МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. Н.Н. ШАВЛАКАДЗЕ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ С ТОНКИМ ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Рассматривается задача об изгибе неограниченной изотропной пластинки, подкрепленной упругим тонким конечным ребром переменной изгибной жесткости. Пластинка загружена изгибающим моментом на бесконечности, а ребро свободно от нагружения. Задача сводится к решению интегродифференциального уравнения Прандтля, которое в некоторых условиях изучается в [1–2]. Исследуется вопрос об особенностях контактных усилий, получены эффективные решения.

Аналогичные задачи при подкреплении неограниченными или конечными ребрами, или включениями постоянной жесткости, рассмотрены в [3–5]. Характерной особенностью проведенного исследования является установление зависимости поведения контактных усилий от закона изменения жесткости ребер или включения.

Рассмотрим тонкую изотропную неограниченную пластинку, подкрепленную упругим включением по линии $y = 0$, $|x| < a$, на бесконечности действует изгибающий момент: $M_x^\infty = M$, $M_x^\infty = 0$. Требуется найти контактные усилия взаимодействия включения с пластинкой.

Наличие подкрепляющего включения вызывает скачок обобщенной поперечной силы N_y в пластине. Используя обозначение $\langle f \rangle = f(x, -0) - f(x, +0)$ имеем

$$\langle \omega \rangle = \langle \omega_y' \rangle = \langle M_y \rangle = 0, \quad \langle N_y \rangle = \mu(x), \quad |x| < a \tag{1}$$

Здесь ω, ω_y', M_y, N_y – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в пластинке; $\mu(x)$ – неизвестное контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой, причем $\mu(x) \equiv 0$, при $|x| > a$ и удовлетворяющее условиям равновесия включения

$$\int_{-a}^{a} \mu(x)dx = 0, \quad \int_{-a}^{a} x\mu(x)dx = 0 \tag{2}$$

Считая концы включения свободными, приходим к следующей краевой задаче относительно прогиба $\omega_0(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2} D_0(x) \frac{d^2}{dx^2} \omega_0(x) = -\mu(x), \quad |x| < a \tag{3}$$

$$[D_0(x)\omega_0''(x)]_{x=\pm a} = 0, \quad [D_0(x)\omega_0''(x)]'_{x=\pm a} = 0$$

где $D_0(x) = E_0(x)h_0^3(x)/12$ – жесткость включения на изгиб, $E_0(x)$ – модуль упругости материала включения, $h_0(x)$ – толщина, $h_0(\pm a) = 0, D_0(-x) = D_0(x)$.

Напряженное состояние тонкой однородной изотропной пластинки, изгибаемой на бесконечности изгибающими моментами, определяется прогибом средней плоскости пластинки $\omega(x, y)$, который удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta\omega = 0 \tag{4}$$

Решение уравнения (4) представляется в виде

$$\omega(x,y) = 2\,\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \tag{5}$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ – функции комплексной переменной $z = x + iy$, голоморфные в области пластинки. Для изгибающих моментов M_x и M_y, скручивающего момента H_{xy} и перерезывающих сил N_x и N_y, имеют место формулы [6]:

$$\begin{aligned} &M_y - M_x + 2iH_{xy} = 4(1-\nu)D[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ &M_x + M_y = -8(1+\nu)D\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) \\ &N_x - iN_y = -8D\varphi''(z); \quad D = \tfrac{2}{3}Eh^3/(1-\nu^2) \end{aligned} \tag{6}$$

где $\psi(z) = \chi'(z)$, $2h$ – толщина пластинки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, а D – цилиндрическая жесткость пластинки.

