

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О КОЛЬЦЕВОЙ И КРУГОВОЙ ТРЕЩИНАХ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СЛОЯ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

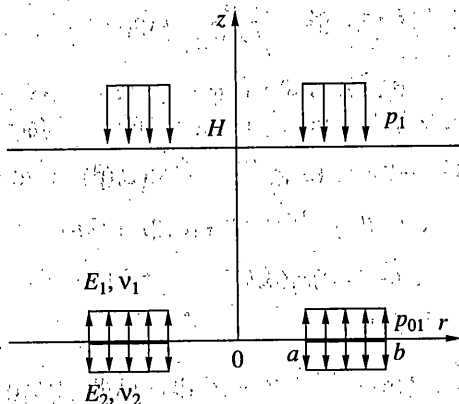
Дается точное аналитическое решение двух родственных осесимметричных смешанных задач теории упругости о кольцевой $a < r < b$ и круговой $0 < r < b$ трещинах на границе раздела слоя произвольной толщины H и полупространства при произвольных нормальных и касательных нагрузках на внешней поверхности слоя и берегах трещины. Математическая постановка этих задач базируется на специальной регуляризации решения первой основной краевой задачи теории упругости для отдельного слоя при произвольных нормальных и касательных нагрузках на его граничных плоскостях, которые строятся методом интегрального преобразования Ханкеля с обеспечением сходимости интегралов для всех напряжений и перемещений. Смешанные задачи о кольцевой и круговой трещинах сводятся к сингулярным интегральным уравнениям (СИУ) с ядром Коши для комплексных функций действительного переменного, на которые полностью распространяются результаты регуляризации методом Карлемана – Векуа аналогичных СИУ в задачах о давлении кольцевого и кругового штампов на слоистое полупространство [1]. В результате регуляризации СИУ сводятся к удобным для эффективного численного решения системам регулярных интегральных уравнений типа Фредгольма третьего и второго рода соответственно в случаях кольцевой и круговой трещин. При этом устанавливаются и выделяются особенности решений СИУ на концах отрезков интегрирования и искомых напряжений на контурах трещин. Предлагаемый здесь подход к постановке смешанных задач о трещинах и штампах для слоистого полупространства на основе регуляризации базового решения первой основной краевой задачи ранее применялся в [1–3] в случаях, когда касательные напряжения на границах раздела слоев отсутствуют. Достоинство этого подхода заключается прежде всего в том, что он позволяет сводить сложные задачи о трещинах к адекватным им разрешающим интегральным уравнениям простейшего вида.

Отметим, что первое точное решение задачи о круговой трещине на границе раздела слоев в многослойном пространстве получено в [4, 5]. Здесь решение сведено к СИУ с ядром Коши, которое при помощи метода регуляризации Карлемана – Векуа преобразовано к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, допускающего эффективное численное решение¹.

1. Общее решение смешанной задачи для двухслойного полупространства. Рассмотрим двухслойное полупространство, состоящее из слоя произвольной толщины H , покоящегося на бесконечно простирающемся упругом основании. Слою присвоен номер $i = 1$, а упругое полупространство считается как второй слой бесконечной толщины. Модули упругости E_i и коэффициенты ν_i для каждого слоя $i = 1, 2$ могут принимать различные и произвольные значения. В частности, полупространство может быть абсолютно жестким (в этом случае полагается $E_2 = \infty$). Начало отсчета цилиндрической системы координат r, z примем на граничной плоскости раздела слоя

¹ Аналитическое решение задачи реализовано в численном виде, результаты которого подробно изложены также в препринте № 61 ИПМ АН СССР (1975).

и полупространства. В этой системе координат слой ограничен параллельными плоскостями $z = H_i$ ($i = 0, 1$), ортогональными оси Oz , причем $z = H_0 = H$ – внешняя граничная плоскость слоя и двухслойного полупространства, а $z = H_1 = 0$ – плоскость раздела слоя и полупространства (фигура).



Смешанная задача о кольцевой и круговой трещинах решается в безразмерных переменных $\rho = r/b$, $t = z/H$, где b – величина внешнего радиуса кольцевой трещины, принятая за линейную единицу измерения. Величины отношений $\lambda = H/b$ и $\rho_0 = a/b$ являются характерными параметрами задачи. Конструкция двухслойного полупространства характеризуется упругими параметрами $\delta_1 = E_1/E_2$ и $\chi_1 = \delta_1(1 + \nu_2)/(1 + \nu_1)$.

На внешней границе слоя $t = 1$ и на границе его раздела с полупространством $t = 0$ задаются следующие краевые условия для нормальных осевых и касательных напряжений:

$$\sigma_{z1} = p_1(\rho), \quad \tau_{rz1} = q_1(\rho) \quad \text{при } t = 1 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} = p_0(\rho), \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} = q_0(\rho) \quad \text{при } t = 0 \quad (1.2)$$

где $p_j(\rho)$, $q_j(\rho)$ ($j = 0, 1$) – произвольные функции на полуоси $0 \leq \rho < \infty$, представимые интегралами Ханкеля

$$p_j(\rho) = \int_0^{\infty} \beta \bar{p}_j(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad q_j(\rho) = \int_0^{\infty} \beta \bar{q}_j(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (1.3)$$

$$\bar{p}_j(\rho) = \int_0^{\infty} \rho p_j(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{q}_j(\rho) = \int_0^{\infty} \rho q_j(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho \quad (1.4)$$

Функции интенсивности распределения нормальных и касательных нагрузок $p_1(\rho)$, $q_1(\rho)$ в рассматриваемых смешанных задачах известны, а функции

$$p_0(\rho), q_0(\rho) = \begin{cases} p_{01}(\rho), q_{01}(\rho) & \text{при } \rho \in L_1 = (0 \leq \rho \leq 1) \\ p_{02}(\rho), q_{02}(\rho) & \text{при } \rho \in L_2 = (1 < \rho < \infty) \end{cases} \quad (1.5)$$

известны в области трещины L_1 и не известны вне трещины в области L_2 . Трансформанты Ханкеля $\bar{p}_{02}(\beta)$, $\bar{q}_{02}(\beta)$ от функций $p_{02}(\rho)$, $q_{02}(\rho)$ подлежат определению из смешанных граничных условий задачи.

