09.04.1999 (568-е заседание). **В.В. Клиндухов** (Москва). *Осесимметричная контактная задача для двуслойного основания с неидеальной механической связью между слоями.*

Рассматриваются осесимметричные контактные задачи для двуслойного упругого основания (слой на полупространстве) в условиях неидеальной механической связи между слоями. Неидеальность возникает вследствие того, что между слоями, как правило, имеется тонкая прослойка из инородного материала. Это либо совокупность фрагментов локального разрушения поверхностей слоев, либо склеивающий слой материал. Неидеальность математически выражается тем, что вместо условий совпадения напряжений и перемещений на плоскости контакта слоев необходимо ставить на этой плоскости некоторые дифференциальные условия связи между напряжениями и перемещениями.

Приведены дифференциальные уравнения, описывающие эти связи между напряжениями и перемещениями для тонких упругих относительно жесткой и относительно мягкой прослоек. Для описанного двухслойного основания с прослойкой между слоями построены функции Грина (для случая жесткой и мягкой прослоек). Затем контактные задачи для такого основания сведены к интегральному уравнению первого рода с симметричным нерегулярным ядром относительно контактного давления между штампом и поверхностью основания. Путем модификации метода ортогональных многочленов и метода коллокации Мультиппа – Каландия разработаны два численно-аналитических способа приближенного решения этого интегрального уравнения.

23.04.1999 (569-е заседание). **И.А. Солдатенков** (Москва). *Контактное деформирование упругой композиции полуплоскость – полоса переменной ширины.*

Рассматриваются деформационные свойства композиции, состоящей из упругой полуплоскости, связанной с тонкой полосой переменной ширины. Решение для полосы, полученное с помощью конформного отображения полосы переменной ширины на полосу постоянной ширины, свивается с известными соотношениями для полуплоскости, в результате чего для рассматриваемой композиции полуплоскость – полоса выводятся зависимости граничных перемещений от контактных напряжений.

14.05.1999 (570-е заседание). **В.И. Власов, С.Л. Скороходов** (Москва). *Метод вычисления коэффициентов интенсивности напряжений.*

Представлен новый высокоэффективный метод решения уравнения Пуассона в двусвязных областях, для которых один из ограничивающих область контуров является многоугольным (и не обязательно жордановым), а другой – произвольным жорда-

новым спрямляемым контуром без внешних и внутренних заострений. Метод позволяет одновременно с получением самого решения краевой задачи находить и коэффициенты интенсивности K в угловых точках первого из указанных контуров. Проблема надежного вычисления коэффициентов интенсивности является весьма актуальной и привлекает внимание многих исследователей. То, что она далека от удовлетворительного решения, демонстрирует хотя бы тот факт, что даже известный, вошедший во многие справочники, результат Треффца ($K = 1,48$) для задачи кручения для L -образной области с прямым углом и бесконечными полками оказалось неверным; правильное значение, полученное авторами в явном аналитическом виде, дает: $K = 0,836932\dots$ Численная реализация метода (применительно к задаче Дирихле для уравнения Пуассона) в ряде конкретных областей (крест в квадрате, рама с трещинами) подтвердила его высокую эффективность и экспоненциальную скорость сходимости.

28.05.1999 (571-е заседание). **В.А. Шачнев** (Москва). *Динамическое уравнение изгиба пластины.*

В рамках линейной теории упругости получено уравнение изгиба для изображения по Фурье и Лапласу срединной плоскости изотропного бесконечного слоя, нагруженного по внешним поверхностям слоя нормальной и касательной нагрузками. Обращение изображения асимптотическим путем приводит к гиперболическому дифференциальному уравнению для средней плоскости слоя. Получены соотношения, связывающие изгибающий и крутящий моменты, перерезывающие силы с прогибами срединной плоскости.

