

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, **И.И. КАРПОВ**, С.В. НЕСТЕРОВ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ С РЕЗКО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Излагаются численно-аналитический метод и вычислительный алгоритм ускоренной сходимости для определения собственных частот и форм колебаний прямоугольной мембраны с закрепленной границей. Предполагается, что плотность распределения массы и сил поверхностного натяжения мембраны могут резко и существенно изменяться. Для определенности приведены расчеты низшей моды колебаний в случае квадратной мембраны с постоянным поверхностным натяжением и неоднородностью специального вида. Неоднородность моделируется двумя взаимно ортогональными полосками, образующими фигуру типа "крест" и различные ее модификации (сдвинутый или несимметричный "крест", "угол", "Т-образная" фигура). Параметры, определяющие значения функции плотности (величина, ширина и место пересечения полосок), изменялись в широких пределах. Проведено численное исследование искомого характеристик колебаний мембраны; обнаружены и прокомментированы интересные механические эффекты.

Исследования задач о поперечных колебаниях плоской мембраны в различных постановках представляют значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. В их основе, как правило, лежит конструктивное решение соответствующих задач на собственные значения и функции, что позволяет строить конечномерные динамические модели. Специальный интерес представляет проблема высокоточного определения частот и форм низших мод колебаний в зависимости от механических свойств мембраны. Низшие моды определяют качество функционирования системы, содержащей в качестве рабочей поверхности натянутую мембрану. Высшие моды обычно имеют сравнительно небольшие амплитуды и затухают значительно быстрее, чем низшие. Классические результаты для однородных равномерно натянутых мембран различных форм (прямоугольной, круговой, кольцевой, секториальной, эллиптической; треугольной и т.п.) изложены в [1–5].

Существенные трудности представляет исследование и вычисление частот и форм низших мод колебаний в общем случае переменных по поверхности мембраны плотности и натяжения. Для грубой оценки указанных характеристик колебаний широко используются численные методы Рэлея–Ритца [1, 3–5] и конечных элементов [6, 7]. Имеются отдельные постановки задач и их решения в специальных функциях (например, для круговых мембран с кусочно-постоянной или другой простого вида радиальной неоднородностью [8]).

Авторами [9] предложен эффективный численно-аналитический метод расчета собственных частот и форм колебаний неоднородной прямоугольной мембраны с закрепленной границей. Разработанный подход содержит предположение, что поверхностная плотность может быть приближенно аппроксимирована суммой двух функций, каждая из которых зависит от одной координаты, а невязка есть относительно малая величина, которая учитывается методом возмущений. Рассматриваемый класс мембран является достаточно широким и содержательным, а соответствующие исследования представляют методический и прикладной интерес. Для проверки работоспособности были проведены расчеты модельных примеров [9].

Предлагается ниже решение содержательной задачи о колебаниях мембраны, плотность которой резко и существенно изменяется по каждой из координат, а

неоднородность представляет собой фигуру типа "крест". Такая модель может встретиться в технических приложениях (космический парус, крупногабаритная антенна и т.п.). Указанные участки неоднородности в виде прямоугольных полос могут быть вызваны технологическими причинами для придания конструкции нужной формы или использоваться как соединяющие элементы.

1. Постановка задачи о собственных колебаниях неоднородной мембраны. Рассмотрим задачу определения частот и форм колебаний прямоугольной равномерно натянутой мембраны с закрепленной границей [1-5]:

$$\Delta u + \lambda r(x_1, x_2)u = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Pi \setminus \Gamma, \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Pi = \{x_1, x_2 : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \quad \lambda = \sigma \omega^2 / T$$

Здесь Δ – оператор Лапласа по декартовым координатам $(x_1, x_2) \in \Pi$, Π – прямоугольная область с границей Γ , l_1, l_2 – ее линейные размеры, λ – параметр, σ – характерная величина поверхностной плотности, T – поверхностное натяжение, ω – частота, ω^2 – постоянная разделения временной и пространственных переменных [9]. Далее предполагается, что уравнение (1.1) и граничные условия записаны в безразмерных переменных: функция нормирована на любую характерную величину, а переменные x_1, x_2 и параметры – на удобный линейный размер (например, на l_1 , или l_2 , $\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ или $|l_1| + |l_2|$ и т.п.), тогда $\sigma \rightarrow \sigma l^2$. Итак, будем считать уравнения (1.1) представленными в безразмерных переменных.

Предполагается, что функция r , определяющая переменную поверхностную плотность мембраны, является произвольно кусочно-гладкой, обладающей следующими структурными свойствами [9]:

$$r(x_1, x_2) = r_0(x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2), \quad 0 < r^- \leq r(x_1, x_2) \leq r^+ < \infty$$

$$r_0(x_1, x_2) = r_1(x_1) + r_2(x_2), \quad 0 < r_0^- \leq r_0(x_1, x_2) \leq r_0^+ < \infty$$

$$M_0 \equiv \iint_{\Pi} r_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \geq \iint_{\Pi} |\rho(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 \equiv \delta M. \quad (1.2)$$

Соотношения (1.2) имеют ясный механический смысл: функция r поверхностной плотности близка по интегральной мере (массе M) к аддитивной по каждой переменной функции r_0 . Функция ρ , описывающая отклонения от такого распределения, по абсолютной величине может быть сравнимой с r_0 , однако масса M мембраны распределена, в основном, согласно r_0 . Без ограничения общности можно считать, что интеграл от ρ по Π равен нулю, т.е. среднее $\langle \rho \rangle = 0$; $M = M_0$. Если $\langle \rho \rangle \neq 0$, то можно ввести функцию $\rho_* = \rho - \langle \rho \rangle$, а ρ прибавить к r_0 . Отметим, что в частном случае $r_1 \equiv 0$ или $r_2 \equiv 0$ и, кроме того, знакоопределенности от r_1 или от r_2 не требуется: существенно выполнение строгой положительности r_0, r согласно (1.2).