Общее решение смешанной задачи для каждого слоя двухслойного полупространства, выраженное через интеграл Ханкеля, построено в [6]. Нормальные осевые и касательные напряжения $\sigma_{zi}(\rho, t)$, $\tau_{rzi}(\rho, t)$, вертикальные осевые и радиальные

перемещения $w_i(\rho, t)$, $u_i(\rho, t)$ в произвольном слое $i = 1, 2$ представляются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{zi}(\rho, t) &= \int_0^{\infty} \beta \Delta_{zi}(t, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta, & \tau_{rzi}(\rho, t) &= \int_0^{\infty} \beta \Delta_{\tau i}(t, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta \\ \frac{E_i}{(1 + \nu_i)_b} w_i(\rho, t) &= \int_0^{\infty} \Delta_{wi}(t, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta, & \frac{E_i}{(1 + \nu_i)_b} u_i(\rho, t) &= \int_0^{\infty} \Delta_{ui}(t, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\Delta_{zi}(t, \beta)$, $\Delta_{\tau i}(t, \beta)$, $\Delta_{wi}(t, \beta)$, $\Delta_{ui}(t, \beta)$ выражаются через четыре произвольные функции $A_i(\beta)$, $B_i(\beta)$, $C_i(\beta)$, $D_i(\beta)$ по формулам для слоя $i = 1$ ($t_0 = 1, t_1 = 0$):

$$\begin{aligned} \Delta_{zi}(t, \beta) &= -[A_i(\beta) + (\lambda t\beta - 1 + 2\nu_i)B_i(\beta)]e^{-\lambda(t_{i-1}-t)\beta} + [C_i(\beta) + (\lambda t\beta + 1 - 2\nu_i)D_i(\beta)]e^{-\lambda(t-t_i)\beta} \\ \Delta_{\tau i}(t, \beta) &= [A_i(\beta) + (\lambda t\beta + 2\nu_i)B_i(\beta)]e^{-\lambda(t_{i-1}-t)\beta} + [C_i(\beta) + (\lambda t\beta - 2\nu_i)D_i(\beta)]e^{-\lambda(t-t_i)\beta} \\ \Delta_{wi}(t, \beta) &= -[A_i(\beta) + (\lambda t\beta - 2(1 - 2\nu_i))B_i(\beta)]e^{-\lambda(t_{i-1}-t)\beta} - [C_i(\beta) + \\ &+ (\lambda t\beta + 2(1 - 2\nu_i))D_i(\beta)]e^{-\lambda(t-t_i)\beta} \\ \Delta_{ui}(t, \beta) &= [A_i(\beta) + (\lambda t\beta + 1)B_i(\beta)]e^{-\lambda(t_{i-1}-t)\beta} - [C_i(\beta) + (\lambda t\beta - 1)D_i(\beta)]e^{-\lambda(t-t_i)\beta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

и для полупространства $i = 2$ с учетом $C_2(\beta) \equiv 0, D_2(\beta) \equiv 0$.

2. Регуляризованное решение первой основной краевой задачи для отдельного слоя. Построение этого решения сводится к удовлетворению общего решения (1.6), (1.7) при $i = 1$ краевым условиям (1.1), (1.2) с произвольными краевыми функциями напряжений $p_j(\rho)$, $q_j(\rho)$ ($j = 0, 1$) (1.3), что приводит к расходящимся в нижнем пределе интегралам Ханкеля для перемещений $w_1(\rho, t)$, $u_1(\rho, t)$. Данную математическую особенность точного решения удастся преодолеть с помощью специальной регуляризации, сохраняющей его форму и сколь угодно высокую точность.

Регуляризованное решение (1.6), (1.7), удовлетворяющее краевым условиям (1.1), (1.2) с обеспечением сходимости интегралов для всех его компонент, ищем путем суперпозиции двух отдельных решений, отвечающих нормальным нагрузкам с малой пригрузкой при краевых условиях:

$$\sigma_{z1} = p_1(\rho) + p_1^*(\rho), \quad \tau_{rz1} = 0 \quad \text{при } t = 1 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{z1} = p_0(\rho), \quad \tau_{rz1} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

и касательным нагрузкам с малой пригрузкой при краевых условиях

$$\sigma_{z1} = 0, \quad \tau_{rz1} = q_1(\rho) + q_1^*(\rho) \quad \text{при } t = 1 \quad (2.2)$$

$$\sigma_{z1} = 0, \quad \tau_{rz1} = q_0(\rho) \quad \text{при } t = 0$$

Здесь $p_1^*(\rho)$, $q_1^*(\rho)$ – функции интенсивности нормальной и касательной пригрузок на полуоси $0 \leq \rho < \infty$, которые берутся в форме следующих интегралов Ханкеля:

$$p_1^*(\rho) = -\int_0^{\infty} \beta R(\beta) \Delta_{wp1}(1, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad q_1^*(\rho) = -\int_0^{\infty} \beta R(\beta) \Delta_{wq1}(1, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (2.3)$$

$$R(\beta) = \varepsilon e^{-n\beta} \quad (2.4)$$

где $\Delta_{wp1}(1, \beta)$, $\Delta_{wq1}(1, \beta)$ – функции податливости $\Delta_{wi}(t, \beta)$ (1.7) в интеграле (1.6) для вертикальных перемещений $w_1(\rho, t)$ на внешней поверхности слоя $t = 1$ соответственно при нормальной и касательной нагрузках $p_1(\rho)$ и $q_1(\rho)$, $R(\beta)$ – регуляризирующая функция с выбором постоянных ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) и n ($n \gg 1$), при которых модули интегралов

пригрузок $p_1^*(\rho), q_1^*(\rho)$ (2.3) не превышают заданной сколь угодно малой погрешности δ вычисления интегралов искомого регуляризованного решения:

$$|p_1^*(\rho)| < \delta, \quad |q_1^*(\rho)| < \delta \quad (0 \leq \rho < \infty) \quad (2.5)$$

Можно аналитически установить, что порядки постоянных ε, n, δ в формулах (2.4), (2.5) связаны зависимостью $\delta = O(n^{-1} \sqrt{\varepsilon/n})$ [1].