Когда область пластинки односвязна, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут однозначными функциями. Если область имеет отверстие (вырез), при условии равенства нулю главного момента сил, действующих на границе, из условия однозначности компонент тензора напряжений и двух первых компонент вектора перемещений следует:

$$\begin{aligned} &\varphi(z) = Bz + \varphi_0(z), \\ &\psi(z) = (B' + iC')z + \psi_0(z) \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – однозначные функции в области пластинки

$$\begin{aligned} &M_x^\infty = -2D[2(1+\nu)B + (1-\nu)B'] \\ &M_y^\infty = -2D[2(1+\nu)B - (1-\nu)B'] \\ &H_{xy}^\infty = 2D(1-\nu)C', \quad N_x^\infty = N_y^\infty = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Введем в рассмотрение новую функцию $\Omega(z)$ равенством $\Omega(z) = z\varphi'(z) + \psi(z)$. Тогда, как легко видно из (5), справедлива формула

$$\partial\omega/\partial x + i\partial\omega/\partial y = \varphi(z) + \overline{\Omega(z)} + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)}$$

Из первых двух условий (1) получается

$$[\varphi(t) - \overline{\Omega}(t)]^- - [\varphi(t) - \overline{\Omega}(t)]^+ = 0$$

и в силу (7) имеем $\varphi(z) - \overline{\Omega(\bar{z})} = -(B' - iC')z$. Из последнего равенства окончательно получим

$$\psi_0(z) = \overline{\varphi_0}(z) - z\varphi_0'(z) \tag{9}$$

Из представлений (6), с учетом (9), получается:

$$\begin{aligned} &M_y = 2(1-\nu)D\,\mathrm{Re}[\overline{\varphi_0'(\bar{z})} - \varphi_0'(z) + (\bar{z} - z)\varphi_0''(z) + (B' + iC')z] - 4(1+\nu)D\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) \\ &N_y = 8D\,\mathrm{Im}\,\varphi''(z) \end{aligned}$$

Из двух последних условий (1) имеем:

$$\begin{aligned} &[\varphi''(x) + \overline{\varphi''(x)}]^- - [\varphi''(x) + \overline{\varphi''(x)}]^+ = 0 \\ &[\varphi''(x) - \overline{\varphi''(x)}]^- - [\varphi''(x) - \overline{\varphi''(x)}]^+ = i\mu(x)/(4D) \end{aligned}$$

Складывая последние условия, имеем

$$\varphi''(x)^+ - \varphi''(x)^- = -i\mu(x)/(8D), \quad |x| < a \tag{10}$$

Функция $\mu(x)$ может иметь неинтегрируемые особенности на сегменте $[-a, a]$, учитывая проведенные в [7] доказательства о перенесении результатов монографии [8] на регуляризованные значения расходящихся интегралов [9], так как $\varphi''(\infty) = 0$, то решение граничной задачи (10) дается формулой

$$\varphi''(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{\mu(t)dt}{t-z}, \quad z \in S \tag{11}$$

где S – вся плоскость, разрезанная вдоль отрезка $(-a, a)$.

Осуществляя условие контакта включения с пластинкой $\omega_0(x) = \omega(x, 0)$, имея ввиду, что $\partial^2\omega(x,0)/\partial x^2 = 2\varphi'(x) - M/4D(1-\nu)$, с учетом (11), условие (3) принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2}D_0(x)\left[\frac{1}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\ln|t-x|\mu(t)dt - \frac{M}{2D(1-\nu^2)}\right] = -\mu(x)$$

Введя обозначение $\lambda(x) = \int_{-a}^{x}dt\int_{-a}^{t}\mu(\tau)d\tau$, интегрируя последнее уравнение два раза, приходим к уравнению

$$\lambda(x) - \frac{D_0(x)}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda'(t)dt}{t-x} = \frac{MD_0(x)}{2D(1-\nu^2)}, \quad |x| < a \tag{12}$$

при условии

$$\lambda(\pm a) = 0 \tag{13}$$

Рассматривая интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda(t)dt}{t-z}$$

который, очевидно, представляет собой голоморфную функцию всюду на плоскости, за исключением сегмента $[-a, a]$, путем предельного перехода, на основании известных свойств интегралов типа Коши [8] получаем

$$\lambda(x) = \Phi_+(x) - \Phi_-(x)$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{\lambda'(t)}{t-x}dt = \pi i[\Phi'_+(x) + \Phi'_-(x)] \tag{14}$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда $D_0(x) = \sqrt{a^2-x^2}(a^2-x^2)^n P(x)$, где $n \geqslant 1$ – натуральное число (случай $n = 0$ был рассмотрен многими авторами, напр. [10]), $P(x)$ – полином, не имеющий кратных корней и такой, что числа $D_k(z_k)$ не являются целыми положительными, где $D_k(z) = 8iD(z-z_k)/D_0(z)$, z_k – простые корни полинома $P(z)$ ($k = 1, 2, \dots m$).

