**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2001**

УДК 539.3:534.2

© 2001 г. **Г.Р. ГУЛГАЗАРЯН, Л.Г. ГУЛГАЗАРЯН**

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

При условии свободных колебаний, исследуется вопрос распространения плоских волн типа Рэлея, затухающих от свободного края полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для тонкой упругой изотропной оболочки при отсутствии изгибной жесткости (безмоментная теория).

1. Введение. Вопросы распространения плоской волны типа Рэлея, затухающей от свободного торца полубесконечной замкнутой безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной положительной кривизной вдоль направления ее образующих изучены в [1–3].

В настоящей работе предполагается, что образующие ортогональны к краю оболочки и квадрат кривизны направляющей кривой срединной поверхности можно представить в виде

$$R^{-2} = k^2\left(\frac{r_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta + \rho_m \sin km\beta\right), \quad k>0, \quad -\infty<\beta<\infty \tag{1.1}$$

Здесь β – ориентированная длина переменной дуги направляющей кривой. Находятся дисперсионные уравнения и устанавливается асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для полубесконечной пластинки. Для цилиндрических оболочек с направляющими

$$y = b\cos ax; \quad b=1, \quad a=1; \quad b=1, \quad a=0{,}5, \quad -\infty<x<\infty \tag{1.2}$$

приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственных частот, и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм. Численный анализ показывает, что при увеличении кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки увеличиваются первые частоты собственных колебаний. С уменьшением квадрата кривизны, собственные формы колебаний затухают медленнее, и при $R^{-2}\to 0$ все характеристики собственных колебаний цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам преимущественно планарных колебаний полубесконечной пластинки.

В качестве исходных уравнений возьмем следующие уравнения, которые соответствуют технической теории цилиндрических оболочек [4]:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2} - \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2} - \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha} = \lambda u_1\\
&-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} - \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right) = \lambda u_2\\
&\frac{h^2}{12}\Delta\Delta u_3 - \frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \frac{u_3}{R^2} = \lambda u_3
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции смещения точки срединной поверхности, α, β – ортогональные координаты точки срединной поверхности, σ – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, Δ – оператор Лапласа

$$\lambda = (1 - \sigma^2)\omega^2\rho/E \tag{1.4}$$

где ρ – плотность, E – модуль Юнга, ω – угловая частота.

Граничные условия имеют вид [4, 5]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha}\Bigg|_{\alpha=0} = 0$$

$$u_i(\alpha, \beta) = u_i\left(\alpha, \beta + \frac{2\pi}{k}\right) \quad (i = \overline{1, 3}) \quad \sum_{j=1}^{3} |u_j|\Bigg|_{\alpha=+\infty} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \sigma\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2}\Bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + (2 - \sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2}\Bigg|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial \alpha}\Bigg|_{\alpha=+\infty} = 0$$

Пусть $s = 2\pi/k$. Для пары вектор-функций $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$ $(j = 1, 2)$ введем скалярное произведение по формуле

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_0^{-\infty}\int_0^{s} \sum_{j=1}^{3} u_j^{(1)}\overline{u}_j^{(2)} d\beta d\alpha \tag{1.6}$$

Задача (1.3) – (1.5) является самосопряженной и имеет неотрицательный дискретный спектр [4, 6]. Соответствующий оператор обозначим через L_h. Если в (1.3) взять $h = 0$ и отбросить последние три граничных условия в (1.5), то задача (1.3) – (1.5) приводится к вырожденной "безмоментной" задаче. Соответствующий ей оператор L_0 является самосопряженным и неотрицательно определенным. Аналогично [4, 7] можно доказать сильную сходимость оператора $(L_h + \gamma I)^{-1}$ к $(L_0 + \gamma I)^{-1}$ при $\gamma > 0$ и $h \to 0$. Отсюда на основании теоремы Реллиха [6] следует сильная сходимость спектральной функции $E_h(\delta)$ моментной задачи к спектральной функции $E_0(\delta)$ безмоментной задачи, если только концы отрезка δ не являются собственными значениями безмоментной задачи. Это обстоятельство обусловливает интерес к спектру безмоментной задачи.