Ставится задача определения собственных частот и форм колебаний мембраны, описываемой краевой задачей на собственные значения λ и функции $u(x_1, x_2, \lambda)$ (из выражений (1.1), (1.2)). Основное внимание уделяется эффективному высокоточному вычислению указанных характеристик для низших мод колебаний, представляющих специальный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Искомое решение задачи может быть построено приближенно сколь угодно точно (с относительной погрешностью порядка $(\delta M/M)^2$) при достаточно малом δM на основе системы собственных значений λ^0 и функций $u^0(x_1, x_2, \lambda^0)$ порождающей (невозмущенной) задачи при $\rho \equiv 0$. Невозмущенные собственные значения и функции строятся далее с помощью метода ускоренной сходимости [9, 10], основанного на предварительном определении грубых оценок методом Рэлея–Ритца; итерационном алгоритме уточнения, обладающем квадратичной сходимостью по отношению к величине начальной погрешности, и процедуры продолжения по параметрам задачи. Как отмечалось ранее, высокоточные

расчеты проводятся для специального класса функций $r_{1,2}(x_1, x_2)$ близких к кусочно-постоянным.

Отметим, что общая теория задачи Штурма–Лиувилля типа (1.1) достаточно хорошо разработана в классических работах (теория Шмидта [1]), доказаны соответствующие теоремы существования счетной системы положительных λ_k . Установлены факты возможной вырожденности (кратности) собственных значений, полноты системы функций и другие результаты.

2. Схема построения порождающего решения с помощью метода ускоренной сходимости. Невозмущенная задача (1.1), (1.2) (при $\rho \equiv 0$) допускает разделение переменных x_1, x_2 посредством стандартной подстановки $u = u_1(x_1)u_2(x_2)$ (индекс вверху не пишется для краткости)

$$u_1'' + (\lambda r_1(x_1) - \mu)u_1 = 0, \quad u_1(0) = u_1(l_1) = 0 \quad (2.1)$$

$$u_2'' + (\mu + \lambda r_2(x_2))u_2 = 0, \quad u_2(0) = u_2(l_2) = 0$$

Здесь μ – параметр разделения, который совместно с λ ($\lambda > 0$) и u_1, u_2 подлежит определению из системы двух связанных задач на собственные значения и функции. Стандартные методы решения задач с не полностью разделяющимися параметрами в научной литературе отсутствуют, см. [9], поскольку оно обусловлено принципиальными и вычислительными трудностями. Для их выявления приведем следующие естественные построения. Пусть имеет место отмеченный выше частный случай $r_2(x_2) = r_2 = \text{const}$; тогда из второй задачи (2.1) находим линейную связь между λ и μ . С учетом этой связи для u_1 получим соотношения

$$u_1'' + (\lambda(r_1(x_1) + r_2) - v_{2m}^2)u_1 = 0, \quad u_1(0) = u_1(l_1) = 0 \quad (2.2)$$

$$\mu + \lambda r_2 = v_{2m}^2 \equiv (\pi m / l_2)^2 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

описывающие для каждого значения m стандартную задачу Штурма–Лиувилля относительно $\lambda_{nm} = \lambda_n(v_{2m})$ и $u_1 = u_{1nm}(x_1) = u_{1n}(x_1, v_{2m})$ ($n = 1, 2, \dots$).

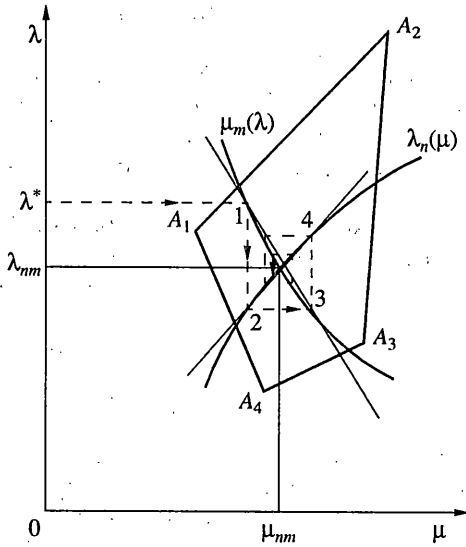
Ее решение строится существенно проще с помощью известных подходов [1–5]; особенно эффективно применение метода ускоренной сходимости [10]. Аналогичные построения проводятся в случае, если $r_1(x_1) = r_1 = \text{const}$. Таким образом, в рассмотренной ситуации происходит полное разделение краевых задач, так как после определения λ_{nm} находим, согласно (2.2), $\mu_{nm} = v_{2m}^2 - \lambda_{nm}r_2$; собственные функции $u_{1nm}(x_1)$, находятся элементарно интегрированием задачи Коши, а функции $u_2 = u_{2nm}(x_2) = c_{2m} \sin v_{2m} x_2$ не зависят от индекса n .

Совсем иная ситуация имеет место в общем случае системы (2.1). Рассуждая подобным образом, можно, например, из второй задачи определить семейство решений $\mu_m(\lambda), u_2(x_2, \mu_m(\lambda), \lambda)$, зависящих от параметра $\lambda > 0$. Затем, подставляя $\mu_m(\lambda)$ в первую задачу (2.1), получим следующую:

$$u_1'' + [\lambda(r_1(x_1) + r_2) - \mu_m(\lambda)]u_1 = 0, \quad u_1(0) = u_1(l_1) = 0 \quad (2.3)$$

Однако $\mu_m(\lambda)$ – нелинейная функция (она линейна лишь при $r_2 = \text{const}$, см. выше), определяемая приближенно аналитически или численно; поэтому соотношения (2.3) определяют обобщенную задачу Штурма–Лиувилля; соответствующий оператор не является самосопряженным. Для ее эффективного решения требуется разработка специального подхода [11], основанного на методе ускоренной сходимости. Этот прием естественно применить тогда, когда функции $\mu_m(\lambda)$ определяются сравнительно просто. В противном случае требуется построить решения двух семейств краевых задач и определить общую точку (λ_{nm}, μ_{nm}) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_n(\mu), \quad \mu = \mu_m(\lambda); \quad \lambda = \lambda_m(\mu_m(\lambda)), \quad (\lambda, \mu) \in S_{nm} \\ \lambda &= \lambda_{nm} = \text{Arg}_\lambda[\lambda - \lambda_n(\mu_m(\lambda))], \quad \mu_{nm} = \mu_m(\lambda_{nm}) \end{aligned} \quad (2.4)$$



