МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2001

Ю.К. ЖБАНОВ, Н.В. КАЛЕНОВА

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ДЕБАЛАНС ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

В работе [1] исследовано влияние на движение резонатора волнового твердотельного гироскопа аномалий в распределении масс (дебалансов) в предположении, что все аномалии сосредоточены на кромке резонатора с произвольным распределением вдоль нее. Показано, что на величину суммарной реакции в точках опоры влияют первые три гармоники дебаланса, каждая из которых характеризуется двумя скалярными параметрами. Предложены методики экспериментального определения параметров дебаланса и способы балансировки, обеспечивающие их обнуление. В настоящей работе рассмотрен случай аномального распределения масс на всей поверхности резонатора. Показано, что для полной характеристики произвольного поверхностного распределения дебалансов, в плане его влияния на реакцию в точках опоры, для каждой гармоники (первых трех) помимо двух параметров, введенных в [1], требуется два дополнительных скалярных параметра. Первые пары параметров определяют зависимость от формы волны главного вектора сил реакции в опорах, вторые же пары параметров гармоник определяют зависимость от формы волны главного момента сил реакции. Реакция в точках опоры полностью обнуляется только при нулевых значениях всех двенадцати параметров, по четыре для каждой гармоники. Предложен метод определения значений всех рассматриваемых параметров дебаланса и способ балансировки, обеспечивающий полное обнуление реакции, как силы, так и момента.

1. Реакция в опоре. Для тонкой полусферической оболочки резонатора вторая форма колебаний в случае стоячей волны записывается в виде

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{A}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos 2(\varphi-\varphi_0)\sin\omega(t-t_0)\\
v &= \frac{A}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin 2(\varphi-\varphi_0)\sin\omega(t-t_0)\\
w &= \frac{A}{2}(2+\cos\alpha)\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos 2(\varphi-\varphi_0)\sin\omega(t-t_0)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Параметр A характеризует амплитуду волны, угол φ_0 – ее ориентацию. В декартовой системе координат, связанной с резонатором, положение точки с угловыми координатами на оболочке α, φ задается вектором

$$
\mathbf{r}=\begin{Vmatrix} x\\ y\\ z\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} R\sin\alpha\cos\varphi\\ R\sin\alpha\sin\varphi\\ -R\cos\alpha\end{Vmatrix}
\tag{1.2}
$$

Перемещение этой точки, соответствующее формулам (1.1) в декартовой системе координат может быть выражено формулой

$$\Delta\mathbf{r} = \begin{Vmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -\sin\alpha[(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)\cos 2\varphi_0 + (3\sin\varphi + \sin 3\varphi)\sin 2\varphi_0] \\ \sin\alpha[(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)\cos 2\varphi_0 - (3\cos\varphi - \cos 3\varphi)\sin 2\varphi_0] \\ 2(1+2\cos\alpha)[\cos 2\varphi\cos 2\varphi_0 + \sin 2\varphi \sin 2\varphi_0] \end{Vmatrix} \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\frac{A}{4}\sin\omega(t-t_0) \quad (1.3)$$

Для поддержания движения аномальных масс с поверхностной плотностью $\rho(\varphi, \alpha)$ требуется система внешних сил с главным вектором

$$\mathbf{F} = \iint\limits_{\alpha\,\varphi} \rho(\varphi,\alpha)\Delta\ddot{r}\sin\alpha d\varphi d\alpha \quad (1.4)$$

и главным моментом относительно начала координат, совпадающего с центром сферы,

$$\mathbf{M} = \iint\limits_{\alpha\,\varphi} \rho(\varphi,\alpha) r \times \Delta\ddot{r}\sin\alpha d\varphi d\alpha \quad (1.5)$$

Интегрирование по α ведется в пределах от нуля до $\pi/2$, и по φ – от нуля до 2π. Если ввести обозначения

$$\rho_{ks}(\alpha) = \int\limits_{\varphi} \rho(\varphi,\alpha)\sin\alpha\sin k\varphi d\varphi, \quad \rho_{kc}(\alpha) = \int\limits_{\varphi} \rho(\varphi,\alpha)\sin\alpha\cos k\varphi d\varphi \quad (1.6)$$

