МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2001

УДК 539.375

© 2001 г. И.М. ЛАВИТ

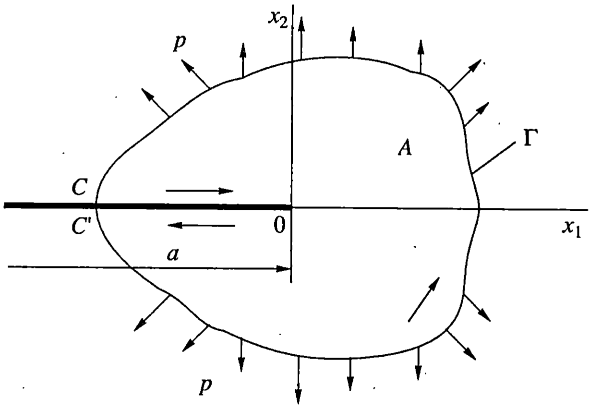
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ОКРЕСТНОСТИ КОНЧИКА ТРЕЩИНЫ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Формулировка энергетических соотношений для упругопластического тела, содержащего трещину, являлась предметом многочисленных исследований[1]. Почти все они были направлены на изучение только одной модели трещины – трещины Гриффитса [2], кромки которой не взаимодействуют. Стремление более детально описать напряженно-деформированное состояние окрестности кончика трещины имело следствием создание модели трещины с зоной сцепления – трещины Баренблатта [3–7]. Рост такой трещины в упругопластической среде в термодинамическом аспекте исследовался в работах [8–11]. Основное отличие данного исследования от предыдущих заключается в более строгом анализе исходных допущений в выяснении условий эквивалентности обеих моделей трещины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим рост трещины нормального отрыва в плоскодеформированной упругопластической среде. На фиг. 1 изображена окрестность кончика трещины – область A, ограниченная замкнутым односвязным контуром Γ. Последний достаточно произволен: в предельных случаях он может совпадать с граничным контуром рассматриваемой области – поперечного сечения тела, или быть стянутым в точку – кончик трещины. Контур Γ состоит из дуг $C'C$, CO, OC' ($\Gamma: C'C \cup CO \cup OC'$), проходимых последовательно против часовой стрелки. Приложенные к контуру Γ нагрузки $\mathbf{p}$ обусловлены механическим воздействием на область A остальной части поперечного сечения тела и, если часть контура Γ совпадает с частью граничного контура сечения, действием внешних сил. То же самое относится к вектору теплового потока $\mathbf{q}$ на контуре Γ. Стрелками указано направление обхода контура; x_m – координаты, жестко связанные с телом; a – длина трещины. Будем рассматривать квазистатическое движение сплошной среды, то есть движение, при описании которого можно пренебречь инерционными силами. Поэтому в приведенных ниже формулах под временем τ подразумевается любой подходящий времениподобный параметр. Для упрощения анализа (но без потери общности) будем считать деформации малыми. Тензор деформаций представляется суммой $\varepsilon_{mk} = \varepsilon^e_{mk} + \varepsilon^p_{mk}$, где индекс e относится к упругим деформациям, а индекс p – к пластическим. Запишем уравнение энергетического баланса (первый закон термодинамики) для области A. Пусть трещина неподвижна. Справедливы соотношения [12]:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = P + Q, \quad W = \int\limits_A w dA, \quad P = \int\limits_\Gamma p_k \frac{\partial u_k}{\partial \tau} d\Gamma, \quad Q = -\int\limits_\Gamma n_k q_k d\Gamma \tag{1.1}$$

[1] Далеко не полный обзор приведен в работе [1].



Фиг. 1

Здесь W – внутренняя энергия (w – соответствующая удельная величина), P – мощность внешних сил, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, Q – интенсивность теплообмена с окружающей средой, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к контуру Г. Выразим удельную внутреннюю энергию через удельную свободную энергию f, абсолютную температуру T и удельную энтропию s [13]:

$$w = f + Ts \tag{1.2}$$

Преобразуя выражение для Q по формуле Гаусса – Остроградского, получим

$$P = \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + s\frac{\partial T}{\partial \tau} + T\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) dA \tag{1.3}$$