Фиг. 1

Вычислительные затраты, связанные с реализацией этого приема, существенно зависят от области значений S_{nm} параметров μ и λ , в которой придется строить функции $\lambda_n(\mu)$ и $\mu_m(\lambda)$ согласно (2.4). Грубые оценки области S_{nm} , имеющей форму четырехугольника $A_{1,2,3,4}$ получаются на основе величин $r_{1,2}^{\pm}$ — максимальных и минимальных значений функций $r_{1,2}(x_{1,2})$ при $0 \leq x_{1,2} \leq l_{1,2}$ [9]. Напомним, что в силу построения системы (2.1) имеет место неравенство $r_1^- > r_2^+$. Характерная форма области S_{nm} и графическая иллюстрация соотношений (2.4) представлены на фиг. 1. Отметим, что при $r_1 = \text{const}$ или $r_2 = \text{const}$ эта область вырождается в прямолинейный отрезок (A_1A_2 или A_2A_3). Практические приемы построения функций $\lambda_n(\mu)$, $\mu_m(\lambda)$ и решения системы (2.1) предполагают использование процедуры продолжения по параметрам μ и λ и экстраполяции различных порядков (обычно линейной) с целью приближенного вычисления искомой точки пересечения (λ_{nm}, μ_{nm}) . В качестве начального приближения $\lambda_{nm}^{(0)}$ естественно воспользоваться оценкой λ_{nm}^* сверху по методу Рэля–Ритца [1, 3, 4, 9, 10]. Эти приемы и их модификации реализованы ниже при конкретных расчетах характеристик низшей моды колебаний.

3. Расчетная модель мембраны с резко изменяющейся поверхностной плотностью. Если функция плотности $r(x_1, x_2)$ изменяется плавно и сравнительно слабо, то удовлетворительные результаты могут быть получены известными хорошо разработанными методами Рэля–Ритца [1, 3–5], конечных элементов [6, 7] и др. В случае, когда функции $r_{1,2}(x_1, x_2)$ меняются резко и сильно, использование этих методов весьма проблематично. Эффективные высокоточные массовые расчеты удается осуществить на основе описанного в п. 2 подхода, см. [9–11]. Для определенности рассмотрим функцию $r(x_1, x_2)$ вида (1.2) при $\rho \equiv 0$, описываемую соотношениями, содержащими 14 произвольных параметров

$$r(x_1, x_2) = r_1(x_1) + r_2(x_2), \quad 0 \leq x_{1,2} \leq l_{1,2} \quad (3.1)$$

$$r_i(x_i) = \rho_i + h_i \left(\text{th} \frac{x_i - a_i}{\delta_i} - k_i \text{th} \frac{x_i - b_i}{\delta_i} \right) \quad (i=1,2)$$

Здесь $l_i, \rho_i, h_i, k_i, a_i, b_i, \delta_i$ — постоянные параметры, удовлетворяющие условию положительности функции r , для $(x_1, x_2) \in \Pi$. Предполагается, что все параметры по величине порядка единицы, кроме $\delta_i, 0 < \delta_i \ll 1$. В пределе при $\delta_i \rightarrow +0$ функции r_i стремятся к ступенчатым (кусочно-постоянным функциям), имеющим от одного до трех участков постоянства различного уровня. Функция $r(x_1, x_2)$ имеет от одной до девяти (точнее, 1, 2, 3, 4, 6, 9) прямоугольных областей кусочно-постоянных значений. В частности, при $0 < a_i < b_i < l_i, k_i = 1$, и достаточно малых значениях δ_i функция $r = \rho_1 + \rho_2 = \rho$ вне крестообразной области $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i=1,2$), а внутри этой области $r = \rho + 2h_i$ для непересекающихся частей и $r = \rho + 2h$, $h = h_1 + h_2$ в области пересечения ($a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i=1,2$)). Значения функции $r(x_1, x_2)$ в области Π , для произвольных k_i удобнее представить в виде таблицы, в которой $h_i^{\pm} = h_i(1 \pm k_i), h^{\pm} = h_1^{\pm} + h_2^{\pm}$.

l_2			
x_2	$\rho - h_1^- + h_2^-$	$\rho + h_1^+ + h_2^-$	$\rho + h^-$
b_2	$\rho - h_1^- + h_2^+$	$\rho + h^+$	$\rho + h_1^- + h_2^+$
a_2	$\rho - h^-$	$\rho + h_1^+ - h_2^-$	$\rho + h_1^- - h_2^-$
0	a_1	b_1	$x_1 \quad l_1$

Отметим, что $h_i^- = h^- = 0$ при $k_i = 1$, см. выше. Для определенности будем проводить расчеты собственных колебаний мембраны при этих значениях k_i и сравнительно малых значениях $(b_i - a_i)$, $l_i = 1$ и $\delta_i = 10^{-2}$, что соответствует узким полоскам, образующим фигуру "крест". Параметр $\rho = \rho_1 = 1$; $\rho_2 = 0$ без ограничения общности, а значения параметров $h_1 = h_2$ изменяются в широких пределах, удовлетворяющих условию положительности $r(x_1, x_2)$. Указанные полоски могут быть расположены в любом месте прямоугольника: $0 \leq a_i \leq b_i$, $(b_i + a_i)/2 \leq 1$. Более полные числовые данные приводятся и комментируются в следующих п. 4, 5, где излагаются алгоритм, программа расчетов и результаты вычислений собственного значения λ_{11} и функции $u_{11}(x_1, x_2)$ для широкой области изменения определяющих параметров.

4. Краткое описание алгоритма и программы расчетов. Изложим весьма кратко рекуррентный алгоритм приближенного с требуемой точностью решения задачи (2.1), (3.1) на основе метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметрам. Для определенности рассмотрим низшую моду колебаний λ_{11} , $u_{11}(x_1, x_2)$ и, для краткости, будем опускать индексы $n = m = 1$.