Спектр оператора L_0 не является чисто дискретным. Оказывается, что при любых самосопряженных граничных условиях операторы, порожденные системой уравнений (1.3) имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $[0, \lambda_0]$ – множеством значений функции [8]:

$$\Omega(\beta, \theta) = (1 - \sigma^2)\cos^4\theta R^{-2}(\beta), \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi/k, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{1.7}$$

Отметим, что этот факт связан только с нарушением эллиптичности системы (1.3) (с $h = 0$) по Дуглису – Ниренбергу.

2. Вывод дисперсионного уравнения оператора L_0. Для математических вычислений удобно задачу, порождающую оператор L_0 заменить задачей [9]:

$$\Gamma u_1 = \sigma\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{2\sigma\lambda}{1 - \sigma}\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \Gamma u_2 = \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + (2 + \sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{2\lambda}{1 - \sigma}\frac{\partial w}{\partial \beta}$$

$$-R^{-2}\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \sigma R^{-2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + R^{-2}w = \lambda w, \quad w = \frac{u_3}{R} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-w\right)\Bigg|_{\alpha=0}=\frac{\partial u_1}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}=0,\quad |u_1|+|u_2|+|w|\big|_{\alpha=+\infty}=0 \tag{2.2}$$

$$u_i(\alpha,\beta)=u_i(\alpha,\beta+2\pi/k)\quad (i=1,2)\qquad w(\alpha,\beta)=w(\alpha,\beta+2\pi/k)$$

$$\Gamma=\Delta\Delta+(3-\sigma)/(1-\sigma)\lambda\Delta+2\lambda^2/(1-\sigma) \tag{2.3}$$

Периодическое решение системы (2.1) ищем в виде

$$u_1=\left(\frac{u_{c0}}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}u_{cm}\cos km\beta+u_{sm}\sin km\beta\right)\exp(k\chi\alpha)$$

$$u_2=\left(\sum_{m=1}^{\infty}v_{cm}\cos km\beta+v_{sm}\sin km\beta\right)\exp(k\chi\alpha) \tag{2.4}$$

$$u_2=\left(\frac{w_{c0}}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}w_{cm}\cos km\beta+w_{sm}\sin km\beta\right)\exp(k\chi\alpha)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), из первых двух уравнений (2.1) получим

$$kc_m u_{cm}=\chi a_m w_{cm},\quad kc_m u_{sm}=\chi a_m w_{sm},\quad kc_m v_{cm}=mb_m w_{sm},\quad kc_m v_{sm}=-mb_m w_{cm} \tag{2.5}$$

$$a_m=\sigma\chi^2+m^2+\sigma\eta^2,\qquad b_m=(2+\sigma)\chi^2-m^2+\eta^2,\qquad \eta^2=2\lambda/\left((1-\sigma)k^2\right)$$

$$c_m=(\chi^2-m^2)^2+(3-\sigma)/2\eta^2(\chi^2-m^2)+(1-\sigma)/2\eta^4\qquad (m=\overline{0,+\infty}) \tag{2.6}$$

Из третьего уравнения (1.1), получим бесконечную систему уравнений

$$(r_0A_0-(1-\sigma)\eta^2)w_{c0}+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n(r_nw_{cn}+\rho_nw_{sn})=0$$

$$A_0r_mw_{c0}+(A_m(r_0+r_{2m})-(1-\sigma)\eta^2)w_{cm}+\sum_{n-1,n\neq m}^{\infty}A_n(r_{n-m}+r_{n+m})w_{cn}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\rho_{n-m}+\rho_{n+m})w_{sn}=0 \tag{2.7}$$

$$A_0\rho_mw_{c0}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\rho_{n+m}-\rho_{n-m})w_{cn}+(A_m(r_0-r_{2m})-(1-\sigma)\eta^2)w_{sm}+$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}A_n(r_{n-m}-r_{n+m})w_{sn}=0\quad (m=\overline{1,+\infty})$$

$$A_n=p_n/c_n,\quad p_n=(c_n+n^2b_n-\sigma\chi^2a_n)\quad (n=\overline{0,+\infty}) \tag{2.8}$$