Имея ввиду, что $D_{0+}(x) = -D_{0-}(x) \equiv D_0(x) > 0$, $|x| < a$, в силу (14), уравнение (12) принимает вид

$$\left[\Phi'_+(x) + \frac{8iD}{D_{0+}(x)}\Phi_+(x)\right] + \left[\Phi'_-(x) + \frac{8iD}{D_{0-}(x)}\Phi_-(x)\right] = \frac{4M}{i(1-\nu^2)} \tag{15}$$

Введем новую функцию

$$F(z) = \left[\Phi'(z) + \frac{8iD}{D_0(z)}\Phi(z)\right]\sqrt{a^2-z^2} \tag{16}$$

Тогда уравнение (15) примет вид

$$F_+(x)-F_-(x)=\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{4M}{i(1-\nu^2)} \tag{17}$$

Относительно дифференциального уравнения (16) заметим, что оно сводится к следующему виду:

$$\Psi'(z)+\frac{D_k(z_k)}{z-z_k}\Psi(z)=f(z) \tag{18}$$

$$\Psi(z)=\Phi(z)\exp\left\{\int\limits_{z_0}^{z}\frac{D_k(t)-D_k(z_k)}{t-z_k}dt\right\},\quad f(z)=\frac{F(z)}{\sqrt{a^2-z^2}}\exp\left\{\int\limits_{z_0}^{z}\frac{D_k(t)-D_k(z_k)}{t-z_k}dt\right\}.$$

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Если числа $D_k(z_k)$ не являются целыми отрицательными, для существования аналитического решения уравнения (18) или (16) в точках z_k, такого, что $\Phi(z_k)=0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была голоморфной в точках z_k.

Теорема 2. Если числа $D_k(z_k)=-n_k$, т.е. являются целыми отрицательными, для существования аналитического решения уравнения (18) или (16) в точках z_k, такого, что $\Phi(z_k)=0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была голоморфной в точках z_k, и $C_{n_k-1}=0$, где C_{n_k-1} соответствующий коэффициент разложения в ряд Тейлора функции $f(z)$.

Так что, функция $F(z)$, даваемая формулой (16), в условиях теоремы (1), может быть голоморфной всюду на плоскости S (как потом будет видно, при этом удовлетворяются все условия задачи), за исключением точек $x=\pm a$, где она имеет полюсы кратности n, исчезаемой на бесконечности и непрерывно продолжимой до внутренних точек сегмента $(-a, a)$, как со стороны верхней, так и со стороны нижней полуплоскости. Тогда решение граничной задачи (17) представляется в виде:

$$F(z)=-\frac{2M}{1-\nu^2}(\sqrt{z^2-a^2}-z)+\sum_{k=1}^{n}A_k\left(\frac{1}{(a-z)^k}-\frac{1}{(a+z)^k}\right) \tag{19}$$

где A_k ($k=1, 2, \dots n$) произвольные постоянные, надлежащие определению.

Замечание. В условиях теоремы 2, решение граничной задачи (17) можно представить в виде

$$F_0(z)=F(z)+\sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{z-z_j} \tag{20}$$

где функция $F(z)$ представляется формулой (19). Тогда уравнение (18) в окрестности каждой из точек z_k ($k=1, 2, \dots m$) представляется в виде

$$\Psi_k'(z)+\frac{D_k(z_k)[\Psi_k(z)-\Psi_k(z_k)]}{z-z_k}+\frac{D_k(z_k)\Psi_k(z_k)}{z-z_k}=f_k(z)+\frac{\tilde{B}_k}{z-z_k}+c(z)\sum_{j\neq k=1}^{m}\frac{B_j}{z-z_j}$$