На предварительном этапе предполагается вычисленной оценка $\lambda^{(0)}$ задачи (1.1), (3.1) при некотором фиксированном векторе параметров системы. С помощью принципа Рэлея получим оценку сверху

$$0 < \lambda < \lambda^{(0)} = \lambda^* = \frac{\iint_{\Pi} (\nabla \Psi)^2 dx_1 dx_2}{\iint_{\Pi} r(x_1, x_2) \Psi^2 dx_1 dx_2}, \quad \Psi(x_1, x_2)|_{\Gamma} = 0 \quad (4.1)$$

Здесь $\Psi = \Psi(x_1, x_2)$ — непрерывно дифференцируемая (пробная) функция, удовлетворяющая крайевым условиям и дополнительным условиям выпуклости (вверх или вниз), соответствующей симметрии или несимметрии и т.п. Она выбирается из удобства вычислений и из общих физических представлений, например, в виде $\sin(\pi x_1/l_1) \sin(\pi x_2/l_2)$, $x_1 x_2 (l_1 - x_1)(l_2 - x_2)$ и аналогичном, с учетом распределения массы $r(x_1, x_2)$. Отметим, что при $h_{1,2} = 0$ тригонометрическое представление пробной функции является точным ($r \equiv 1$); в этом случае получим из (1.1), (3.1) или из (4.1) точное собственное значение $\lambda = \pi^2 (l_1^{-2} + l_2^{-2})$. Для $|h_{1,2}| \ll 1$ это будет приближенная оценка сверху или снизу в зависимости от поведения функций r при $h_{1,2} \neq 0$.

Подставим найденную оценку $\lambda^{(0)}$ (4.1) во второе уравнение (2.1) и будем строить решение краевой задачи для μ , u_2 . С помощью принципа Рэлея найдем оценку сверху $\mu^* = \mu^{(0)}(\lambda^{(0)})$ (и, в частности, для $h_2 = 0$ точное значение)

$$\mu(\lambda^{(0)}) < \mu^* = \mu^{(0)}(\lambda^{(0)}) = \int_0^{l_2} [\Psi_2'^2 - \lambda^{(0)} r_2(x_2) \Psi_2^2(x_2)] dx_2 / \int_0^{l_2} \Psi_2^2(x_2) dx_2$$

$$\Psi_2(0) = \Psi_2(l_2) = 0, \quad (\mu(\lambda^{(0)}) = (\pi/l_2)^2, \quad h_2 = 0, r_2 \equiv 0) \quad (4.2)$$

Затем оценки $\mu^{(0)}(\lambda^{(0)})$ уточняются с помощью рекуррентного алгоритма ускоренной сходимости [9, 10]. Алгоритм сводится к интегрированию задачи Коши для

известного на предыдущем шаге значения $\mu^{(j)}(\lambda^{(0)})$, определению первого нуля $\xi_2^{(j)}$ функции $v_2(x_2, \mu^{(j)})$ и уточнению значения μ :

$$\begin{aligned} v_2'' + (\mu^{(j)} + \lambda^{(0)})r_2(x_2)v_2 &= 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) = 1 \\ \xi_2^{(j)} &= \arg_{x_2} v_2(x_2, \mu^{(j)}), \quad \varepsilon_2^{(j)}(\lambda^{(0)}) = l_2 - \xi_2^{(j)}(\lambda^{(0)}) \\ \mu^{(j+1)}(\lambda^{(0)}) &= \mu^{(j)}(\lambda^{(0)}) - \varepsilon_2^{(j)}(\lambda^{(0)})v_2'^2(\xi_2^{(j)}, \mu^{(j)}(\lambda^{(0)})) / N_2^{(j)} \\ N_2^{(j)} &= N_2(\xi_2^{(j)}, \mu^{(j)}), \quad N_2' = v_2^2(x_2, \mu^{(j)}), \quad N_2(0, \mu^{(j)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Величина N_2 имеет смысл квадрата нормы функции v_2 . Алгоритм (4.3) обладает ускоренной (квадратичной) сходимостью по отношению к малому параметру $\varepsilon_2 = l_2 - \xi_2^{(0)}(\lambda^{(0)})$; в частности, при $h_2 = 0$ величина $\varepsilon_2 = 0$; если $|h_2| \ll 1$, то $\varepsilon_2 \ll 1$. В общем случае ($h_2 \neq 0$) малость параметра ε_2 обеспечивается удачным выбором пробной функции $\Psi_2(x_2)$ в оценке (4.2). При $\varepsilon_2 \sim 0.1$ несколько итераций (обычно 2–3) приводят к определению величин $\mu(\lambda^{(0)})$, $u_2(x_2, \lambda^{(0)})$ с погрешностью 10^{-4} – 10^{-8} (дальнейшее увеличение числа итераций нецелесообразно, так как требует проведения всех вычислений с предельными точностными возможностями современных ЭВМ).

Подставим найденную величину $\mu(\lambda^{(0)})$ в первое уравнение (2.1) и будем строить решение краевой задачи для λ , и u_1 с помощью метода ускоренной сходимости аналогично (4.3); имеем

$$\begin{aligned} v_1'' + [\lambda^{(j)}r_1(x_1) - \mu(\lambda^{(0)})]v_1 &= 0, \quad v_1(0) = 0, \quad v_1'(0) = 1 \\ \xi_1^{(j)} &= \arg_{x_1} v_1(x_1, \lambda^{(j)}), \quad \varepsilon_1^{(j)}(\lambda^{(0)}) = l_1 - \xi_1^{(j)} \\ \lambda^{(j+1)} &= \lambda^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}v_1'^2(\xi_1^{(j)}, \lambda^{(j)}) / N_1^{(j)} \\ N_1^{(j)} &= N_1(\xi_1^{(j)}, \lambda^{(j)}), \quad N_1' = r_1v_1^2(x_1, \lambda^{(j)}), \quad N_1(0, \lambda^{(j)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Величина N_1 имеет смысл квадрата нормы функции v_1 с весом $r_1(x_1)$. Практически точное решение задачи получается в результате нескольких итераций; в результате имеем $\lambda(\mu(\lambda^{(0)}))$, $u_1(x_1, \mu)$.