08.10.1999 (572-е заседание). **А.А. Ляпин** (Ростов-на-Дону). *Динамика слоистых сред с произвольно расположенными неоднородностями.*

Рассмотрены вопросы возбуждения и распространения упругих волн в слоистом полупространстве (или пакете слоев), а также взаимодействия волн с локализованными неоднородностями. Для анализа соответствующих краевых задач динамики слоистых сред предложен комплекс аналитических методов, а именно: метод сведения задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для полостей и включений, целиком погруженных в отдельный слой или полупространство структуры, асимптотический метод построения решений для относительно сильно заглубленных дефектов, метод ГИУ исследования задач для слоистых сред с цилиндрическими дефектами произвольной формы и произвольным расположением (включая пересечение границ раздела сред). Построены решения ряда конкретных задач о колебаниях многослойного полупространства со сферическими и горизонтальными цилиндрическими полостями в двумерной и пространственной постановках. Дан численный анализ результатов по влиянию строения среды, формы полости и ее расположения на распределение волновых полей в области.

22.10.1999 (573-е заседание). **Г.И. Колосов** (Москва). *Флаттер составных оболочечных конструкций из композиционных материалов.*

Предложен метод численного анализа условий возникновения повышенных вибраций оболочечных конструкций, выполненных из композиционных материалов и усиленных в ряде промежуточных сечений бандажными кольцами. При построении математической модели использована классическая теория ортотропных оболочек и линейное стационарное приближение поршневой теории, учитывалось изменение

газодинамических параметров потока и жесткостных параметров конструкции вдоль образующей. Исследована динамическая устойчивость ряда слоисто-волоконистых конических оболочек и изотропных конических оболочек с бандажным подкреплением при истечении сверхзвукового газового потока.

Представлена методика исследования свободных колебаний слоисто-волоконистых оболочек вращения с анизотропией общего вида. Проведено сравнение основных частот и форм собственных свободных колебаний одно-, двух-, трех- и многослойных оболочек из высокомодульного графито-эпоксидного композита по гетерогенной и гомогенной моделям, позволившее оценить погрешности, возникающие при переходе от одной из расчетных моделей к другой.

19.11.1999 (574-е заседание). **В.В. Сильвестров** (Чебоксары). *Краевые задачи теории упругости для тел с бесконечным множеством сингулярностей.*

Рассмотрены основные плоские и антиплоские краевые задачи теории упругости для однородной изотропной плоскости со счетным множеством разрезов, расположенных по всей прямой или только на луче, в частности расположенных периодически на всей прямой или только на луче, причем в двух последних случаях краевые условия, заданные на берегах разрезов, являются, вообще говоря, непериодическими (например, они все нулевые, кроме условий, заданных на берегах какого-нибудь одного разреза). В окрестности бесконечно удаленной точки исходные данные задачи и искомые напряжения либо ограничены, либо убывают по определенному закону. Методом краевой задачи Римана для счетного множества контуров получены явно аналитические решения задач, формулы для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), исследовано напряженное состояние и асимптотика КИН для разрезов, расположенных в окрестности бесконечно удаленной точки. Рассмотрены примеры, получены числовые расчеты КИН. Изучен случай сгущения сингулярностей в конечной точке. Рассмотрена кусочно-однородная плоскость с бесконечным множеством закрытых трещин, расположенных на линии раздела сред. Изучены смешанные задачи для полуплоскости в случае бесконечного множества точек смены типа граничных условий.

03.12.1999 (575-е заседание). **В.М. Александров** (Москва). *Устойчивость покрытия на упругом основании при продольном сжатии.*

Исследована задача об устойчивости бесконечной пластины (покрытия) под действием продольного усилия, находящейся в условиях цилиндрического изгиба в двухстороннем контакте без трения с упругим слоем (подложкой), защемленным по основанию. При приближении свойств материала слоя к несжимаемому установлен эффект существенного снижения величины критического усилия по сравнению с критическим усилием, рассчитанным с заменой упругого слоя эквивалентным основанием Фусса – Винклера.

17.12.1999 (576-е заседание). **Н.Н. Рогачева** (Москва). *Теория слоистых электроупругих пластин симметричного строения по толщине.*

В большинстве работ теория слоистых электроупругих пластин строится путем принятия некоторых гипотез, позволяющих упростить трехмерные уравнения электроупругости и получить теорию электроупругих пластин. Как правило, для механических искомых величин – напряжений, деформаций, перемещений, принимают известные гипотезы Кирхгоффа, используемые при построении теории упругих пластин.