Условимся, что если $h>0$, то

$$r_{-h}=r_h,\quad \rho_{-h}=-\rho_h \tag{2.9}$$

Можно показать, что если $R^{-2}(\beta)$, например, $n\geqslant 3$ раз непрерывно дифференцируемая периодическая функция в $(-\infty,+\infty)$, то бесконечный определитель системы (2.7) при любых комплексных $\lambda\notin[0,\lambda_0]$ и χ в области определения коэффициентов (2.8), относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям [10]. Чтобы система (2.7) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю

$$M(\chi,\lambda,\sigma)=0 \tag{2.10}$$

Пусть χ_j ($j = 1, 2$) являются различными корнями уравнения (2.10) с отрицательными действительными частями и $(w_{c0}^{(j)}, w_{c1}^{(j)}, w_{s1}^{(j)}, \ldots, w_{cm}^{(j)}, w_{sm}^{(j)}, \ldots)$ ($j = 1, 2$) являются нетривиальными решениями системы (2.7) при χ_j ($j = 1, 2$) соответственно. Представляя решение задачи (2.1) – (2.2) в виде

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \quad (i = 1, 2) \qquad w = w^{(1)} + w^{(2)} \tag{2.11}$$

где $u_i^{(j)}, w^{(j)}$ ($i, j = 1, 2$) решения системы (2.1) при χ_j ($j = 1, 2$) имеют вид (2.4) и, учитывая граничные условия (2.2), придем к системе уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_{cm}^{(j)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{2} \frac{R_{2j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_{cm}^{(j)} = 0 \qquad (m = \overline{0, +\infty}) \\ \sum_{j=1}^{2} \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_{sm}^{(j)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{2} \frac{R_{2j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_{sm}^{(j)} = 0 \qquad (m = \overline{1, +\infty})\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_i^2 a_m^{(j)} - \sigma m^2 b_m^{(j)} - \sigma c_m^{(j)}, \qquad R_{2j}^{(m)} = m\chi_j (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}) \tag{2.13}$$

где $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ – значения a_m, b_m, c_m из (2.6) при $\chi = \chi_j$ ($j = 1, 2$) соответственно. Чтобы система (2.12) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\left| R_{ij}^{(m)} \right|_{i,j=1}^{2} = 0 \qquad (m = \overline{1, +\infty}) \tag{2.14}$$

вне отрезка $[0, \lambda_0]$ и в области определений коэффициентов (2.8) имела λ – решение. Уравнения (2.14) эквивалентны уравнениям

$$\delta_1 \chi_1^2 \chi_2^2 + \delta_2 \chi_1 \chi_2 + \delta_3 (\chi_1^2 + \chi_2^2) + \delta_4 = 0 \qquad (m = \overline{1, +\infty}) \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\delta_1 = 2(2(1+\sigma)m^2 - \sigma\eta^2), \qquad \delta_2 = -\eta^2(2m^2 + \sigma\eta^2) \\ \delta_3 = 2\sigma\eta^2(m^2 - \eta^2), \qquad \delta_4 = \sigma\eta^4(m^2 - \eta^2)\end{gathered} \tag{2.16}$$

Таким образом, доказана следующая теорема: если $R^{-2}(\beta)$ $n \geqslant 3$ раз непрерывно дифференцируемая периодическая функция в $(-\infty, +\infty)$ и $\lambda \notin [0, \lambda_0]$, то уравнения (2.15) являются дисперсионными уравнениями задачи (2.1) – (2.2), где χ_1 и χ_2 различные корни уравнения (2.10) с отрицательными действительными частями.

3. Частные случаи. В связи с наличием бесконечного числа полюсов в коэффициентах системы (2.7), вычисление χ^2-корней уравнения (2.10) представляет собой сложную задачу. Для практических целей целесообразно рассмотреть следующие случаи:

(*а*) $R^{-2} = k^2 r_0/2$ ($r_m = \rho_m = 0$, $m = \overline{1, +\infty}$), т.е. имеем замкнутую полубесконечную круговую цилиндрическую оболочку. В этом случае система (2.7) принимает вид

$$\begin{cases}(r_0 A_m - (1-\sigma)\eta^2) w_{cm} = 0 & (m = \overline{0, +\infty}) \\ (r_0 A_m - (1-\sigma)\eta^2) w_{sm} = 0 & (m = \overline{1, +\infty})\end{cases} \tag{3.1}$$

и, следовательно, уравнение (2.10) распадается на совокупность уравнений

$$\begin{gathered}(\eta^2 - (1+\sigma)r_0)\chi^4 - \eta^2(2m^2 - (3-\sigma)\eta^2/2 + (3+2\sigma)r_0/2)\chi^2 + \\ + \eta^2(m^2 - \eta^2)(m^2 - (1-\sigma)\eta^2/2 + r_0/2) = 0 \qquad (m = \overline{0, +\infty})\end{gathered} \tag{3.2}$$