Удельная свободная энергия f – это функция состояния, зависящая только от параметров состояния; в данном случае $f = f(\varepsilon^e_{mk},\ T)$. Предположим, что контурный интеграл в левой части равенства (1.3) можно преобразовать в интеграл по области A. Тогда, с учетом равенства $p_k = n_m \sigma_{mk}$, где σ_{mk} – тензор напряжений, получим, при выполнении уравнений равновесия $\partial\sigma_{mk}/\partial x_k = 0$, $\sigma_{mk} = \sigma_{km}$, локальную форму первого закона термодинамики в виде

$$\sigma_{mk}\frac{\partial \varepsilon^e_{mk}}{\partial \tau} + \sigma_{mk}\frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^2_{mk}}\ \frac{\partial \varepsilon^e_{mk}}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial T}\ \frac{\partial T}{\partial \tau} + s\frac{\partial T}{\partial \tau} + T\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \tag{1.4}$$

Дальнейший вывод основан на предположении, что если теплообмен с окружающей средой отсутствует ($Q = 0$) и теплота внутри области A не производится ($\partial\varepsilon^p_{mk} / \partial\tau = 0$), то удельная энтропия неизменна. Вместо уравнения (1.4) получим

$$\sigma_{km} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^e_{mk}}, \quad s = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad T\frac{\partial s}{\partial \tau} = \sigma_{km}\frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial \tau} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \tag{1.5}$$

С учетом соотношений (1.5) равенство (1.3) преобразуется так

$$P = \frac{\partial}{\partial \tau}\int_A f dA + \int_A \left(\sigma_{km}\frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial \tau} - \frac{\partial f}{\partial T}\ \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) dA \tag{1.6}$$

Это соотношение является основным для дальнейшего анализа.

2. Трещина Гриффитса. Рассмотрим вначале случай покоящейся трещины. Выражение (1.6) получено с использованием формулы Гаусса – Остроградского, и поэтому необходимо выяснить, выполняются ли условия ее справедливости для области с трещиной Гриффитса, кончик которой является особой точкой полей напряжений и деформаций. Отметим, что подынтегральная функция в контурном интеграле в левой части уравнения (1.6) непрерывна, подынтегральные функции в интегралах по области A непрерывны внутри области интегрирования. Таким образом, для справедливости формулы Гаусса – Остроградского в данном случае необходимо, чтобы несобственные интегралы в правой части (1.6) были бы сходящимися [14]. Пусть r, θ – полярные координаты точки плоскости с началом координат в кончике трещины. Если при $r \to 0$ подынтегральная функция в интеграле по области A ведет себя как $r^{-\alpha}$, то интеграл сходится при $\alpha < 2$ (достаточное условие) [14]. В случае покоящейся трещины из асимптотических формул для напряжений и деформаций как при упругом, так и при упругопластическом деформировании получается $\alpha = 1$ [15] – формула Гаусса – Остроградского применима.

Рассмотрим теперь случай растущей трещины. Здесь в качестве времениподобного параметра τ удобно выбрать длину трещины a. Равенство (1.6) принимает вид

$$P = \int\limits_{\Gamma} p_k \frac{\partial u_k}{\partial a} d\Gamma - H = \int\limits_{A} \left(\frac{\partial f}{\partial a} + \sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial a} \right) dA \qquad (2.1)$$

Появление слагаемого H обусловлено тем, что при увеличении длины трещины на бесконечно малую величину da напряжения σ_{22} на образовавшейся поверхности убывают до нуля, а кромки трещины расходятся. При этом совершается работа $-Hda$, где величина H, как показал Ирвин [16], конечна вследствие сингулярности поля напряжений в кончике трещины[2].

В данном случае, так же, как и выше, необходимо выяснить правомерность применения формулы Гаусса – Остроградского. Дифференцирование по a, использованное в (2.1), повышает степень сингулярности на единицу. В этом можно убедиться, рассмотрев, например, квазистатический рост трещины нормального отрыва в линейно упругой среде при постоянном коэффициенте интенсивности напряжений. В области справедливости асимптотических формул для напряжений, деформаций и перемещений для всех этих величин будет выполняться равенство $\partial f/\partial a = -\partial f/\partial x_1$ [17]. Дифференцирование по x_1 выражения, которое ведет себя при $r \to 0$ как $r^{-\alpha}$, приводит к выражению, изменяющемуся как $r^{-\alpha-1}$. Таким образом, достаточное условие применимости формулы Гаусса – Остроградского в данном случае не выполняется, и поэтому справедливость уравнения (2.1) необходимо постулировать.