Таким образом, согласно (4.3), (4.4) выполнен первый шаг итерационной процедуры определения λ , μ : найдена сперва точка $\lambda^{(0)} = \lambda^*$, $\mu = \mu(\lambda^{(0)})$ лежащая на кривой $\mu(\lambda)$, а затем соответствующая ей точка $\lambda^{(1)} = \lambda(\mu^{(1)})$, $\mu^{(1)}$ лежащая на кривой $\lambda(\mu)$, см. фиг. 1, точки 1 и 2 соответственно. Следующие шаги заключаются в построении точки $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}(\lambda^{(1)})$ на кривой $\mu(\lambda)$ и $\lambda^{(2)} = \lambda(\mu^{(2)})$, $\mu^{(2)}$ на кривой $\lambda(\mu)$, фиг. 1, точки 3, 4; и т.д. Процесс неограниченно продолжается до тех пор, пока разности $\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}$, $\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) не достигнут заданной малой величины. Этот процесс равномерно сходится к точному решению при $k \rightarrow \infty$ со скоростью геометрической прогрессии в силу построения системы (2.1) (условия $r_1(x_1) > |r_2(x_2)|$, $(x_1, x_2) \in \Pi$, см. [9]). Сходимость может иметь характер устойчивого фокуса (см. фиг. 1) или узла, когда касательная к кривой $\mu_m(\lambda)$ в точке пересечения наклонена, как и $\lambda_n(\mu)$, вправо от вертикали. Этого можно добиться искусственным приемом добавления к r_1 некоторой достаточно большой постоянной и вычитанием этой постоянной из r_2 [9]. Очевидно, что процедура сходится за один шаг, если кривая $\mu_m(\lambda)$ вблизи точки пересечения практически вертикальна, т.е. зависимость $\mu_m(\lambda)$ слабая, см. п. 3. Более быстрая квадратичная сходимость по малым параметрам $\varepsilon_{1,2}$ имеет место, если воспользоваться линейной экстраполяцией функции $\mu(\lambda)$ по двум точкам 2 и 4 и функции $\lambda(\mu)$ по двум точкам 1 и 3; можно также использовать экстраполяцию более высокого порядка.

Для уверенного суждения о сходимости необходимо провести интегрирование задач Коши (4.3), (4.4) при найденных значениях $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ и определить невязки по выполнению граничных условий на правых концах.

В результате применения указанной рекуррентной процедуры, содержащей на каждом шаге рекуррентный алгоритм метода ускоренной сходимости, будет построено искомое решение λ , μ , $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$ системы краевых задач (2.1), а вместе с ним решение λ , $u(x_1, x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2)$ исходной задачи Штурма – Лиувилля (1.1), (1.2) при $\rho \equiv 0$ и фиксированных значениях параметров. Далее используется стандартная процедура продолжения по параметрам.

При достаточно малых вариациях вектора параметров исходные решения используются в качестве оценок начальных приближений (без применения принципа Рэлея или метода Рэлея – Ритца). Решение строится по изложенной выше схеме. Если оно известно для двух близких значений вектора параметров, то в качестве начального приближения для следующей вариации параметров может быть взята линейная экстраполяция, а на последующих – квадратичная, кубическая и т.д. Эта методика реализована при решении задачи (2.1), (3.1) прогонкой по параметру h ($h_{1,2} = h$) в достаточно широких пределах; остальные параметры принимали некоторые конкретные числовые значения, необходимые для оценки тенденции их влияния, см. п. 5.

Программные средства для реализации описанного алгоритма были созданы на базе системы компьютерной алгебры Maple [12]. Выбор системы символьного программирования был обусловлен следующими причинами: простотой метода ускоренной сходимости и быстродействием современных компьютеров, которые позволяли снизить требования к эффективности реализации; желанием создать рабочий инструмент для проведения исследований с максимально простым интерфейсом. Разработанный пакет включает процедуры интегрирования, вычисления собственных форм и частот, построения графиков зависимостей от различных параметров, экстраполяции по параметру и ряд вспомогательных процедур. В пакете Maple имеется собственная процедура интегрирования, но она не достаточно эффективно работает для систем большой размерности (например, при размерности равной 7). Этот факт установлен в результате интегрирования задач небесной механики. Процедура вследствие своей универсальности не учитывает специфику конкретной предметной области. Кроме того, требовалась процедура интегрирования, в которой процесс интегрирования прекращается при выполнении некоторого условия. Для реализации алгоритма интегрирования была разработана процедура `intRK` (реализация описанных в [13] схем метода Рунге–Кутты и алгоритма выбора шага интегрирования), которая имеет следующие три формальных параметра. Параметр `eqlist` – список, содержащий имя переменной интегрирования и правые части интегрируемых уравнений. Параметр `inilist` – список равенств, левая часть которых является именем интегрируемой функции, а правая – ее начальным значением. Последний параметр является конечным значением переменной интегрирования или функционалом, равенство нулю которого означает окончание процесса интегрирования [13]. Такие параметры как начальное значение переменной интегрирования, шаг интегрирования, точность и т.п. задаются автоматически в теле самой процедуры, но могут быть изменены через соответствующие глобальные переменные, имеющие определенные специфические имена. Например, чтобы задать значение шагу интегрирования, равное 0.1, требуется выполнить оператор `step:=0.1`.

Для вычисления частот и собственных форм разработаны процедуры `iter` и `valU`. При вычислениях с целью предотвращения возможного закликивания было заложено ограничение на максимальное число итераций по μ и λ , равное трем. Этого оказалось достаточно для получения приведенных высокоточных результатов (относительная погрешность 10^{-4}). При экстраполяции по параметру полиномом третьей степени оказалось, что достаточно одной итерации при шаге $h = 0.25$.

Программа оценки содержит три варианта значений параметров.

1. *Симметричный крест.* В этом варианте пересечение полосок происходит в центре прямоугольника (в частности, квадрата при $l_1 = l_2 = 1$): $b_i = l_i - a_i$ ($i = 1, 2$). Исследуется влияние величины плотности полосок (параметра $h = h_{1,2}$) и их ширины $d = d_i = b_i - a_i$.