Подставляя корни уравнения (3.2) с отрицательными действительными частями (при $m \neq 0$) в (2.15), получим дисперсионные уравнения для круговой цилиндрической оболочки

$$(1-\eta^2/m^2)[\eta^2/m^2-2(1+\sigma)(1+r_0/(2m^2))]^2-\eta^2/m^2(1-$$
$$-(1-\sigma)\eta^2/(2m^2)+r_0/(2m^2))(\eta^2/m^2-(1+\sigma)r_0/m^2)=0 \quad (m=\overline{1,+\infty}) \qquad (3.3)$$

При $r_0 \to 0$ χ^2-корни уравнения (3.2) принимают вид

$$\chi_1^2=m^2-\eta^2, \quad \chi_2^2=m^2-(1-\sigma)/2\eta^2 \qquad (3.4)$$

а уравнения (3.3) преобразуются к дисперсионным уравнениям аналогичной задачи для полубесконечной пластинки

$$(1-\eta^2/m^2)[\eta^2/m^2-2(1+\sigma)]^2-\eta^4/m^4(1-(1-\sigma)\eta^2/(2m^2))=0 \quad (m=\overline{1,+\infty}) \qquad (3.5)$$

Заметим, что уравнения (3.2) и (3.3) эквивалентны уравнениям (12) и (13) из [3], если заменить $r_0/2$ на $2/r_0$. Уравнения (3.5) легко преобразуются к уравнениям Рэлея для полубесконечной пластинки

$$(2-\eta^2/m^2)^4=16(1-\eta^2/m^2)(1-(1-\sigma)/2\eta^2/m^2) \quad (m=\overline{1,+\infty}) \qquad (3.6)$$

(b) $R^{-2}=k^2(r_0/2+r_1\cos k\beta)$ ($r_m=0$, $m=\overline{2,+\infty}$, $\rho_m=0$, $m=\overline{1,+\infty}$). В этом случае система уравнений (2.7) распадается на совокупность систем уравнений ($w_{s0}=0$):

$$r_{00}\omega_{c0}+2r_1p_1\omega_{c1}=0$$
$$r_1p_{m-1}\omega_{cm-1}+r_{mm}\omega_{cm}+r_1p_{m+1}\omega_{cm+1}=0 \quad (m=\overline{1,+\infty}) \qquad (3.7)$$
$$r_1p_{m-1}\omega_{sm-1}+r_{mm}\omega_{sm}+r_1p_{m+1}\omega_{sm+1}=0 \quad (m=\overline{1,+\infty}) \qquad (3.8)$$
$$\omega_{cn}=w_{cn}/c_n, \quad \omega_{sn}=w_{sn}/c_n, \quad r_{nn}=r_0p_n-(1-\sigma)\eta^2c_n \quad (n=\overline{0,+\infty}) \qquad (3.9)$$

Заметим, что определители системы (3.7), (3.8) можно привести к нормальному виду, если разделить каждое уравнение системы (3.7), начиная со второго, и каждое уравнение системы (3.8) на $(1-\sigma)\eta^2m^4$ соответственно. Чтобы найти ненулевое решение совокупности систем (3.7), (3.8), приравниваем нулю их определители

$$D^{(i)}(\chi^2,\eta^2,\sigma,r_0,r_1)=0 \quad (i=1,2) \qquad (3.10)$$

где $D^{(i)}$ определитель i-й системы из (3.7) – (3.8). Уравнения (3.10) устанавливают функциональные зависимости $\chi^2=g_i(\eta^2,\sigma,r_0,r_1)$ ($i=1,\ 2$). В явной форме эти зависимости устанавливаются следующим образом: Возьмем сечения $D^{(i)}$ ($i=1,2$) из (3.10) при конечном n и приравниваем их нулю

$$D_n^{(i)}(\chi^2,\eta^2,\sigma,r_0,r_1)=0 \quad (i=1,2) \qquad (3.11)$$

Найдем $\chi_n^{(i)}$ ($i=1,\ 2$) решения алгебраических уравнений (3.11) соответственно. Решения уравнения (3.10) получаются из $\chi_n^{(i)}$ при $n\to\infty$. Заметим, что определители $D_n^{(i)}$ вычисляются из рекуррентных формул