Подставляя формулы (1.3), (1.6), (2.3) в краевые условия (2.1), (2.2), получаем краевые условия для функций $\Delta_{zk1}(t, \beta), \Delta_{\tau k1}(t, \beta), \Delta_{wk1}(t, \beta)$ (1.7), выраженных через отмеченные индексом k неизвестные функции $A_{k1}(\beta), B_{k1}(\beta), C_{k1}(\beta), D_{k1}(\beta)$, для случая нормальной нагрузки при $k = p$:

$$\begin{aligned} \Delta_{zp1}(1, \beta) + R(\beta)\Delta_{wp1}(1, \beta) &= \bar{p}_1(\beta) \\ \Delta_{zp1}(1, \beta) &= 0, \quad \Delta_{zp1}(0, \beta) = \bar{p}_0(\beta), \quad \Delta_{\tau p1}(0, \beta) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

и для случая касательной нагрузки при $k = q$:

$$\begin{aligned} \Delta_{zq1}(1, \beta) &= 0, \quad \Delta_{\tau q1}(1, \beta) + R(\beta)\Delta_{wq1}(1, \beta) = \bar{q}_1(\beta) \\ \Delta_{zq1}(0, \beta) &= 0, \quad \Delta_{\tau q1}(0, \beta) = \bar{q}_0(\beta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Равенства (2.6), (2.7) в развернутом виде с подстановкой в них формул (1.7) представляют собой системы функциональных уравнений (СФУ) для определения неизвестных функций $A_{k1}(\beta), B_{k1}(\beta), C_{k1}(\beta), D_{k1}(\beta)$ ($k = p, q$) при нормальной и касательной нагрузках. Решая развернутые СФУ (2.6), (2.7) по правилу Крамера, находим в аналитическом виде неизвестные функции $A_{k1}(\beta), B_{k1}(\beta), C_{k1}(\beta), D_{k1}(\beta)$ ($k = p, q$), выраженные соответственно через трансформанты Ханкеля $\bar{p}_j(\beta), \bar{q}_j(\beta)$ ($j = 0, 1$) (1.4), и подставляем их в общее решение (1.6). В результате получаем регуляризованные решения краевой задачи для слоя отдельно при нормальных и касательных нагрузках $p_j(\rho)$ и $q_j(\rho)$ ($j = 0, 1$) на его границах $t = 0$ и $t = 1$. Суперпозиция этих решений дает искомого регуляризованное решение первой краевой задачи для отдельного слоя при краевых условиях (1.1), (1.2).

Для постановки рассматриваемой ниже смешанной задачи из описанного выше решения требуются следующие конструктивные представления для вертикальных и радиальных перемещений $w_1(\rho, t)$ и $u_1(\rho, t)$ на нижней границе слоя $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{(1 + \nu_1)b} w_1(\rho, t) |_{t=0} &= \int_0^\infty [\Delta_{wp1}(\beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{wp0}(\beta)\bar{p}_0(\beta) + \\ &+ \Delta_{wq1}(\beta)\bar{q}_1(\beta) + \Delta_{wq0}(\beta)\bar{q}_0(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{(1 + \nu_1)b} u_1(\rho, t) |_{t=0} &= \int_0^\infty [\Delta_{up1}(\beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{up0}(\beta)\bar{p}_0(\beta) + \\ &+ \Delta_{uq1}(\beta)\bar{q}_1(\beta) + \Delta_{uq0}(\beta)\bar{q}_0(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Delta_p \Delta_{wp1} = 4(1 - \nu_1) e^{-\lambda\beta} (1 - e^{-2\lambda\beta} + \lambda\beta(1 + e^{-2\lambda\beta}))$$

$$\Delta_p \Delta_{wp0} = -2(1 - \nu_1) (1 - e^{-4\lambda\beta} + 4\lambda\beta e^{-2\lambda\beta}) + 2(1 - \nu_1) R(\beta) (1 - e^{-2\lambda\beta})^2$$

$$\Delta_q \Delta_{wq1} = 4(1 - \nu_1) \lambda\beta e^{-\lambda\beta} (1 - e^{-2\lambda\beta})$$

$$\Delta_q \Delta_{wq0} = (1 - 2\nu_1) (1 - e^{-2\lambda\beta})^2 + 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta} + R(\beta) ((1 - 2\nu_1)^2 (1 - e^{-2\lambda\beta})^2 - 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta})$$

$$\Delta_p \Delta_{up1} = -4(1 - \nu_1) \lambda\beta e^{-\lambda\beta} (1 - e^{-2\lambda\beta})$$

$$\begin{aligned} \Delta_p \Delta_{up0} &= (1 - 2v_1)(1 - e^{-2\lambda\beta})^2 + 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta} + 2(1 - v_1)R(\beta)((1 - 2v_1)(1 - e^{-4\lambda\beta}) - 4\lambda\beta e^{-2\lambda\beta}) \\ \Delta_q \Delta_{uq1} &= 4(1 - v_1)e^{-\lambda\beta}(1 - e^{-2\lambda\beta} - \lambda\beta(1 + e^{-2\lambda\beta})) \\ \Delta_q \Delta_{uq0} &= -2(1 - v_1)(1 - e^{-4\lambda\beta} - 4\lambda\beta e^{-2\lambda\beta}) - 2(1 - v_1)R(\beta)((1 - 2v_1)(1 - e^{-4\lambda\beta}) + 4\lambda\beta e^{-2\lambda\beta}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Delta_p = (1 - e^{-2\lambda\beta})^2 - 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta} + 2(1 - v_1)R(\beta)(1 - e^{-4\lambda\beta} + 4\lambda\beta e^{-2\lambda\beta}) \quad (2.11)$$

$$\Delta_q = (1 - e^{-2\lambda\beta})^2 - 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta} + R(\beta)((1 - 2v_1)(1 - e^{-2\lambda\beta})^2 + 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta})$$

где Δ_p, Δ_q – определители развернутых СФУ (2.6), (2.7).