при $k = 1 \div 3$, то с учетом выражений (1.2), (1.3) для $\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{r}$ и формул (1.4), (1.5) для $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ можно записать вклад аномальных масс, расположенных на колечке шириной $d\alpha$, для каждого значения угла α в величины амплитуд силы и момента

$$dF_x(\alpha) = \frac{A\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[(3\rho_{1c} + \rho_{3c})\cos 2\varphi_0 + (3\rho_{1s} + \rho_{3s})\sin 2\varphi_0]d\alpha$$

$$dF_y(\alpha) = \frac{A\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[(-3\rho_{1s} + \rho_{3s})\cos 2\varphi_0 + (3\rho_{1c} - \rho_{3c})\sin 2\varphi_0]d\alpha$$

$$dF_z(\alpha) = -\frac{A\omega^2}{2}(1+2\cos\alpha)\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[\rho_{2c}\cos 2\varphi_0 + \rho_{2s}\sin 2\varphi_0]d\alpha \quad (1.7)$$

$$dM_x(\alpha) = \frac{RA\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha)[(\rho_{1s} - \rho_{3s})\cos 2\varphi_0 - (\rho_{1c} - \rho_{3c})\sin 2\varphi_0]d\alpha +$$
$$+ R\cos\alpha dF_y(\alpha)$$

$$dM_y(\alpha) = \frac{RA\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha)[(\rho_{1c} + \rho_{3c})\cos 2\varphi_0 + (\rho_{1s} + \rho_{3s})\sin 2\varphi_0]d\alpha -$$
$$- R\cos\alpha dF_x(\alpha)$$

$$dM_z(\alpha) = -\frac{A\omega^2}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[\rho_{2s}\cos 2\varphi_0 - \rho_{2c}\sin 2\varphi_0]d\alpha \quad (1.8)$$

Обозначения, принятые для сил и моментов здесь и везде ниже используются для обозначения их амплитуд. Вклад каждой гармоники дебаланса в амплитуды возникающих сил и моментов удобно записать отдельно.

Амплитуды сил, соответствующих первой гармонике:

$$dF_x^{(1)}(\alpha) = 3\frac{A\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[\rho_{1c}\cos 2\varphi_0 + \rho_{1s}\sin 2\varphi_0]d\alpha$$

$$dF_y^{(1)}(\alpha) = 3\frac{A\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[-\rho_{1s}\cos 2\varphi_0 + \rho_{1c}\sin 2\varphi_0]d\alpha \qquad (1.9)$$

Амплитуды моментов

$$dM_x^{(1)}(\alpha) = \frac{RA\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)[\rho_{1s}\cos 2\varphi_0 - \rho_{1c}\sin 2\varphi_0]d\alpha$$

$$dM_y^{(1)}(\alpha) = \frac{RA\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)[\rho_{1c}\cos 2\varphi_0 + \rho_{1s}\sin 2\varphi_0]d\alpha \qquad (1.10)$$

Момент $dM^{(1)}(\alpha)$ относительно начала координат создается силой $dF^{(1)}(\alpha)$, если сила приложена в точке оси z:

$$z^{(1)}(\alpha) = \tfrac{1}{3}R(1-\cos\alpha) \qquad (1.11)$$

Эти же формулы можно записать в матричном виде

$$\begin{Vmatrix} dF_x^{(1)} \\ dF_y^{(1)} \end{Vmatrix} = 3\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix} \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \\ \sin 2\varphi_0 & -\cos 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \rho_{1c}(\alpha) \\ \rho_{1s}(\alpha) \end{Vmatrix} \sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}d\alpha \qquad (1.12)$$

$$\begin{Vmatrix} dM_x^{(1)} \\ dM_y^{(1)} \end{Vmatrix} = R\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix} -\sin 2\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 \\ \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \rho_{1c}(\alpha) \\ \rho_{1s}(\alpha) \end{Vmatrix} \sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)d\alpha \qquad (1.13)$$

Интегрирование по α дает

$$\begin{Vmatrix} F_x^{(1)} \\ F_y^{(1)} \end{Vmatrix} = 3\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix} \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \\ \sin 2\varphi_0 & -\cos 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_{1c}^F \\ d_{1s}^F \end{Vmatrix} \qquad (1.14)$$

$$\begin{Vmatrix} M_x^{(1)} \\ M_y^{(1)} \end{Vmatrix} = R\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix} -\sin 2\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 \\ \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_{1c}^M \\ d_{1s}^M \end{Vmatrix} \qquad (1.15)$$