$$D_1^{(1)}=r_{00}r_{11}-2r_1^2p_0p_1, \quad D_2^{(1)}=r_{22}D_1^{(1)}-r_1^2p_1p_2p_{00}$$
$$D_m^{(1)}=r_{mm}D_{m-1}^{(1)}-r_1^2p_{m-1}p_mD_{m-2}^{(1)} \quad (m\geqslant 3) \qquad (3.12)$$
$$D_1^{(2)}=r_{11}, \quad D_2^{(2)}=r_{22}D_1^{(2)}-r_1^2p_1p_2$$
$$D_m^{(2)}=r_{mm}D_{m-1}^{(2)}-r_1^2p_{m-1}p_mD_{m-2}^{(2)} \quad (m\geqslant 3) \qquad (3.13)$$

Справедливо следующее утверждение: при фиксированном $m \geqslant 2$ и при условиях

$$\lambda_0 < \lambda < (1-\sigma)/2m^2k^2 \tag{3.14}$$

уравнения (3.10) имеют χ^2-формальные решения вида

$$(\chi_j^{(i)})^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_{jm}^{(i)} r_1^4 + \ldots \quad (i, j = 1, 2) \tag{3.15}$$

где $\chi_j^{(m)}$ – корни уравнения $r_{mm} = 0$ с отрицательными действительными частями и

$$\alpha_j^{(m)} = p_m(p_{m-1}r_{m+1m+1} + p_m r_{m-1m-1})/(r_{m-1m-1}r_{m+1m+1}r'_{mm})\big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} \quad (j = 1, 2) \tag{3.16}$$

Здесь r'_{mm} производная по χ^2. Действительно, легко проверить, что при условиях (3.14) уравнение $r_{mm} = 0$ (или уравнения (3.2)) имеет два положительных χ^2-корня. Корни уравнения

$$D_{m+1}^{(i)} = (r_{m+1m+1}r_{mm} - r_1^2 p_{m+1}p_m)D_{m-1}^{(i)} - r_1^2 p_{m-1}p_m r_{m+1m+1}D_{m-2}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{3.17}$$

в зоне (3.14) ищутся в виде

$$(\chi_{jm}^{(i)})^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + a_j^{(m)} r_1^2 + \beta_{jm}^{(i)} r_1^4 + \ldots \quad (i, j = 1, 2, \quad m = \overline{2, +\infty} \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в (3.17) и приравнивая коэффициенты при r_1^2 нулю, получим

$$(r_{m+1m+1}r'_{mm}\alpha_j^{(m)} - p_{m+1}p_m)D_{m-1}^{(i)} - r_{m+1m+1}p_{m-1}p_m D_{m-2}^{(i)}\big|_{r_1=0} = 0 \tag{3.19}$$

Учитывая, что $D_{m-1}^{(i)}\big|_{r_1=0} = r_{m-1m-1}D_{m-2}^{(i)}\big|_{r_1=0}$ $(m = \overline{2+\infty})$, (принимаем $D_0^{(1)} = r_{00}$, а $D_0^{(2)} = 1$), получим формулу (3.16). Аналогичным образом как в [2] можно методом математической индукции доказать, что если использовать определители более высокого порядка, чем $m + 1$ и искать χ^2-нули этого определителя в виде (3.18), то коэффициенты при r_1^2 не изменятся. Таким образом доказаны представления (3.15) с гарантированными значениями первых двух слагаемых.

В табл. 1, 2 приведены безразмерные характеристики собственных значений η/m и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_j/m$ $(j = 1, 2)$ в зависимости от m, a, b для оболочек с направляющими (1.2) при $\sigma = 1/3$. Для нахождения $k\chi_j/m$ $(j = 1, 2)$ и η/m, когда $R^{-2} \approx k^2 r_0/2$, используем уравнения (3.2) и (3.3) соответственно. В случае приближения $R^{-2} \approx k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$ использовались уравнения (2.15) и приближенные формулы

$$\chi_j \approx -((\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2)^{1/2} \quad (j = 1, 2) \tag{3.20}$$

В табл. 1 представлены результаты для оболочки с параметрами: $a = 1$, $b = 1$, $s \approx 7{,}6404$, $r_0 \approx 1{,}6041$, $r_1 \approx 0{,}1428$. В этом случае для пластины имеем $\chi_1/m \approx -0{,}3234$, $\chi_2/m \approx -0{,}6969$, $\eta/m \approx 0{,}9194$. Результаты, представленные в табл. 2, соответствуют оболочке с параметрами: $a = 0{,}5$, $b = 1$, $s \approx 13{,}3183$, $r_0 \approx 0{,}4618$, $r_1 \approx 0{,}0122$.