Для обоснования сходимости интегралов (2.8), (2.9) и других интегралов в решении (1.6), (1.7) при краевых условиях (1.1), (1.2) и математической постановки смешанных задач находим главные и старшие члены асимптотических разложений определителей $\Delta_k(\beta)$ ($k = p, q$) и всех функций (2.10) при $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$. Асимптотика определителей (2.11):

при $\beta \rightarrow 0$:

$$\Delta_p \sim \frac{4}{3}(\lambda\beta)^4 + 16(1 - v_1)\lambda\beta R(\beta), \quad \Delta_q \sim \frac{4}{3}(\lambda\beta)^4 + 8(1 - v_1)(\lambda\beta)^2 R(\beta) \quad (2.12)$$

при $\beta \rightarrow \infty$

$$\Delta_k \sim 1 - 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta}, \quad \Delta_k^{-1} \sim 1 + 4(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta} \quad (2.13)$$

Асимптотика функций (2.10) при $\beta \rightarrow 0$ ($R(\beta) \sim \varepsilon$):

$$\Delta_{wp1}, \Delta_{wq1} \sim \varepsilon^{-1}, \quad \Delta_{wp0} \sim -\varepsilon^{-1}, \quad \Delta_{wq0} \sim 2v_1 + \varepsilon^{-1}$$

$$\Delta_{up1} \sim -(2\varepsilon)^{-1}\lambda\beta, \quad \Delta_{up0} \sim -v_1$$

$$\Delta_{uq1} \sim -(3\varepsilon)^{-1}\lambda\beta, \quad \Delta_{uq0} \sim -2(1 - v_1)(\lambda\beta)^{-1} \quad (2.14)$$

при $\beta \rightarrow \infty$

$$\Delta_{wp1}, \Delta_{wq1}, -\Delta_{up1}, -\Delta_{uq1} \sim 4(1 - v_1)\lambda\beta e^{-\lambda\beta}$$

$$\Delta_{wp0}, \Delta_{uq0} \sim -2(1 - v_1) - 8(1 - v_1)(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta}$$

$$\Delta_{up0}, \Delta_{wq0} \sim 1 - 2v_1 + 8(1 - v_1)(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta} \quad (2.15)$$

Можно доказать, что функциональные определители $\Delta_k(\beta)$ ($k = p, q$) (2.11), обращаясь в нуль при $\beta = 0$, при $0 < \beta < \infty$ непрерывно возрастают до 1. С учетом этого факта и асимптотики (2.14), (2.15) очевидна непрерывность и ограниченность функций $\Delta_{wkj}(\beta)$, $\Delta_{ukj}(\beta)$ ($k = p, q; j = 0, 1$) (2.10). Трансформанты Ханкеля $\bar{p}_j(\beta)$, $\bar{q}_j(\beta)$ ($j = 0, 1$) тоже непрерывны и ограничены на полуоси $0 \leq \beta < \infty$ [6]. Последнее относится и к функциям Бесселя $J_0(\rho\beta)$ и $J_1(\rho\beta)$. При данных свойствах подынтегральных функций с учетом асимптотики (2.14), (2.15) единые интегралы в формулах (2.8), (2.9) и отдельные интегралы, соответствующие функциям $\Delta_{wkj}(\beta)$, $\Delta_{ukj}(\beta)$ ($k = p, q; j = 0, 1$), равномерно сходятся к непрерывным функциям на полуоси $0 \leq \beta < \infty$ [6].

В заключение приводим асимптотику функций $\Delta_{wkj}(\beta)$, $\Delta_{ukj}(\beta)$ ($k = p, q; j = 0, 1$) при $R(\beta) \equiv 0$ и $\beta \rightarrow 0$: $\Delta_{wp1}, -\Delta_{wp0} \sim 12(1 - v_1)(\lambda\beta)^{-3}$; $\Delta_{wq1}, \Delta_{wq0}, -\Delta_{up1}, \Delta_{up0} \sim 6(1 - v_1)(\lambda\beta)^{-2}$, $2\Delta_{uq1}, \Delta_{uq0} \sim -4(1 - v_1)(\lambda\beta)^{-1}$, из которой следует очевидная расходимость в нижнем пределе шести из восьми интегралов в формулах (2.8), (2.9), соответствующих отдельным функциям $\Delta_{wkj}(\beta)$, $\Delta_{ukj}(\beta)$ ($k = p, q; j = 0, 1$), чем и вызвана необходимость их регуляризации.

3. Решение первой основной краевой задачи для отдельного полупространства.

Построение этой простой задачи сводится к удовлетворению общего решения (1.6), (1.7) при $i = 2$ краевому условию (1.2). Перемещения на внешней поверхности полупространства имеют вид:

$$\frac{E_2}{(1 + \nu_2)b} w_1(\rho, t) |_{t=0} = \int_0^{\infty} [2(1 - \nu_2)\bar{p}_0(\beta) + (1 - 2\nu_2)\bar{q}_0(\beta)] J_0(\beta) d\beta \quad (3.1)$$

$$\frac{E_2}{(1 + \nu_2)b} u_1(\rho, t) |_{t=0} = \int_0^{\infty} [(1 - 2\nu_2)\bar{p}_0(\beta) + 2(1 - \nu_2)\bar{q}_0(\beta)] J_1(\beta) d\beta \quad (3.2)$$

4. Построение решения задачи о кольцевой трещине. На плоскости раздела слоя и полупространства $t = 0$ на верхнем и нижнем берегах кольцевой трещины в области $L_1 = (0 < \rho_0 \leq \rho_1 \leq 1)$ заданы симметричные осевые и касательные напряжения

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} = p_{01}(\rho), \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} = q_{01}(\rho) \quad (\rho \in L_1) \quad (4.1)$$