если использовать обозначения

$$d_{1c}^F = \int\limits_{\alpha} \rho_{1c}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}d\alpha, \quad d_{1s}^F = \int\limits_{\alpha} \rho_{1s}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}d\alpha$$

$$d_{1c}^M = \int\limits_{\alpha} \rho_{1c}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)d\alpha \qquad (1.16)$$

$$d_{1s}^M = \int\limits_{\alpha} \rho_{1s}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)d\alpha$$

Амплитуды сил, соответствующих третьей гармонике, имеют вид

$$dF_x^{(3)}(\alpha) = \frac{A\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[\rho_{3c}\cos 2\varphi_0 + \rho_{3s}\sin 2\varphi_0]d\alpha$$

$$dF_y^{(3)}(\alpha) = \frac{A\omega^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[\rho_{3s}\cos 2\varphi_0 - \rho_{3c}\sin 2\varphi_0]d\alpha \qquad (1.17)$$

Место приложения сил

$$z^{(3)}(\alpha) = R(1+\cos\alpha) \qquad (1.18)$$

В матричной записи

$$\begin{Vmatrix} dF_x^{(3)} \\ dF_y^{(3)} \end{Vmatrix} = \frac{A\omega^2}{4} \begin{Vmatrix} \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \\ -\sin 2\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \rho_{3c}(\alpha) \\ \rho_{3s}(\alpha) \end{Vmatrix} \sin\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha \tag{1.19}$$

$$\begin{Vmatrix} dM_x^{(3)} \\ dM_y^{(3)} \end{Vmatrix} = R\frac{A\omega^2}{4} \begin{Vmatrix} \sin 2\varphi_0 & -\cos 2\varphi_0 \\ \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \rho_{3c}(\alpha) \\ \rho_{3s}(\alpha) \end{Vmatrix} \sin\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} (1+\cos\alpha) d\alpha \tag{1.20}$$

Интегрирование по α дает

$$\begin{Vmatrix} F_x^{(3)} \\ F_y^{(3)} \end{Vmatrix} = \frac{A\omega^2}{4} \begin{Vmatrix} \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \\ -\sin 2\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_{3c}^F \\ d_{3s}^F \end{Vmatrix} \tag{1.21}$$

$$\begin{Vmatrix} M_x^{(3)} \\ M_y^{(3)} \end{Vmatrix} = R\frac{A\omega^2}{4} \begin{Vmatrix} \sin 2\varphi_0 & -\cos 2\varphi_0 \\ \cos 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_{3c}^M \\ d_{3s}^M \end{Vmatrix} \tag{1.22}$$

с использованием обозначений

$$\begin{gathered} d_{3c}^F = \int_\alpha \rho_{3c}(\alpha)\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} d\alpha, \quad d_{3s}^F = \int_\alpha \rho_{3s}(\alpha)\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} d\alpha \\ d_{3c}^M = \int_\alpha \rho_{3c}(\alpha)\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha) d\alpha \\ d_{3s}^M = \int_\alpha \rho_{3s}(\alpha)\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha) d\alpha \end{gathered} \tag{1.23}$$

Силы и моменты, соответствующие второй гармонике дебаланса, согласно формулам (1.7), (1.8) имеют вид

$$\begin{gathered} dF_z(\alpha) = -\frac{A\omega^2}{2}(1+2\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}[\rho_{2c}\cos 2\varphi_0 + \rho_{2s}\sin 2\varphi_0] d\alpha \\ dM_z(\alpha) = -\frac{A\omega^2}{2}\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}[\rho_{2s}\cos 2\varphi_0 - \rho_{2c}\sin 2\varphi_0] d\alpha \end{gathered} \tag{1.24}$$

Интегрирование по α дает

$$\begin{gathered} F_z^{(2)} = -\frac{A\omega^2}{2}[d_{2c}^F \cos 2\varphi_0 + d_{2s}^F \sin 2\varphi_0] \\ M_z^{(2)} = -\frac{A\omega^2}{2}[d_{2s}^M \cos 2\varphi_0 - d_{2c}^M \sin 2\varphi_0] \end{gathered} \tag{1.25}$$

$$\begin{gathered} d_{2c}^F = \int_\alpha \rho_{2c}(\alpha)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha) d\alpha, \quad d_{2c}^M = \int_\alpha \rho_{2s}(\alpha)\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} d\alpha \\ d_{2s}^F = \int_\alpha \rho_{2s}(\alpha)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha) d\alpha, \quad d_{2s}^M = \int_\alpha \rho_{2s}(\alpha)\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} d\alpha \end{gathered} \tag{1.26}$$