Для электрических искомым величин – электрического потенциала, вектора электрической индукции, вектора напряженности электрического поля, разные авторы принимают без обоснования разные гипотезы, причем в подавляющем большинстве работ гипотезы для электрических величин не зависят от вида электрических граничных условий на лицевых поверхностях электроупругих слоев. Такой подход к формулировке гипотез для электрических величин, вообще говоря, неверен, так как при сведении трехмерных уравнений к двумерным граничные условия на лицевых поверхностях оказывают существенное влияние на получаемые в результате сведения двумерные уравнения теории пластин. В данной работе теория слоистых электроупругих пластин (пластина составлена из упругих и электроупругих слоев) построена асимптотическим методом интегрирования системы дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, без использования каких бы то ни было гипотез. Асимптотический анализ позволил оценить используемые в различных работах гипотезы. Проведено сравнение построенной теории с теориями других авторов. В качестве примера выполнен численный расчет электроупругого состояния круглой трехслойной пластины, совершающей вынужденные гармонические колебания. Выполнен анализ зависимости коэффициента электромеханической связи от различных параметров – частоты колебаний, толщин упругих и электроупругих слоев, материалов слоев, формы и размера электродов, покрывающих лицевые поверхности электроупругих слоев.

24.12.1999 (577-е заседание). **И.А. Солдатенков** (Москва). *Плоская контактная задача теории упругости для изнашиваемого покрытия.*

Рассмотрена задача теории упругости для полосы переменной ширины с заданными граничными перемещениями. Напряженно-деформированное состояние полосы задается с помощью представления Папковича – Нейбера. После конформного отображения исходной полосы на полосу постоянной ширины получена система интегральных уравнений, решение которой строится приближенно в предположении, что границы исходной полосы слабо отличаются от прямых.

На основе полученного решения выводятся соотношения между граничными перемещениями и контактными напряжениями для композиции полоса переменной ширины – упругое основание. Эти соотношения затем используются для постановок различных износосеконтактных задач для тел с покрытиями.

11.02.2000 (578-е заседание). **А.С. Козицын** (Москва). *Влияние электромагнитных полей на несимметрию тензора напряжений в теории упругости.*

В случае воздействия постоянного электрического или магнитного поля на жестко-магнитный материал или электрет тензор напряжений является несимметричным. При некоторых дополнительных предположениях о характере внешних полей становится возможным найти соотношения между тензором напряжений и тензором дилатации. Эти соотношения позволяют поставить граничные задачи в напряжениях и перемещениях, причем постановка в напряжениях может быть сведена к математически корректной задаче. Для этих постановок имеют место ряд основных теорем механики: теорема единственности, теоремы о внутренней энергии. Особый интерес представляет плоская задача. Для нее оказывается возможным построить функцию напряжений. Решение задачи о концентрации напряжений на границе кругового отверстия в бесконечной пластине, находящейся в состоянии одноосного растяжения, в предложенной постановке дает в пределе при стремлении моментов к нулю хорошо известное решение задачи Кирша. Учет моментов уменьшает коэффициент концентрации на границе отверстия.

25.02.2000 (579-е заседание). **В.С. Никишин** (Москва). *Осесимметричная стационарная динамическая задача о движении круговой трещины поперечного сдвига по границе раздела слоя и полупространства.*

Дается точное аналитическое решение осесимметричной стационарной динамической задачи теории упругости о движении с произвольной постоянной скоростью $v = c$ круговой трещины поперечного сдвига ($0 \leq r + ct \leq a + ct$, $a \geq 0$) по границе раздела слоя произвольной толщины H ($0 \leq z \leq H$) и полупространства ($z \leq 0$) с произвольными упругими и скоростными характеристиками. На скользящих друг по другу без отрыва берегах трещины задаются произвольные симметрично приложенные касательные напряжения, а осевые нормальные напряжения и перемещения сохраняют непрерывность. Вне трещины ($z = 0$, $a + ct < r + ct < \infty$) в условиях жесткого сцепления слоя и полупространства сохраняется непрерывность нормальных и касательных напряжений, осевых и радиальных перемещений. Для обеспечения математической постановки и решения этой смешанной задачи сначала строятся через биволновые потенциалы в форме интегралов Ханкеля отдельные базовые решения первой основной краевой задачи теории упругости для слоя и полупространства при произвольных нормальных и касательных нагрузках на их контактирующих граничных поверхностях. На этой основе дается математическая постановка и решение смешанной краевой задачи, которая сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным симметричным ядром на конечном отрезке. В результате определяются осевые напряжения на всей границе раздела слоя и полупространства ($z = 0$, $0 \leq r + ct < \infty$), касательные напряжения вне трещины ($z = 0$, $a + ct \leq r + ct < \infty$) и скачок радиальных перемещений на берегах трещины ($z = 0$, $0 \leq r + ct \leq a + ct$).