а вне трещины в области $L_2 = (0 \leq \rho < \rho_0, 1 < \rho_1 < \infty)$ должны выполняться условия непрерывности осевых и радиальных перемещений

$$w_1 = w_2, \quad u_1 = u_2 \quad (\rho \in L_2) \quad (4.2)$$

Учтем в равенствах (4.1) формулы (1.1), (1.2); в равенства (4.2) подставим формулы (2.8), (2.9), (3.1), (3.2) и умножим их на $E_1/(1 + \nu_1)b$, перенесем все интегралы с неизвестными трансформантами $\bar{p}_0(\beta)$, $\bar{q}_0(\beta)$ в левую сторону, а с известными $\bar{p}_1(\beta)$, $\bar{q}_1(\beta)$ – в правую. В результате получим следующую систему парных интегральных уравнений (ПИУ) относительно неизвестных трансформант Ханкеля $\bar{p}_0(\beta)$, $\bar{q}_0(\beta)$:

$$\int_0^{\infty} \beta \bar{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = p_{01}(\rho) \quad (\rho \in L_1) \quad (4.3)$$

$$\int_0^{\infty} \beta \bar{q}_0(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = q_{01}(\rho) \quad (\rho \in L_1) \quad (4.4)$$

$$\int_0^{\infty} [\Delta_{wp}(\beta)\bar{p}_0(\beta) + \Delta_{wq}(\beta)\bar{q}_0(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta = \quad (4.5)$$

$$= -\int_0^{\infty} [\Delta_{wp1}(\beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{wq1}(\beta)\bar{q}_1(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_2)$$

$$\int_0^{\infty} [\Delta_{up}(\beta)\bar{p}_0(\beta) + \Delta_{uq}(\beta)\bar{q}_0(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta = \quad (4.6)$$

$$= -\int_0^{\infty} [\Delta_{up1}(\beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{uq1}(\beta)\bar{q}_1(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_2)$$

$$\Delta_{wp} = \Delta_{wp0} - 2(1 - \nu_2)\chi_1, \quad \Delta_{wq} = \Delta_{wq0} - (1 - 2\nu_2)\chi_1 \quad (4.7)$$

$$\Delta_{up} = \Delta_{up0} - (1 - 2\nu_2)\chi_1, \quad \Delta_{uq} = \Delta_{uq0} - 2(1 - \nu_2)\chi_1$$

По методике работы [1] систему ПИУ (4.3) – (4.6) можно непосредственно свести к разрешаемому сингулярному интегральному уравнению (СИУ) на неограниченном контуре L_2 . Однако, чтобы избежать существенные дополнительные аналитические и вычислительные трудности, связанные с исследованием СИУ на неограниченном контуре, систему ПИУ (4.3) – (4.6) сначала преобразуем к равносильной системе ПИУ, которая затем по методике работы [1] сводится к удобной для аналитического и численного исследования СИУ на ограниченном контуре L_1 .

Переходим в системе ПИУ (4.3) – (4.6) к новым неизвестным трансформантам Ханкеля

$$\begin{aligned}\bar{f}(\beta) &= \Delta_{up}(\beta)\bar{p}_0(\beta) + \Delta_{uq}(\beta)\bar{q}_0(\beta) \\ \bar{g}(\beta) &= \Delta_{wp}(\beta)\bar{p}_0(\beta) + \Delta_{wq}(\beta)\bar{q}_0(\beta)\end{aligned}\quad (4.8)$$

которые соответствуют определенным на полуоси $0 \leq \rho < \infty$ функциям

$$f(\rho), g(\rho) = \begin{cases} f_1(\rho), g_1(\rho) & (\rho \in L_1) \\ f_2(\rho), g_2(\rho) & (\rho \in L_2) \end{cases}\quad (4.9)$$

Из представления (4.9) следуют равенства

$$\bar{f}(\beta) = \bar{f}_1(\beta) + \bar{f}_2(\beta), \quad \bar{g}(\beta) = \bar{g}_1(\beta) + \bar{g}_2(\beta)\quad (4.10)$$

в которых трансформанты Ханкеля $\bar{f}_2(\beta), \bar{g}_2(\beta)$ для функций $f_2(\beta), g_2(\beta)$ на контуре L_2 задаем известными функциями

$$\begin{aligned}\bar{f}_2(\beta) &= -[\Delta_{up1}(\beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{uq1}(\beta)\bar{q}_1(\beta)] \\ \bar{g}_2(\beta) &= -[\Delta_{wp1}(\beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{wq1}(\beta)\bar{q}_1(\beta)]\end{aligned}\quad (4.11)$$

Из системы равенств (4.8) находим представления старых трансформант $\bar{p}_0(\beta), \bar{q}_0(\beta)$ через новые $f(\beta), g(\beta)$ (4.10):

$$\bar{p}_0(\beta) = \Delta_{uf}(\beta)\bar{f}(\beta) + \Delta_{ug}(\beta)\bar{g}(\beta)\quad (4.12)$$

$$\bar{q}_0(\beta) = \Delta_{wf}(\beta)\bar{f}(\beta) + \Delta_{wg}(\beta)\bar{g}(\beta)$$

$$\Delta_{uf} = \Delta_{wq} / \Delta_{pq}, \quad \Delta_{ug} = -\Delta_{uq} / \Delta_{pq}\quad (4.13)$$

$$\Delta_{wf} = -\Delta_{wp} / \Delta_{pq}, \quad \Delta_{wg} = -\Delta_{up} / \Delta_{pq}$$

$$\Delta_{pq} = \Delta_{up}\Delta_{wq} - \Delta_{uq}\Delta_{wp}$$

С учетом (2.10), (4.7) можно доказать, что $\Delta_{pq} < 0$ ($0 \leq \beta < \infty$).

Подставляем формулы (4.12) и (4.8) с учетом (4.10), (4.11) соответственно в уравнения (4.3), (4.4) и (4.5), (4.6) и переносим интегралы с известными трансформантами $\bar{f}_2(\beta), \bar{g}_2(\beta)$ (4.11) в правую сторону, в результате получаем следующую систему ПИУ относительно неизвестных трансформант $\bar{f}_1(\beta), \bar{g}_1(\beta)$:

$$\int_0^{\infty} \beta [\Delta_{uf}(\beta)\bar{f}_1(\beta) + \Delta_{ug}(\beta)\bar{g}_1(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta = p_{01}(\rho) -$$

$$- \int_0^{\infty} \beta [\Delta_{uf}(\beta)\bar{f}_2(\beta) + \Delta_{ug}(\beta)\bar{g}_2(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_1)$$

$$\int_0^{\infty} \beta [\Delta_{wf}(\beta)\bar{f}_1(\beta) + \Delta_{wg}(\beta)\bar{g}_1(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta = q_{01}(\rho) -$$

$$- \int_0^{\infty} \beta [\Delta_{wf}(\beta)\bar{f}_2(\beta) + \Delta_{wg}(\beta)\bar{g}_2(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_1)$$

$$\int_0^{\infty} g_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho \in L_2)\quad (4.16)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{f}_1(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho \in L_2)\quad (4.17)$$