Подойдем к рассмотрению проблемы формулировки энергетических соотношений для тела с растущей трещиной с другой стороны. Пусть теперь контур Γ жестко связан с кончиком трещины и перемещается вместе с ним. Отметим, что в отличие от предыдущего случая в пределах области A при росте трещины новой поверхности не образуется, следовательно, в уравнении (1.6), справедливость которого и в данном случае, вследствие сингулярности поля напряжений, необходимо постулировать, не будет величины H. Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma} p_k \frac{du_k}{da} d\Gamma = \frac{d}{da} \int\limits_{A} f dA + \int\limits_{A} \left(\sigma_{km} \frac{d\varepsilon^p_{mk}}{da} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{dT}{da} \right) dA \qquad (2.2)$$

Символом d/da обозначено дифференцирование в подвижной системе координат, жестко связанной с кончиком трещины. Все величины, входящие в подынтегральные

---

[2] Величина H определяется напряженно-деформированным состоянием бесконечно-малой окрестности кончика трещины, что делает ее независимой от формы и размеров области A.

выражения равенства (2.2), представляют собой функции времени (в данном случае – длины трещины) и неподвижных координат x_k. При вычислении частной производной $\partial f/\partial a$ сравниваются значения функции f в одной и той же точке x_k. Но при вычислении производной df/da нужно учесть, что за "время" da координаты x_k рассматриваемой точки, жестко связанной с кончиком трещины, вследствие того, что область A движется относительно неподвижной системы координат, связанной с материальной средой, со скоростью $\mathbf{V}\,(V_1 = da/da = 1,\ V_2 = 0)$, приобретут приращения $dx_k = V_k da$. Поэтому

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{2.3}$$

При вычислении производной от интеграла по площади следует учесть поток подынтегральной функции, обусловленный движением области A относительно неподвижной системы координат x_k, через граничный контур Γ [18]. Равенство (2.2) преобразуется к виду

$$\int_\Gamma p_k\left(\frac{\partial u_k}{\partial a} + V_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right) d\Gamma = \int_\Gamma n_k V_k f d\Gamma +$$

$$+\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial a} + \sigma_{km}\frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial a} + \sigma_{km} V_j \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial T} V_j \frac{\partial T}{\partial x_j}\right)$$

или с учетом соотношений (2.1), (2.3):

$$H = \int_\Gamma p_k \frac{\partial u_k}{\partial a} d\Gamma - \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial a} + \sigma_{km}\frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial a}\right) dA = J + \int_A \left(\sigma_{km}\frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) dA$$

$$J = \int_\Gamma \left(f dx_2 - p_k \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right) d\Gamma \tag{2.4}$$

Здесь J – контурный J-интеграл Эшелби – Черепанова – Райса [15].

Будем рассматривать рост трещины при T = const. Пусть материальная среда, в которой распространяется трещина, может деформироваться только упруго. В этом случае величина H тождественно совпадает с J-интегралом. Для линейно упругой среды J-интеграл связан с коэффициентом интенсивности напряжений K_1 формулой [15] $K_1 = \sqrt{EJ/(1-\nu^2)}$, где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Сформулируем критерий роста трещины в хрупком материале, который моделируется линейно-упругой сплошной средой, – критерий Гриффитса [2]: при росте трещины выполняется соотношение $J = H = J_{IC}$, где J_{IC} – материальная константа, равная 2γ, где γ – удельная поверхностная энергия. Критерий Гриффитса имеет отчетливый физический смысл [2]: энергия, необходимая для удлинения трещины, высвобождается упругим телом за счет уменьшения жесткости при росте трещины.