2. *Сдвинутый крест.* Для данной конфигурации одна из полосок остается в центре (в частности, $b_2 = l_2 - a_2$), а другая перемещается от центра к краю $a_1 \rightarrow 0$. Исследуется влияние ее положения относительно центра для различных значений плотности h ; ширина полосок d_i фиксирована.

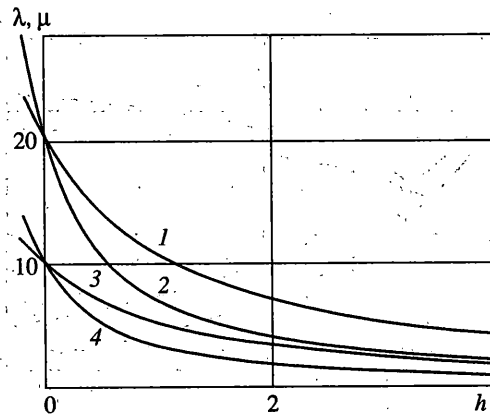
3. *Несимметричный крест.* Обе полоски перемещаются от центра к границе $a_i \rightarrow 0$; в широких пределах изменяется параметр плотности h ; ширина полосок d_i фиксирована.

Числовые данные, графики и обсуждение результатов и обнаруженных механических эффектов приводятся в п. 5.

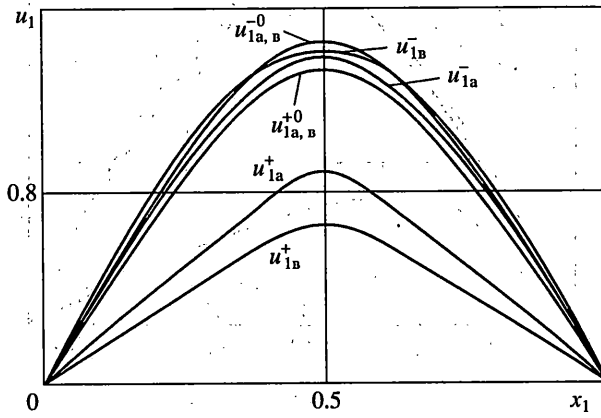
5. **Результаты расчетов и выводы.** На фиг. 2–10 приведены графики расчетов собственных значений λ , μ и нормированных функций $u_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) согласно указанным трем вариантам значений параметров для случая квадратной мембраны $l_{1,2} = 1$. Во всех вариантах принималось $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$, $h_1 = h_2 = h$, $k_1 = k_2 = 1$; $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$. Напомним, что функции r , $r_{1,2}$ (3.1) сильно и резко изменяются в окрестности значений $x_i = a_i$, b_i , их производные при указанных x_i равны $r'_{1,2} = 2h/\delta \sim 10^3$. Расчеты производились с относительной погрешностью 10^{-3} – 10^{-4} (невязка по граничным условиям).

5.1. Результаты расчетов варианта "симметричный крест" приведены на фиг. 2–4. Графики фиг. 2 представляют зависимость искоемых собственных значений параметров λ , μ задачи (2.1) (кривые 1, 2 соответствуют $\lambda_{a,b}$, а кривые 3, 4 – $\mu_{a,b}$) для различных $h \in [-0.225; 4.5]$ и двух совокупностей величин a_i , b_i , характеризующих ширину $d_i = b_i - a_i$ полосок: (а) $a_{1,2} = 0.45$, $b_{1,2} = 0.55$; (б) $a_{1,2} = 0.4$, $b_{1,2} = 0.6$. Таким образом, ширина полосок в случае (а) равнялась $d = 0.1$, а в случае (б) – $d = 0.2$. Вне полосок плотность $r = 1$; на полосках вне области пересечения она изменялась в пределах $r \in [0.45; 9]$; внутри области пересечения полосок $r \in [0.1; 18]$. Следует отметить, что при уменьшении h происходит быстрое возрастание $\lambda_{a,b}$, причем $\lambda_b > \lambda_a$ для $h < 0$ и $\lambda_b < \lambda_a$, если $h > 0$. Увеличение h приводит к монотонному уменьшению $\lambda_{a,b}$, что естественно. На фиг. 3, 4 приведены семейства нормированных "собственных функций" $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$ для различных величин $d = 0.1, 0.2$ (помечены индексами а, б) и разных $h = -0.225; -0.0225; 0.225; 4.5$ (помечены вверху индексами -, -, +0, + соответственно), т.е. представлены по восемь функций $u_{1a,b}^{\pm}(x_1)$, $u_{1a,b}^{\pm 0}(x_1)$ на фиг. 3 и $u_{2a,b}^{\pm}(x_2)$, $u_{2a,b}^{\pm 0}(x_2)$ на фиг. 4. Отметим, что функции $u_{1a,b}^{\pm 0}(x_1)$ практически слабо различаются и поэтому представлены одной кривой; аналогично представлены "формы" $u_{1a,b}^{-0}(x_1)$, $u_{2a,b}^{\pm 0}(x_2)$. Из графиков следует, что при $h = -0.225$ кривые становятся более пологими в серединах и сравнительно более выпуклыми по краям интервалов (малая инерция центральной части). Если $h = 4.5$, то существенное влияние на форму колебаний оказывает инерционность центральных частей: боковые части кривых близки к прямолинейным, а вершины существенно "острее", чем при $h \ll 1$ и $h < 0$.