где

$$c(z)=\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\exp\left\{\int\limits_{z_0}^{z}\frac{D_k(t)-D_k(z_k)}{t-z_k}dt\right\},\quad \tilde{B}_k=B_k c(z_k)$$

$$f_k(z)=F(z)c(z)+\frac{c(z)-c(z_k)}{z-z_k}B_k.$$

Вводя обозначение $L_k(z) = \Psi_k(z) - \Psi_k(z_k)$, и учитывая, что $\tilde{B}_k = D_k(z_k)\Psi_k(z_k)$, получим

$$L_k'(z) + \frac{D_k(z_k)}{z - z_k} L(z) = f_k(z) + c(z) \sum_{j \neq k=1}^{m} \frac{B_j}{z - z_j} \qquad (21)$$

На основе теоремы 2, если $D_k(z_k) = -n_k$, то для существования аналитического решения в точках z_k уравнения (21), должны выполняться условия

$$\left[f_k(z) + c(z) \sum_{j \neq k=1}^{m} \frac{B_j}{z - z_j} \right]_{z=z_k}^{(n_k - 1)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots m)$$

Из последней системы алгебраических уравнений определяются постоянные B_k.

Вернемся к условиям теоремы 1, решение дифференциального уравнения (16) дается формулой (функция $F(x)$ определяется по формуле (19)):

$$\Phi(z) = e^{-i\theta(z)} \left[\Phi(0) + \int_0^z \frac{F(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} e^{i\theta(t)} dt \right] \qquad (22)$$

$$\theta(z) = 8D \int_0^z \frac{dt}{D_0(t)}$$

Формулу (22) интегрированием по частям можно преобразовать следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{8Di} A(z) + e^{-i\theta(z)} \left[\Phi(0) - \frac{1}{8Dia} F(0) D_0(0) - \frac{1}{8Di} \int_0^z A'(t) e^{i\theta(t)} dt \right], \qquad (23)$$

$$A(z) = \frac{F(z)}{\sqrt{a^2 - z^2}} D_0(z)$$

Точки $z = \pm a$ являются точками трансцендентного разветвления решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (16). Разобьем окрестности этих точек на секторы лучами $\mathrm{Im}\theta(z) = 0$, то будет справедлива следующая лемма.

Лемма. Количество таких лучей, в окрестности точек $z = \pm a$, на которых $\mathrm{Im}\theta(z) = 0$, равняется $2n - 1$.

Доказательство. Рассмотрим окрестность точки $z = -a$, в которой функция $\theta(z)$ представляется в виде:

$$\theta(z) = 8D \int_0^z \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (t+a)^k}{(t+a)^{n+1/2}} dt = 8D \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(t+a)^{n+1/2-k}} dt =$$

$$= -8D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(n - 1/2 - k)} \left[\frac{1}{(z+a)^{n-1/2-k}} - \frac{1}{a^{n-1/2-k}} \right]$$

где коэффициенты b_k – действительные числа, кроме того $b_0 > 0$. Если положим $z + a = \rho e^{i\alpha}$, получим

$$\theta(z) = -\frac{8Db_0 e^{-i\alpha(n-1/2)}}{(n - 1/2)\rho^{n-1/2}} [1 + \rho(p + iq)]$$

Число ρ можно так подобрать, что $1 + \rho p > 0$, тогда из равенства $\mathrm{Im}\theta(z) = 0$ следует $(1 + \rho p)\sin(n - 1/2)\alpha - \rho q \cos(n - 1/2)\alpha = 0$, т.е. $\mathrm{tg}(n - 1/2)\alpha = \rho q/(1 + \rho p)$ при $\rho \to 0$,

$\alpha = 2k\pi/(2n-1)$ ($k = 1, \ldots 2n-1$). Аналогично для точки $z = a$ получим $\alpha = \pi + 2k\pi/(2n-1)$. Что нужно было доказать.

Количество секторов, в которых $\mathrm{Im}\theta(z) > 0$, равняется числу n, а секторов, где $\mathrm{Im}\theta(z) < 0$ – числу $n-1$.

При $z \to \pm a$, в секторах, где $\mathrm{Im}\theta(z) < 0$, выражение в скобках, формулы (23), стремится к бесконечности, а решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (16), – к нулю. Раскрытие неопределенности типа ∞/∞ дает: $\Phi(z) - A(z)/(8Di) = O((a^2 - z^2)^{n+1/2})$ при $z \to \pm a$, и, соответственно $\Phi(z) = O(1)$ при $z \to \pm a$.