Рассмотрим теперь распространение трещины в условиях квазихрупкого разрушения [19, 20]. Пусть пластические деформации сосредоточены в малой области $A_0 (A_0 \subset A)$, прилегающей к кончику трещины. Из формул (2.4) получим выражение для J-интеграла

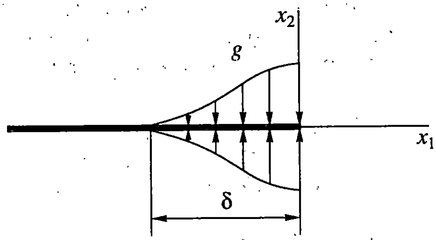
$$J = H - \int_{A_0} \sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial x_1} dA_0 \tag{2.5}$$

В теории Ирвина – Орована предполагается, что при росте трещины правая часть формулы (2.5) неизменна и равна материальной константе J_{IC}; при этом величина J

определяется методами линейной механики разрушения. Если по-прежнему при росте трещины $H = 2\gamma$, то получается, что $J_{IC} \neq 2\gamma$, то есть J_{IC} теперь это не та же самая константа, что была определена для хрупкого разрушения. По теоретическим оценкам [17] для типичных металлов J_{IC} превосходит величину 2γ в $10^3 - 10^4$ раз.

Момент старта трещины без ограничений теории квазихрупкого разрушения исследован Райсом [15]. Если при нагружении тела с неподвижной трещиной реализуются условия простого нагружения, то и в начальный период роста трещины они будут еще выполняться. А это значит, что для описания пластического деформирования можно использовать деформационную теорию пластичности. При этом упругопластическое деформирование среды, в которой распространяется трещина, эквивалентно деформированию нелинейно упругого материала. Выбрав подходящую зависимость для f, можно получить из формул (2.4) соотношение $J = H$. Критерий роста трещины формулируется так: трещина начинает расти, как только величина J достигнет значения J_{IC} – материальной константы. Опыт показывает, что величина J_{IC} в данном случае не равна 2γ, как можно было бы ожидать, – нет, она точно такая же, как и определенная с использованием представления (2.5) на образцах, при деформировании которых выполняются условия квазихрупкого разрушения. Чтобы согласовать теорию Райса с теорией квазихрупкого разрушения, следует предположить, в согласии с экспериментом [21][3], что пластическую область вокруг кончика трещины можно, в первом приближении, разделить на две: область значительных пластических деформаций A_0 и охватывающую ее область умеренных пластических деформаций. Свойства области A_0 определяются гипотезами Ирвина – Орована, то есть справедливо представление (2.5). Пластические же деформации, фигурирующие в теории Райса и обусловливающие нелинейность краевой задачи, по результатам решения которой находится левая часть уравнения (2.5), – это упомянутые умеренные пластические деформации. В случае их отсутствия трещина растет в условиях квазихрупкого разрушения.

3. Трещина Баренблатта. Пусть к кромкам трещины в окрестности ее кончика приложены равные по величине распределенные нагрузки (силы сцепления) **g**, притягивающие кромки друг к другу (фиг. 2). Силы сцепления действуют на отрезке



Фиг. 2

$x_1 \in [-\delta, 0]$ (в концевой области [3–5]). Их распределение может быть практически любым, но при обязательном выполнении следующих условий:

1) распределение внешних нагрузок и сил сцепления таково, что напряжения в кончике трещины конечны [3–7];

2) эпюра сил сцепления (см. фиг. 2) ограничена гладкой кривой $|\mathbf{g}| = f(x_1)$.

Эта функция монотонно возрастает на отрезке $[-\delta, 0]$; ее производные на концах отрезка равны нулю.

Требование равенства нулю производных на концах интервала обусловлено тем,

[3] На работу [21] обратил внимание автора Г.И. Баренблатт.

что трещина, а с ней и концевая область могут перемещаться. Напряжения при этом должны изменяться непрерывно.

Сформулируем энергетические соотношения для области, содержащей трещину, в данном случае. Так же, как и выше, рассмотрим область A, ограниченную контуром Г (см. фиг. 1). Обозначим через l часть контура Г, к которой приложены силы сцепления. Пусть вначале трещина неподвижна. Вместо уравнения (2.1) будем иметь

$$P=\int_{\Gamma} p_k \frac{\partial u_k}{\partial \tau} d\Gamma + \int_{l} g_k \frac{\partial u_k}{\partial \tau} dl = \int_{A} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial \tau} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) dA \tag{3.1}$$

Так как в данном случае кончик трещины не является особой точкой поля напряжений, нет необходимости обосновывать применимость формулы (3.1). Эта же формула применима и для распространяющейся трещины с той лишь разницей, что в качестве параметра времени теперь в ней фигурирует длина трещины a:

$$P=\int_{\Gamma} p_k \frac{\partial u_k}{\partial a} d\Gamma + \int_{l} g_k \frac{\partial u_k}{\partial a} dl = \int_{A} \left(\frac{\partial f}{\partial a} + \sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial a} \right) dA \tag{3.2}$$