Далее проводим следующие преобразования уравнений последней системы: уравнение (4.14) умножаем на ρ и интегрируем по ρ в пределах от ρ_0 до ρ и затем делим на ρ ; уравнение (4.15) интегрируем по ρ в пределах от ρ_0 до ρ ; уравнение (4.16) дифференцируем по ρ ; уравнение (4.17) умножаем по ρ и дифференцируем по ρ , а затем делим на ρ . В результате получаем следующую преобразованную систему ПИУ относительно трансформант Ханкеля $\bar{f}_1(\beta), \bar{g}_1(\beta)$:

$$\int_0^{\infty} [\Delta_{wf}(\beta)\bar{f}_1(\beta) + \Delta_{wg}(\beta)\bar{g}_1(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta = F_1(\rho) + C_1 - \quad (4.18)$$

$$- \int_0^{\infty} [\Delta_{wf}(\beta)\bar{f}_2(\beta) + \Delta_{wg}(\beta)\bar{g}_2(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_1)$$

$$\int_0^{\infty} [\Delta_{uf}(\beta)\bar{f}_1(\beta) + \Delta_{ug}(\beta)\bar{g}_1(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta = G_1(\rho) + R_1(\rho) - \quad (4.19)$$

$$- \int_0^{\infty} [\Delta_{uf}(\beta)\bar{f}_2(\beta) + \Delta_{ug}(\beta)\bar{g}_2(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_1)$$

$$\int_0^{\infty} \beta \bar{f}_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho \in L_2) \quad (4.20)$$

$$\int_0^{\infty} \beta \bar{g}_1(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho \in L_2) \quad (4.21)$$

$$F_1(\rho) = - \int_{\rho_0}^{\rho} q_{01}(x) dx, \quad G_1(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\rho_0}^{\rho} x p_{01}(x) dx, \quad R_1(\rho) = \frac{D_1}{\rho} \quad (4.22)$$

где C_1, D_1 – пока произвольные постоянные. Искомые трансформанты $\bar{f}_1(\beta), \bar{g}_1(\beta)$ для неизвестных функций $f_1(\rho), g_1(\rho)$ ($\rho \in L_1$) представляем интегралами

$$\bar{f}_1(\beta) = \int_{\rho_0}^1 \rho f_1(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{g}_1(\beta) = \int_{\rho_0}^1 \rho g_1(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho \quad (4.23)$$

которые по теореме обращения Ханкеля удовлетворяют уравнениям (4.20), (4.21) автоматически. Для дальнейшего преобразования оставшейся системы двух уравнений (4.18) и (4.19) на контуре L_1 , опираясь на асимптотику (2.15) и формулы (4.7), выделяем главные члены функций $\Delta_{wk}(\beta), \Delta_{uk}(\beta)$ ($k = f, g$) (4.13) и устанавливаем порядок следующих старших членов при $\beta \rightarrow \infty$

$$(\Delta_{wf}, \Delta_{ug}) = A + (\Delta_{wf}^*, \Delta_{ug}^*), \quad (\Delta_{wg}, \Delta_{uf}) = B + (\Delta_{wg}^*, \Delta_{uf}^*) \quad (4.24)$$

$$A = c/(d^2 - c^2), \quad B = d/(d^2 - c^2)$$

$$c = 2(1 - v_1 + (1 - v_2)\chi_1), \quad d = 1 - 2v_1 - (1 - 2v_2)\chi_1 \quad (4.25)$$

$$\Delta_{wf}^*(\beta), \Delta_{ug}^*(\beta) = O[(\lambda\beta)^2 e^{-2\lambda\beta}] \quad (k = f, g)$$

С учетом формул (4.24) в левых частях уравнений (4.18), (4.19) они записываются в форме

$$\int_0^{\infty} [(A + \Delta_{wf}^*)\bar{f}_1(\beta) + (B + \Delta_{wg}^*)\bar{g}_1(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta = F_1(\rho) + C_1 -$$

$$-\int_0^{\infty} \left[\Delta_{wf}(\beta) \bar{f}_2(\beta) + \Delta_{wg}(\beta) \bar{g}_2(\beta) \right] J_0(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_1) \quad (4.26)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(B + \Delta_{wf}^*) \bar{f}_1(\beta) + (A + \Delta_{wg}^*) \bar{g}_1(\beta) \right] J_1(\rho\beta) d\beta = G_1(\rho) + R_1(\rho) -$$

$$-\int_0^{\infty} \left[\Delta_{wf}(\beta) \bar{f}_2(\beta) + \Delta_{wg}(\beta) \bar{g}_2(\beta) \right] J_1(\rho\beta) d\beta \quad (\rho \in L_1) \quad (4.27)$$

На систему интегральных уравнений (4.26), (4.27) полностью распространяется математический аппарат исследования аналогичной системы в основной смешанной задаче [1]. Применяя его, сводим систему (4.26), (4.27) к следующему разрешающему сингулярному уравнению (СИУ) с ядром Коши для комплексной функции действительного переменного $\omega(x) = \varphi(x) + i\vartheta(x)$:

$$\begin{aligned} A\omega(x) + \frac{B}{\pi i} \int_{\rho_0}^1 \frac{\omega(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\rho_0}^1 \frac{K_1(x,t)\omega(t) + K_2(x,t)\bar{\omega}(t)}{\sqrt{(x-\rho_0)(t-\rho_0)}} dt = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{F(x) + G(x)}{\sqrt{(x-\rho_0)}} \quad (\rho_0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (4.28)$$