При $z \to \pm a$ в секторах, где $\mathrm{Im}\theta(z) \geqslant 0$, для определения постоянных A_k ($k = 1, 2, \ldots n$), из условия стремления к нулю выражения в скобках формулы (23), получается система алгебраических уравнений:

$$\lim_{|z+a|\to 0}\left[\Phi(0) - \frac{1}{8Dia}F(0)D_0(0) - \frac{1}{8Di}\int_0^z A'(t)e^{i\theta(t)}dt\right] = 0$$

$$\frac{2\pi(2j-2)}{2n-1} \leqslant \arg(z+a) \leqslant \frac{2\pi(2j-1)}{2n-1} \quad (j = 1, 2, \ldots n)$$

и соответственно $\Phi(z) = O(1)$, при $z \to \pm a$.

Последняя система алгебраических уравнений получается и при $|z-a| \to 0$ в соответствующих секторах. Из теоремы единственности поставленной задачи следует, что детерминант этой системы отличается от нуля. Постоянная $\Phi(0)$ определяется из условия, связанного с требованием $\Phi(\infty) = 0$.

Для граничных значений функции $\Phi(z)$ получается:

$$\Phi_+(x) = \frac{1}{8Di}F_+(x)(a^2 - x^2)^n P(x) +$$

$$+ e^{-i\theta(x)}\left[\Phi_+(0) - \frac{1}{8Di}F_+(0)a^{2n}P(0) - \frac{1}{8Di}\int_0^x A'_+(t)e^{i\theta(t)}dt\right]$$

$$\Phi_-(x) = \frac{1}{8Di}F_-(x)(a^2 - x^2)^n P(x) +$$

$$+ e^{i\theta(x)}\left[\Phi_-(0) - \frac{1}{8Di}F_-(0)a^{2n}P(0) - \frac{1}{8Di}\int_0^x A'_-(t)e^{-i\theta(t)}dt\right]$$

$$\Phi_+(0) = -\Phi_-(0), \quad \theta(-x) = -\theta(x) \quad \text{при} \quad |x| < a.$$

Искомая функция $\lambda(x)$ представляется в виде

$$\lambda(x) = \Phi_+(x) - \Phi_-(x) = -\frac{M(a^2 - x^2)^{n+1/2}P(x)}{2D(1-\nu^2)} + \left[\lambda(0) + \frac{Ma^{2n+1}P(0)}{2D(1-\nu^2)}\right]\cos\theta(x) -$$

$$- \frac{M}{D(1-\nu^2)}\int_0^x D'_0(t)\cos(\theta(t) - \theta(x))dt - \int_0^x B'(t)\sin(\theta(t) - \theta(x))dt$$

$$\lambda(0) = 2\Phi_+(0), \quad B(t) = \frac{Mt(a^2 - t^2)^n P(t)}{2D(1-\nu^2)} + \frac{(a^2 - t^2)^n P(t)}{4D}\sum_{k=1}^n A_k\left(\frac{1}{(a-t)^k} - \frac{1}{(a+t)^k}\right)$$

Из предыдущего представления видно, что $\lambda(x)$ – четная функция, удовлетворяющая условию $\lambda(x) = O((a^2 - x^2)^{n+1/2})$ при $x \to \pm a$. После несложных преобразований получается, что

$$\lambda'(x) = O((a^2 - x^2)^{n-1/2}), \quad \lambda''(x) = O((a^2 - x^2)^{n-3/2}), \quad x \to \pm a \tag{24}$$

Окончательно заключаем, что функция $\mu(x) = \lambda''(x)$, выражающая поперечное контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой, в окрестности концов включения имеет поведение (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
3. *Попов Г.Я., Процеров Ю.С.* Изгиб подкрепленных пластин, лежащих на линейно-деформируемом основании // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 7. С. 68–73.
4. *Онищук О.В., Попов Г.Я., Процеров Ю.С.* О некоторых контактных задачах для подкрепленных пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 307–314.
5. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. *Фридман М.М.* О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 93–102.
7. *Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г.* Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 293–302.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
10. *Векуа И.Н.* Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // ПММ. Т. 9. Вып. 2. 1945. С. 143–150.

Тбилиси

Поступила в редакцию
4.02.1999