В данном случае, в отличие от трещины Гриффитса, дополнительное слагаемое, обусловленное увеличением поверхности тела за счет роста трещины, не появляется, потому что это слагаемое не является бесконечно малой величиной, только если кончик трещины – особая точка поля напряжений. При обозначении

$$H=-\int_{l} g_k \frac{\partial u_k}{\partial a} dl \tag{3.3}$$

получается соотношение, формально ничем не отличающееся от равенства (2.1). Обозначение H для мощности сил сцепления (с обратным знаком) выбрано не случайно. Выражение (3.3) представляет собой математическую формулировку предположения, согласно которому состояние трещины (покой или движение) обусловлено действием сил сцепления [3–5].

Далее, как и для трещины Гриффитса, выводится уравнение энергетического баланса для области, ограниченной контуром, жестко связанным с кончиком трещины. Ход рассуждений здесь тот же самый, который приводит к формуле (2.4). В результате получим

$$\int_{\Gamma} p_k \frac{\partial u_k}{\partial a} d\Gamma - H - \int_{A} \left(\frac{\partial f}{\partial a} + \sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial a} \right) dA =$$

$$= J - \int_{l} g_k \frac{\partial u_k}{\partial x_1} dl + \int_{A} \left(\sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) \tag{3.4}$$

Так как левая часть уравнения (3.4) равна нулю (см. формулу (3.2)), его можно записать в виде

$$J^* = \int_{l} g_k \frac{\partial u_k}{\partial x_1} dl = J + \int_{A} \left(\sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon^p_{mk}}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) dA \tag{3.5}$$

Из сопоставления формул (3.5) и (2.4) напрашивается отождествление величин H и J^*. Однако не надо забывать, что правые части этих уравнений находятся по результатам решения разных краевых задач: с силами сцепления и без них. Сформулируем условия выполнения равенства $H = J^*$. Пусть при распространении трещины напряженно-деформированное состояние окрестности ее кончика, включающей концевую область, остается неизменным в системе отсчета, жестко связанной с кончиком трещины [3–5]. В соответствии с формулой (2.3) имеем

$$du_k / da = \partial u_k / \partial a + \partial u_k / \partial x_1 = 0, \quad H = J^* \tag{3.6}$$

Сделанное предположение может считаться справедливым только при упругом деформировании. Если возможны пластические деформации, напряженно-деформированное состояние окрестности кончика трещины при ее росте должно постоянно меняться, хотя бы вследствие роста области разгрузки и полей остаточных деформаций и напряжений позади ее кончика. Но можно принять допущение, что стационарное напряженно-деформированное состояние, характеризующееся условием $H = J^*$, представляет собой предельное состояние, отличие от которого в реальном процессе роста трещины становится пренебрежимым уже вскоре начала ее роста.

Рассмотрим частные случаи полученных соотношений. Пусть T = const и пластические деформации равны нулю. Получим $H = J^* = J$ – формулу Райса [15], выражающую J-интеграл через силы сцепления. В случае хрупкого разрушения справедлив критерий Гриффитса: при росте трещины выполняется соотношение $H = J^* = J = 2\gamma$. При квазихрупком разрушении справедлива формула (2.5). Можно сохранить условие $J^* = J$ и одновременно выражение величины J^* через силы сцепления (3.5), если принять следующую гипотезу Баренблатта [22]: существует распределение сил сцепления, моделирующее, в дополнение к взаимодействию кромок трещины, действие области значительных пластических деформаций A_0 на остальной материал.

Предположим возможность существования двух зон пластической деформации (см. выше). При этом для трещины Гриффитса получается в общем случае роста трещины уравнение

$$J + \int\limits_A \left(\sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon_{mk}^p}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) dA = J_{IC} \tag{3.7}$$

а для трещины Баренблатта – уравнение, ничем от него не отличающееся за исключением слагаемого, содержащего силы сцепления

$$J^* = \int\limits_l g_k \frac{\partial u_k}{\partial x_1} dl = J + \int\limits_A \left(\sigma_{km} \frac{\partial \varepsilon_{mk}^p}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) dA = J_{IC} \tag{3.8}$$

Пластические деформации, фигурирующие в формулах (3.7), (3.8), – это "умеренные" пластические деформации (см. выше).