содержащему вместе с неизвестной функцией $\omega(x)$ и ее сопряженную $\bar{\omega}(x) = \varphi(x) - i\vartheta(x)$. Здесь регулярные ядра $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$ и свободные члены $F(x)$, $G(x)$ представляются следующими комплексными функциями действительного переменного:

$$K_1(x, t) = K_{00}(x, t) + K_{11}(x, t) + i[K_{10}(x, t) - K_{01}(x, t)]$$

$$K_2(x, t) = K_{00}(x, t) - K_{11}(x, t) + i[K_{10}(x, t) + K_{01}(x, t)]$$

$$K_{00} = G_{00}(x, t) + \frac{2}{\pi} AM_{00}(x, t), \quad G_{00} = x \int_0^{\infty} \Delta_{wf}^*(\beta) S_0(x, \beta) S_0(t, \beta) d\beta$$

$$K_{01} = G_{01}(x, t) + BM_{01}(x, t), \quad G_{01} = x \int_0^{\infty} \Delta_{wg}^*(\beta) S_0(x, \beta) S_1(t, \beta) d\beta$$

$$K_{10} = G_{10}(x, t) + BM_{10}(x, t), \quad G_{10} = t \int_0^{\infty} \Delta_{wf}^*(\beta) S_1(x, \beta) S_0(t, \beta) d\beta$$

$$K_{11} = G_{11}(x, t) + \frac{2}{\pi} AM_{11}(x, t), \quad G_{11} = \int_0^{\infty} \Delta_{wg}^*(\beta) S_1(x, \beta) S_1(t, \beta) d\beta$$

$$S_0(x, \beta) = \frac{J_0(\rho_0\beta)}{\sqrt{x+\rho_0}} - \beta\sqrt{x-\rho_0} \int_{\rho_0}^x \frac{J_1(\rho\beta)}{\sqrt{x^2-\rho^2}} d\rho$$

$$S_1(x, \beta) = \frac{\rho_0 J_1(\rho_0\beta)}{\sqrt{x+\rho_0}} + \beta\sqrt{x-\rho_0} \int_{\rho_0}^x \frac{\rho J_0(\rho\beta)}{\sqrt{x^2-\rho^2}} d\rho$$

$$M_{00}(x, t) = \frac{x t m_{00}(x, t)}{\sqrt{(x+\rho_0)(t+\rho_0)}}, \quad M_{11}(x, t) = \frac{m_{11}(x, t)}{\sqrt{(x+\rho_0)(t-\rho_0)}}$$

$$m_{00}(x, t) = \frac{1}{2(x^2-t^2)} \left(\frac{x^2-\rho_0^2}{x} \ln \frac{x+\rho_0}{x-\rho_0} - \frac{t^2-\rho_0^2}{t} \ln \frac{t+\rho_0}{t-\rho_0} \right)$$

$$m_{11}(x, t) = -\rho_0 + \frac{1}{2(x^2 - t^2)} \left(x(x^2 - \rho_0^2) \ln \frac{x + \rho_0}{x - \rho_0} - t(t^2 - \rho_0^2) \ln \frac{t + \rho_0}{t - \rho_0} \right)$$

$$M_{01}(x, t) = \frac{\sqrt{(x - \rho_0)(t - \rho_0)}}{t - x} \left(\frac{x}{t + x} \sqrt{\frac{t^2 - \rho_0^2}{x^2 - \rho_0^2}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$M_{10}(x, t) = \frac{\sqrt{(x - \rho_0)(t - \rho_0)}}{t - x} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{t + x} \sqrt{\frac{x^2 - \rho_0^2}{t^2 - \rho_0^2}} \right)$$

$$F(x) = F_1(x) + iF_2(x), \quad G(x) = \frac{C_1 x + iD_1}{\sqrt{x + \rho_0}}$$

$$F_1(x) = -x\sqrt{x - \rho_0} \int_{\rho_0}^x \frac{q_{01}(\rho)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho - x \int_0^{\infty} [\Delta_{wf}(\beta) \bar{f}_2(\beta) + \Delta_{wg}(\beta) \bar{g}_2(\beta)] S_0(x, \beta) d\beta \quad (4.29)$$

$$F_2(x) = \sqrt{x - \rho_0} \int_{\rho_0}^x \frac{p\rho_{01}(\rho)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho - \int_0^{\infty} [\Delta_{uf}(\beta) \bar{f}_2(\beta) + \Delta_{ug}(\beta) \bar{g}_2(\beta)] S_1(x, \beta) d\beta$$

Функции $m_{00}(x, t)$, $m_{11}(x, t)$, $M_{01}(x, t)$, $M_{10}(x, t)$ при $t = x$ принимаются равными их предельным значениям при $t \rightarrow x$, которые определяются по правилу Лопиталья.

Неизвестные трансформанты $\bar{f}_1(\beta)$, $\bar{g}_1(\beta)$ определяются через действительную и мнимую части $\varphi(x)$, $\vartheta(x)$ комплексной функции $\omega(x)$, удовлетворяющей СИУ (4.28), по формулам

$$\bar{f}_1(\beta) = \int_{\rho_0}^1 \frac{x\varphi(x)S_0(x, \beta)}{\sqrt{x - \rho_0}} dx, \quad \bar{g}_1(\beta) = \int_{\rho_0}^1 \frac{\vartheta(x)S_1(x, \beta)}{\sqrt{x - \rho_0}} dx \quad (4.30)$$

Из теории тождественного преобразования системы ПИУ (4.18) – (4.21) в СИУ (4.28) автоматически следует, что трансформанты $\bar{f}_1(\beta)$, $\bar{g}_1(\beta)$ (4.30) обращают все уравнения (4.18) – (4.21) в тождества.

Проверим теперь равносильность исходной и преобразованной системы ПИУ (4.14) – (4.17) и (4.18) – (4.21) с учетом (4.30). Дифференцируя тождество (4.18) по ρ , получим тождество (4.15). Тождество (4.19) умножим на ρ и продифференцируем по ρ , а затем разделим на ρ ; в результате получим тождество (4.14). Подставим формулы (4.30) с учетом формул для $S_0(x, \beta)$, $S_1(x, \beta)$ из (4.29) в уравнения (4.16), (4.17), поменяем в двойных интегралах порядок интегрирования и проведем интегрирование по β ; в результате находим

$$\int_0^{\infty} \bar{g}_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = \begin{cases} \int_{\rho_0}^1 \frac{\vartheta(x)}{\sqrt{x^2 - \rho_0^2}} dx & \text{при } \rho < \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho > 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{f}_1(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho < \rho_0 \\ \frac{1}{\rho} \int_{\rho_0}^1 \frac{x\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - \rho_0^2}} dx & \text{при } \rho > 1 \end{cases} \quad (4.32)$$

Равенства (4.31), (4.32) показывают, что уравнения (4.16), (4.17) удовлетворяются только при дополнительных условиях:

$$\int_{\rho_0}^1 \frac{x\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - \rho_0^2}} dx = 0, \quad \int_{\rho_0}^1 \frac{\vartheta(x)}{\sqrt{x^2 - \rho_0^2}} dx = 0 \quad (4.33)$$

из которых определяются произвольные постоянные C_1, D_1 в правой части СИУ (4.28), входящие в $G(x)$ из (4.29).