10.03.2000 (580-е заседание). **Н.Н. Рогачева** (Москва). *Теория слоистых электроупругих пластин произвольного строения по толщине.*

Асимптотическим методом построена теория слоистых пластин, составленных из упругих и электроупругих слоев. Показано, что каждое из двумерных соотношений электроупругости для сил и моментов одновременно содержит компоненты тензора как тангенциальной, так и изгибной деформации. В рассмотренном случае задача не разделяется на плоскую задачу и задачу изгиба, как в случае слоистой плиты симметричного строения. Полученную задачу удалось упростить в результате введения выбранной специальным образом нейтральной плоскости пластины и асимптотического анализа электроупругого поведения пластины. Полное электроупругое состояние пластины удалось расчленить на квазипоперечное, в котором прогибы значительно больше тангенциальных перемещений, квазитангенциальное, в котором тангенциальные перемещения значительно больше прогибов, и частное электроупругое состояние, отвечающее электрической и механической нагрузке. Метод расчленения продемонстрирован на решении следующих задач:

1) рассмотрена статическая и динамическая задачи для двуслойной балки, вычислены все искомые величины, показано, что тангенциальная нагрузка одновременно с растяжением вызывает изгиб балки, а изгибная нагрузка помимо изгиба вызывает растяжение балки; 2) выполнен расчет двуслойного круглого деформируемого зеркала, проанализирована зависимость коэффициента электромеханической связи от частоты колебаний.

24.03.2000 (581-е заседание). **М.В. Зернин** (Брянск). *Расчетно-экспериментальная оценка долговечности подшипников скольжения по системе критериев взаимодействия и повреждения поверхностей трения.*

Материал в подшипниках скольжения (ПС) подвержен комплексу воздействий, вследствие которых могут проявляться повреждения различных видов. Для анализа

условий взаимодействия поверхностей трения развиваются алгоритмы метода конечных элементов (МКЭ) для следующих задач: о течении жидкости в зазоре; о контактном взаимодействии поверхностей с учетом нелинейных свойств "третьего тела"; о распределении температур и напряжений.

Предложена методика расчетной оценки долговечности ПС, учитывающая одновременное протекание процессов усталостного (объемного) повреждения и процессов износоконтактных повреждений. Методика основана на пространственной и временной дискретизации процессов накопления повреждений различного вида в объекте с неоднородным полем внешних воздействий. В отдельных участках нагруженного объема вычисляются уровни накопленных повреждений от усталости и от различных видов износа с применением различных моделей этих процессов. Предложено использовать гипотезы, позволяющие применять простейшие формулы теории вероятности для оценки поврежденности групп участков, связанных некоторыми условиями совместности изнашивания, и таких характеристик усталостной поврежденности, как вероятность зарождения короткой трещины (первой и любой последующей), вероятность зарождения макротрещины (первой и любой последующей) и т.п. Такая расчетная методика позволяет оценивать поврежденность ПС по многим критериям, применяемым на практике. Предложены основы приближенной оценки взаимодействия различных процессов повреждения. Например, взаимного влияния изнашивания и усталостного повреждения от циклических объемных нагрузок.

07.04.2000 (582-е заседание). **А.Д. Шамровский** (Запорожье). *Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости.*

Рассматривается синтез теории инвариантно-групповых решений дифференциальных уравнений и асимптотического анализа. Показано, что такой синтез возможен при использовании специального варианта теории групп, в котором дифференциальные уравнения интерпретируются как алгебраические. Асимптотический анализ при этом производится с использованием формального малого параметра. В таком случае асимптотические методы естественным образом формулируются на языке теории групп; получаемые результаты содержат, как частный случай, известные ранее результаты, основанные на использовании теории групп Ли и асимптотических методов с использованием естественных малых параметров.