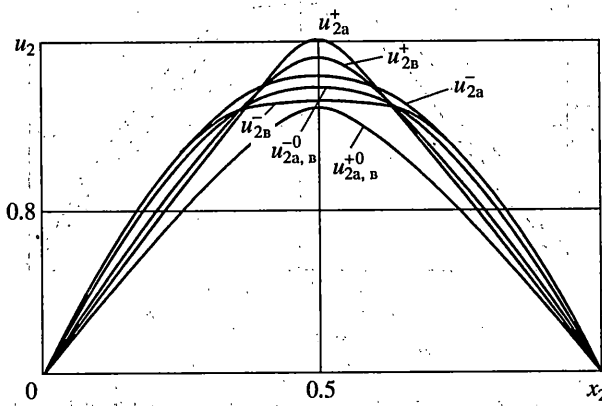
5.2. Для варианта "сдвинутый крест" ширина полосок принималась равной $h = 0.1$; при этом горизонтальная полоска оставалась посередине, как и выше ($a_2 = 0.45$, $b_2 = 0.55$), но вертикальная (вдоль оси x_2) перемещалась к левому краю ($a_1 \rightarrow 0$). Были рассчитаны два случая: (а) $a_1 = 0.2$; $b_1 = 0.3$; (б) $a_1 = 0$; $b_1 = 0.1$ ("Т-образная" конфигурация). Результаты расчетов представлены на фиг. 5–7 для тех же, что и в п. 5.1 значений параметра h . Графики для $\lambda_{a,b}$ (кривые 1, 2) и для $\mu_{a,b}$ (кривые 3, 4) на фиг. 5



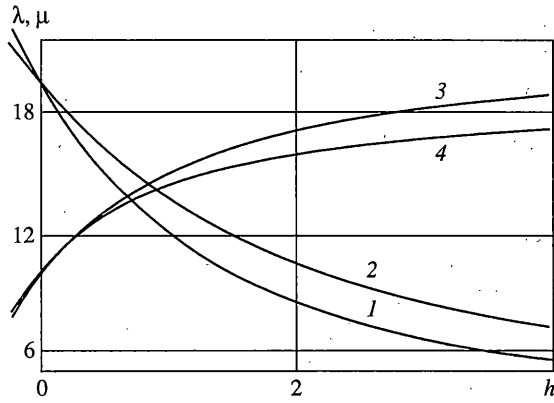
Фиг. 2



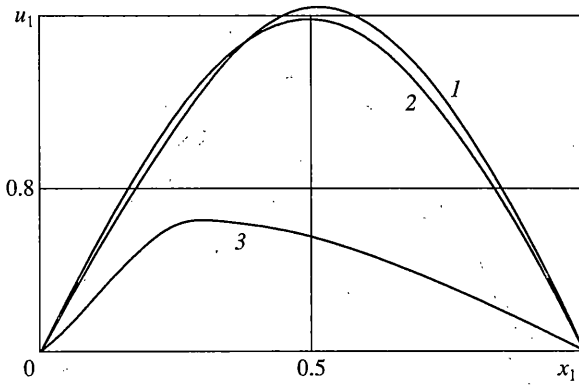
Фиг. 3



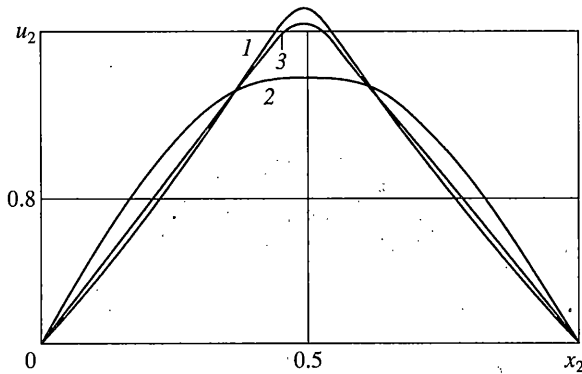
Фиг. 4



Фиг. 5

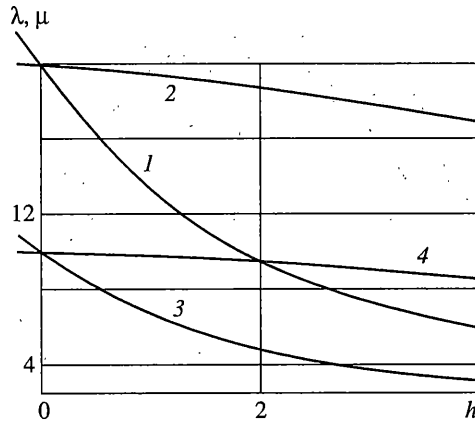


Фиг. 6

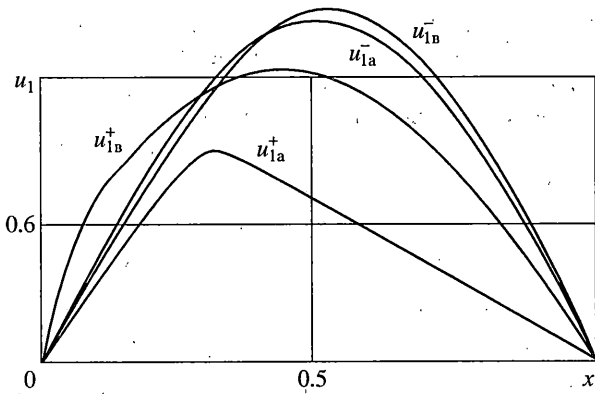


Фиг. 7

свидетельствуют, что влияние изменения параметра h на величины $\lambda_{a,b}$ несколько слабее, чем для варианта "симметричный" крест $n. 5.1$ (фиг. 2). Оно более существенно, когда имеет место случай (а), что отвечает механическим представлениям. Влияние варьирования h больше, когда изменение плотности происходит ближе к пучности, где максимальны смещения и ускорения. В случае (b) смещения элементов вертикальной полоски незначительны.