Чтобы удовлетворить условиям (4.33), решение СИУ (4.28) ищем в форме

$$\omega(x) = \omega_1(x) + C_1 \omega_2(x) + D_1 \omega_3(x) \quad (4.34)$$

где $\omega_j(x) = \varphi_j(x) + i\vartheta_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) представляют собой решения СИУ (4.28) с учетом в правой части при $j = 1$: $C_1 = D_1 = 0$; при $j = 2$: $F(x) \equiv 0, C_1 = 1, D_1 = 0$; при $j = 3$: $F(x) \equiv 0, C_1 = 0, D_1 = 1$. Подставляя действительные и мнимые части функции $\omega(x)$ (4.34) в равенства (4.33) получаем замкнутую систему двух уравнений относительно C_1, D_1 , из которой и находим искомые постоянные.

5. Построение решения задачи о круговой трещине. Постановка и решение задачи о круговой трещине на контуре $L_1 = (0 \leq \rho \leq 1)$ повторяет все выкладки п. 4 с учетом $\rho_0 = 0$ и $L_2 = (1 \leq \rho < \infty)$. При этом преобразованную систему ПИУ (4.18) – (4.21) по методике работы [1] сводим к следующей разрешающей СИУ для комплексной функции $\omega(x) = \varphi(x) + i\vartheta(x)$ на симметричном отрезке $-1 \leq x \leq 1$:

$$A\omega(x) + \frac{B}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{t-x} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (K_1(x, t)\omega(t) + K_2(x, t)\bar{\omega}(t)) dt = \frac{2}{\pi} (F(x) + C_1) \quad (5.1)$$

$$K_{00}(x, t) = \int_0^\infty \Delta_{wf}^*(\beta) \cos(x\beta) \cos(t\beta) d\beta, \quad K_{01}(x, t) = \int_0^\infty \Delta_{wg}^*(\beta) \cos(x\beta) \sin(t\beta) d\beta \quad (5.2)$$

$$K_{10}(x, t) = \int_0^\infty \Delta_{wf}^*(\beta) \sin(x\beta) \cos(t\beta) d\beta, \quad K_{10}(x, t) = \int_0^\infty \Delta_{ug}^*(\beta) \sin(x\beta) \sin(t\beta) d\beta$$

$$F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$$

$$F_1(x) = -x \int_0^x \frac{q_{01}(\rho)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho - \int_0^\infty [\Delta_{wf}(\beta) \bar{f}_2(\beta) + \Delta_{wg}(\beta) \bar{g}_2(\beta)] \cos(x\beta) d\beta$$

$$F_2(x) = \int_0^x \frac{\rho p_{01}(\rho)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho - \int_0^\infty [\Delta_{wf}(\beta) \bar{f}_2(\beta) + \Delta_{ug}(\beta) \bar{g}_2(\beta)] \sin(x\beta) d\beta \quad (5.3)$$

где постоянные A, B и все используемые в формулах (5.1) – (5.3) функции определены в п. 4.

Неизвестные трансформанты $\bar{f}_1(\beta), \bar{g}_1(\beta)$ выражаются через четную $\text{Re } \omega(x) = \varphi(x)$ и нечетную $\text{Im } \omega(x) = \vartheta(x)$ функции по формулам

$$\bar{f}_1(\beta) = \int_0^1 \varphi(x) \cos(x\beta) dx, \quad \bar{g}_1(\beta) = \int_0^1 \vartheta(x) \sin(x\beta) dx \quad (5.4)$$

которые удовлетворяют трем уравнениям (4.14) – (4.16) исходной системы ПИУ. Подстановка $\bar{f}_1(\beta)$ (5.4) в левую часть уравнения (4.17) приводит к равенству

$$\int_0^\infty \bar{f}_1(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = \frac{1}{\rho} \int_0^1 \varphi(x) dx \quad (5.5)$$

из которого вытекает дополнительное условие для решения СИУ (5.1)

$$\int_0^\infty \text{Re } \omega(x) dx = 0 \quad (5.6)$$

Чтобы удовлетворить условию (5.6), ищем решение СИУ (5.1) в форме $\omega(x) = \omega_1(x) + C_1 \omega_2(x)$, где $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ – частные решения соответственно при $C_1 = 0$ и $F(x) \equiv 0$,

$C_1 = 1$. Подставляя это решение в равенство (5.6), получаем уравнение, из которого находим постоянную C_1 в правой части СИУ (5.1):

$$C_1 = -\int_0^1 \operatorname{Re} \omega_1(x) dx \Big/ \int_0^1 \operatorname{Re} \omega_2(x) dx \quad (5.7)$$

В заключение поясним, что вторая постоянная D_1 , входящая в уравнение (4.19) через $R_1(\rho)$ (4.22), в связи с неустойчивостью принимается равной нулю ($D_1 = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никишин В.С.* Корректная постановка и численное решение основных и смешанных задач теории упругости для многослойных и непрерывно-неоднородных сред: Докторская дис. на соиск. учен. степ. док-ра физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 413 с.
2. *Никишин В.С., Шапиро Г.С.* О локальном осесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой или круговой щелью // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 139–144.
3. *Никишин В.С., Шапиро Г.С.* Контактная задача теории упругости для слоя, локально прижатого к полупространству // Изв. АН АрмССР. Механика. 1976. Т. 29. № 2. С. 3–15.
4. *Вайшельбаум В.М., Гольдштейн Р.В.* Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде // МТТ. 1976. № 2. С. 130–143.
5. *Goldstein R.V., Vainshelbaum V.M.* Axisymmetric problem of a crack at the interface of layers in a multi-layered medium // Int. J. of Eng. Sci. 1976. V. 14. № 4. P. 81–95.
6. *Никишин В.С., Шапиро Г.С.* Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1970. 260 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.10.1998