Заметим, что с увеличением квадрата кривизны увеличиваются отрезок $[0, \lambda_0]$ непрерывного спектра задачи (2.1), (2.2) (см. выражение (1.7)). Численный анализ показывает, что с увеличением зоны непрерывного спектра L_0 также увеличиваются и первые частоты собственных колебаний. С уменьшением квадрата кривизны, собственные формы колебаний оператора L_0 затухают медленнее, и при $R^{-2} \to 0$ все характеристики собственных колебаний цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам преимущественно планарных колебаний полубесконечной пластинки. Отметим, что первые группы параметров $k\chi_j/m$ $(j = 1, 2)$ и η/m в каждой

Таблица 1

m	$R^{-2} \approx k^2 r_0/2$			$R^{-2} \approx k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$		
	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m
2	−0.1627	−1.5244	0.9671	−0.1629	−1.5227	0.9670
3	−0.2361	−1.0002	0.9421	−0.2360	−1.0004	0.9421
4	−0.2679	−0.8642	0.9325	−0.2679	−0.8644	0.9325
5	−0.2852	−0.8042	0.9279	−0.2852	−0.8043	0.9279
6	−0.2956	−0.7818	0.9253	−0.2956	−0.7819	0.9253
7	−0.3024	−0.7522	0.9238	−0.3024	−0.7523	0.9238
8	−0.3069	−0.7394	0.9227	−0.3069	−0.7395	0.9227
9	−0.3102	−0.7301	0.9221	−0.3102	−0.7306	0.9220
10	−0.3126	−0.7243	0.9921	−0.3126	−0.7243	0.9921
100	−0.3233	−0.6972	0.9194	−0.3233	−0.6972	0.9194

Таблица 2

m	$R^{-2} \approx k^2 r_0/2$			$R^{-2} \approx k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$		
	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m
2	−0.1498	−0.5105	0.9344	−0.1498	−0.5105	0.9344
3	−0.1675	−0.4492	0.9262	−0.1675	−0.4492	0.9262
4	−0.1779	−0.4278	0.9232	−0.1778	−0.4278	0.9232
5	−0.1784	−0.4179	0.9219	−0.1784	−0.4178	0.9219
6	−0.1805	−0.4124	0.9211	−0.1805	−0.4124	0.9211
10	−0.1837	−0.4044	0.9200	−0.1837	−0.4044	0.9200
100	−0.1855	−0.3999	0.9194	−0.1855	−0.3999	0.9194

из таблиц соответствуют круговой замкнутой цилиндрической оболочке радиуса $R = \sqrt{2/(r_0 k^2)}$.

4. Заключение. В работе показано, что в полубесконечной цилиндрической оболочке, квадрат кривизны которой достаточно гладкий и представляется в виде (1.1) могут существовать волны типа Рэлея, затухающие от свободного края вдоль ее образующих. Частоты собственных колебаний таких оболочек определяются совокупностью уравнений типа Рэлея (2.15) – (2.16). Численный анализ показывает, что каждое уравнение из совокупности (2.15) в интервале (1.1) может иметь только один корень относительно безразмерной характеристики собственной частоты η/m. При больших m или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам преимущественно планарных колебаний полубесконечной пластинки. С увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты увеличиваются, а процесс затухания усиливается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б.* Волны типа Рэлея в полубесконечной цилиндрической оболочке // Волновые задачи механики. Нижний Новгород, 1992. С. 87–91.
2. *Гулгазарян Г.Р., Казарян К.Б.* Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочке // Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т. 50. № 1. С. 27–33.
3. *Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г.* Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке с произвольной направляющей // Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван, 1997. 257 с.
4. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
5. *Асланян А.Г., Лидский В.Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 155 с.
6. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
7. *Асланян А.Г.* Связь моментной задачи с безмоментной в теории колебаний тонких упругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 5. С. 118–124.
8. *Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И.* Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сиб. мат. ж. 1973. Т. 4. № 5. С. 978–986.
9. *Гулгазарян Г.Р.* Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки // Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т. 9. № 1. С. 61–70.
10. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. . Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 342 с.

Ереван

Поступила в редакцию
25.02.1999