Синтез теории групп и асимптотического анализа позволяет алгоритмизировать процесс поиска параметров асимптотического интегрирования и выполнять этот поиск на компьютере.

Последовательное применение предлагаемой методики позволяет сводить к минимуму количество проверяемых асимптотических оценок и естественным образом строить процедуры последовательных приближений.

Во многих случаях использование добавочных групповых свойств, возникающих за счет асимптотического анализа, позволяет, путем построения инвариантно-групповых решений, доводить до логического конца решение реальных краевых задач.

В качестве примеров рассмотрен асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости в декартовой и криволинейной ортогональной системах координат. На основе этого анализа получены различные варианты дифференциальных уравнений пластин и оболочек.

28.04.2000 (583-е заседание). **Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров** (Москва). *Обобщенные краевые задачи и определение коэффициента Пуассона резонансным методом.*

Формулируются основные результаты, полученные при использовании численно-аналитического метода ускоренной сходимости для решения обобщенной задачи Штурма – Лиувилля в том случае, когда собственное число входит нелинейно в коэф-

фициенты дифференциального уравнения. Вариационным методом выводится уравнение Лява, описывающее продольные колебания неоднородного стержня и учитывающее конечную инерцию (поправку Релея). Полученные формулы используются для анализа спектра собственных частот. Экспериментально измеренные собственные (резонансные) частоты использовались для определения коэффициента Пуассона различных образцов (сталь, латунь, титан, алюминий, феррит). Проведено сравнение измеренных коэффициентов Пуассона резонансным методом с известными в научной литературе данными, а также с измерениями на машине "Instron". Установлено достаточно хорошее совпадение, что свидетельствует об эффективности теоретического подхода и резонансного метода для нахождения коэффициента Пуассона методами неразрушающего контроля.

19.05.2000 (584-е заседание). **И.Г. Горячева** (Москва). *Исследование изменения напряженного состояния тел при фреттинге.*

Предложен метод аналитического исследования изменения напряженного состояния и формы изнашиваемых поверхностей при фреттинге в условиях частичного проскальзывания поверхностей в области контактного взаимодействия. Метод базируется на введении двух масштабов времени: времени одного цикла изменения тангенциальной нагрузки и времени, которое соответствует заданному числу циклов. Для оценки формоизменения поверхности при изнашивании используется закон Арчарда. Эволюция контактных напряжений, размера области контакта и величины зазора рассчитывается с применением пошагового алгоритма. Получены аналитические выражения для расчета асимптотических значений напряжений и формы изношенной поверхности. В качестве примера приведено исследование кинетики изменения напряженного состояния в контакте с упругим полупространством параболического индентора, а также индентора, имеющего форму штампа с плоским основанием и закругленными кромками.

02.06.2000 (585-е заседание). **Г.А. Иосифьян** (Москва). *Об усреднении некоторых контактных задач теории упругости в перфорированных областях.*

Рассматривается периодически перфорированное упругое тело с периодом перфорации, характеризуемым малым параметром. Ячейка периодичности может состоять из материалов с разными упругими свойствами. На внешней части границы тела ставятся условия жесткого закрепления, а на части поверхности полостей (или каналов) задаются нелинейные краевые условия, описывающие различные типы контакта. Задачи формулируются в обобщенной постановке, т.е. в виде вариационных неравенств на соответствующих множествах допустимых перемещений. Изучается асимптотическое поведение решений при стремлении к нулю периода ячейки. В зависимости от вида граничных условий на полостях и геометрии множества, на котором они заданы, строится предельная (усредненная) задача и предельное множество допустимых перемещений. Изучается зависимость усредненного лагранжиана от краевых условий. Выявлены случаи, когда усредненный лагранжиан не может быть представлен в виде квадратичной формы на пространстве линеаризованных тензоров деформации, что обусловлено нелинейностью граничных условий. Исследование проводится методом двухмасштабной сходимости, который возник примерно десять лет назад и нашел многочисленные применения в теории усреднения.