Фиг. 8

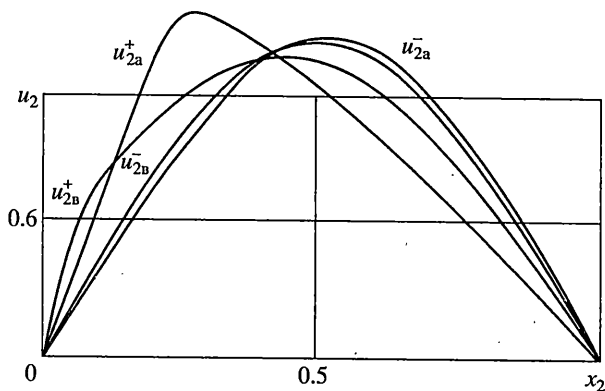


Фиг. 9

"Собственная" функция $u_{1a,b}(x_1)$ становится несимметричной относительно середины, см. фиг. 6, что представляется естественным. Существенное изменение "формы" u_1 имеет место в случае (а) для максимального значения $h = 4.5$. Кривые u_{1b}^+ (1) и $u_{1a,b}^-$ (2) оказываются довольно близкими (кривая 3 соответствует u_{1a}^+); к ним также весьма близки функции $u_{1a,b}^{\pm 0}(x_1)$ (они не приводятся, чтобы не загромождать семейство приведенных графиков на фиг. 6). Интересно отметить весьма тонкое свойство кривых $u_{1a,b}^{\pm 0}$ — их максимумы сдвинуты вправо относительно середины $x_1 = 1/2$.

Семейство кривых $u_{2a,b}^{\pm}$ на фиг. 7 (кривые 1–3 соответствуют u_{2a}^+ , $u_{2a,b}^-$, u_{2b}^+) симметрично относительно середины; графики $u_{2a,b}^+$ аналогичны соответствующим на фиг. 3, 4; кривые $u_{2a,b}^-$ практически совпадают; кривые $u_{2a,b}^{\pm 0}$ не приводятся, так как они близки к $u_{2a,b}^-$, а также к функции $\sqrt{2} \sin \pi x_2$, см. фиг. 3, 4.

5.3. На фиг. 8–10 приведены графические данные для собственных значений λ , μ и "форм" $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$, отвечающие несимметричной фигуре — вариант "несимметричный крест". Ширина полосок, как и выше, полагалось равной $d = 0.1$; их перемещение производилось совместно: (а) $a_{1,2} = 0.2$; $b_{1,2} = 0.3$; (б) $a_{1,2} = 0$, $b_{1,2} = 0.1$ (кон-



Фиг. 10

фигурация типа "угол"). Графики $\lambda_{a,b}$, $\mu_{a,b}$; (кривые 1–4) фиг. 8, свидетельствуют, что их зависимость от h становится еще более слабой. Кривые λ_b , μ_b близки слабо спадающим линейным функциям, что объясняется малым влиянием изменения плотности полосок, находящимся вблизи неподвижной границы. Это влияние существенно больше на кривые λ_a , μ_a , отвечающие частичному сдвигу полосок.

Семейство "собственных" функций $u_{1a,b}^\pm(x_1)$ изображено на фиг. 9. Вид приведенных кривых соответствует механическим представлениям. Отметим, что графики $u_{1a,b}^-$ довольно близки; кривые $u_{1a,b}^{\pm 0}$ близки к ним (и к синусоиде, см. выше) и поэтому не приводятся. Вновь следует указать, что максимумы функций $u_{1a,b}^-$ также смещены вправо от середины по известной читателю причине. Поведение кривых $u_{2a,b}^\pm(x_2)$ аналогично, однако влияние изменения $r_2(x_2)$ на форму более резко выражено вследствие отсутствия "стабилизирующей" величины $\rho_2 = 0$, фиг. 10.

6. Выводы. Таким образом, исследование собственных частот и форм основной моды колебаний квадратной мембраны с неоднородностью типа "крест" проведено конструктивно и с достаточной полнотой. В результате расчетов для широкого диапазона определяющих параметров обнаружены и прокомментированы интересные механические эффекты.

С помощью быстроходящегося алгоритма могут быть рассчитаны искомые характеристики собственных колебаний для более высоких мод: λ_{nm} , $n + m \geq 3$, что не представляет принципиальных или вычислительных трудностей. Отличие от рассмотренной выше в п. 4 процедуры заключается в выборе соответствующей пробной функции $\Psi(x_1, x_2)$ при вычислении оценки $\lambda_{nm}^{(0)}$ (в частности, при $h = 0$ нужно взять $\lambda_{nm} = \pi^2(n^2 + m^2)$ – точное значение), в определении m -го положительного корня функции $v_2(x_2, \mu^{(0)})$ согласно (4.3) и n -го положительного корня функции $v_1(x_1, \lambda^{(0)})$ согласно (4.4). Результаты расчетов предполагается представить в последующих публикациях.

Учет влияний малых в интегральном смысле факторов $\rho(x_1, x_2)$ (1.2) проводится сравнительно просто на основе метода возмущений [5, 9].

Аналогично вышеизложенному могут быть проведены высокоточные расчеты собственных частот и форм колебаний неоднородной прямоугольной мембраны с учетом переменной поверхностного натяжения и наличия неоднородного винклеровского основания [9]. Разработанный в [9, 14] метод ускоренной сходимости совместно с процедурой продолжения по параметру дает возможность конструктивного построения высокоточных двусторонних оценок частот собственных колебаний неодно-

родных мембран с простыми и сложными границами, в том числе для краевых условий второго и третьего рода [1, 10].

Авторы благодарят А.Ю. Ишлинского за полезные обсуждения результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222, 99-01-00276).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
3. Морс Ф.М., Фейнбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит. Т. 1, 1958. 930 с.; Т. 2, 1960. 886 с.
4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.
5. Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.–Л.: Гостехиздат, 1940. 499 с.
6. Стренг Т., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
8. Gupta R.S., Ghosh R. Method of perturbation applied to the vibration problem of a circular membrane of varying density // J. Acoust. Soc. America. 1964. V. 36. № 6. P. 1118–1120.
9. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания неоднородной мембраны // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 134–145.
10. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
11. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Эффективное решение обобщенной задачи Штурма – Лиувилля // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 323–326.
12. Журов А.И., Карпов И.И., Шингарёва И.К. Основы Maple. Применение в механике. Препринт № 536. М.: ИПМ РАН. 1995. 75 с.
13. Карпов И.И., Платонов А.К. Ускорение численного интегрирования уравнений движения в небесной механике // Космич. исследования. 1972. Т. 10. Вып. 6. С. 811–826.
14. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания взаимодействующих систем с неоднородными распределенными параметрами // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 15–25.

Москва

Поступила в редакцию
17.06.1999