И уравнение (3.7), и уравнение (3.8) использовались в численных исследованиях процесса роста трещины в упругопластической среде (см., например, работы [1], [23] и др.). Отметим, что нахождение величин, входящих в уравнение (3.7), предполагает наличие вычислительных процедур, позволяющих преодолевать проблемы, связанные с сингулярностью поля напряжений в кончике трещины, применительно к численному решению упругопластической задачи. Такие процедуры не известны. Противоположная ситуация имеет место при учете действия сил сцепления [23]. Решение упругопластической задачи в данном случае находится методом упругих решений Ильюшина [24]. Возможность использования этого метода обусловлена регулярностью поля напряжений в кончике трещины. Однако при использовании уравнения (3.8) необходимо априори задавать определенный закон изменения сил сцепления $g(x_1)$ – и это сразу обесценивает получаемые результаты. Корректный подход к решению задачи может быть таков. Вначале исследуется рост трещины без привлечения гипотез Ирвина – Орована, то есть без разбиения пластической зоны на две. Силы сцепления, фигурирующие в этом решении, моделируют взаимодействие кромок трещины, и их вклад в сопротивление распространению трещины на несколько порядков меньше вклада суммарных сил сцепления (3.8). При некотором приращении длины трещины сформируется зона сравнительно больших пластических деформаций и получится соответствующее ей распределение сил сцепления, которое можно использовать в уравнении (3.8). Отметим, что это распределение не должно, в силу несоизмеримости величин 2γ и J_{IC}, заметно зависеть от принятого закона для "истинных" сил сцепления, моделирующих притяжение кромок трещины.

Отметим, что условие роста трещины при решении такой задачи не сводится к замене J_{IC} на 2γ в правой части уравнения (3.8), так как на начальном этапе роста трещины окрестность кончика трещины далека от стационарного состояния.

Автор благодарен проф. Л.А. Толоконникову (1923–1998) за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00121).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атлури С.* Применение в механике разрушения энергетических методов и интегралов, не зависящих от пути интегрирования // Вычислительные методы в механике разрушения. М.: Мир, 1990. С. 129–179.
2. *Griffith A.A.* The phenomenan of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163–198.
3. *Баренблатт Г.И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434–444.
4. *Баренблатт Г.И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 706–721.
5. *Баренблатт Г.И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 893–900.
6. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Розвиток наiдрiбнiших трiщин в твердому тiлi // Прикладна механiка. 1959. Т. 5. Вiп. 4. С. 391–401.
7. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. V. 8. No. 2. P. 100–104.
8. *Strifors H.C.* A generalized force measure of conditions at crack tips // Intern. J. Solids and Struct. 1974. V. 10. No. 12. P. 1389–1404.
9. *Gurtin M.E.* Thermodynamics and the cohesive zone in fracture // ZAMP. 1979. V. 30. No. 6. P. 991–1003.
10. *Лавит И.М., Толоконников Л.А.* Силы сцепления и *J*-интеграл // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1985. № 1. С. 28–30.
11. *Лавит И.М.* Силы сцепления в механике разрушения // Изв. Тульского гос. университета. Математика, механика, информатика. 1995. Т. 1. Вып. 2. С. 80–89.
12. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
13. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
14. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1967. 608 с.
15. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
16. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
17. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
18. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 311 с.
19. *Irwin G.R.* Fracture dynamics // Fracturing of metals. Cleveland: ASM, 1948. P. 147–166.
20. *Orowan E.* Fundamentals of brittle behavior of metals // Fatique and Fracture of Metals / Ed. N.M. Murray. N.Y.: Wiley, 1952. P. 139–167.

21. *Клевцов Г.В., Ботвина Л.Р.* Микро- и макрозона пластической деформации как критерии предельного состояния материала при разрушении // Проблемы прочности. 1984. № 4. С. 24–28.
22. *Баренблатт Г.И.* О некоторых общих представлениях математической теории хрупкого разрушения // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 630–643.
23. *Лавит И.М.* Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале // Проблемы прочности. 1988. № 7. С. 18–23.
24. *Ильюшин А.А* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

Тула

Поступила в редакцию
18.09.1998