Таким образом, силовое воздействие на резонатор со стороны зон его крепления к основанию, обеспечивающее движение аномальных масс, распределенных по его поверхности, при колебаниях по второй гармонике в форме стоячей волны, полностью определяется формулами (1.14), (1.15), (1.21), (1.22), (1.25). Это воздействие зависит от амплитуды и ориентации волны, заданных величиной A и углом φ_0, и от двенадцати параметров (1.16), (1.23), (1.26), распределения аномальных масс по поверхности резонатора. Силовое воздействие обнуляется при любой форме стоячей волны тогда и только тогда, когда все двенадцать параметров обнулены.

2. Определение параметров дебаланса. В эксперименте для любой ориентации стоячей волны могут быть измерены амплитуды трех компонент силы и трех компонент момента:

$$
\begin{aligned}
&F_x = F_x^{(1)} + F_x^{(3)}, \quad M_x = M_x^{(1)} + M_x^{(3)} \\
&F_y = F_y^{(1)} + F_y^{(3)}, \quad M_y = M_y^{(1)} + M_y^{(3)} \\
&F_z = F_z^{(2)}, \quad M_z = M_z^{(2)}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Эти компоненты дают следующие линейные комбинации параметров дебалансов:

$$
\begin{aligned}
&3\cos 2\varphi_0 d_{1c}^F + 3\sin 2\varphi_0 d_{1s}^F + \cos 2\varphi_0 d_{3c}^F + \sin 2\varphi_0 d_{3s}^F = \frac{4}{A\omega^2} F_x \\
&3\sin 2\varphi_0 d_{1c}^F - 3\cos 2\varphi_0 d_{1s}^F - \sin 2\varphi_0 d_{3c}^F + \cos 2\varphi_0 d_{3s}^F = \frac{4}{A\omega^2} F_y \\
&-\cos 2\varphi_0 d_{2c}^F - \sin 2\varphi_0 d_{2s}^F = \frac{4}{A\omega^2} F_z \\
&-\sin 2\varphi_0 d_{1c}^M + \cos 2\varphi_0 d_{1s}^M + \sin 2\varphi_0 d_{3c}^M - \cos 2\varphi_0 d_{3s}^M = \frac{4}{RA\omega^2} M_x \\
&\cos 2\varphi_0 d_{1c}^M + \sin 2\varphi_0 d_{1s}^M + \cos 2\varphi_0 d_{3c}^M + \sin 2\varphi_0 d_{3s}^M = \frac{4}{RA\omega^2} M_y \\
&-\cos 2\varphi_0 d_{2s}^M + \sin 2\varphi_0 d_{2c}^M = \frac{2}{RA\omega^2} M_z
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Все двенадцать параметров дебаланса могут быть определены по измерениям сил и моментов при двух, подходящим образом выбранных, углах ориентации волны. Например, при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/4$.

3. Балансировка. Возможную методику балансировки рассмотрим на примере компенсации дебалансов d_{1c}^F и d_{1c}^M. Оба эти параметра определяются зависимостью $\rho_{1c}(\alpha)$. Соответствующее им воздействие состоит из силы (имеется в виду амплитудное значение):

$$
\mathbf{F}^{(1c)} = 3\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix}\cos 2\varphi_0 \\ \sin 2\varphi_0\end{Vmatrix} d_{1c}^F
\tag{3.1}
$$

и момента

$$
\mathbf{M}^{(1c)} = R\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix}-\sin 2\varphi_0 \\ \cos 2\varphi_0\end{Vmatrix} d_{1c}^M
\tag{3.2}
$$

что эквивалентно приложению одной силы $F^{(1c)}$ в точке

$$
z^{(1c)} = \tfrac{1}{3} R\, d_{1c}^M / d_{1c}^F
$$

В этой же точке и с тем же направлением будет приложена сила, соответствующая дебалансу $d_{1c}^*(\alpha_{1c}^*)$, расположенному на колечке (на параллели) $\alpha = \alpha_{1c}^*$, если угол α_{1c}^* удовлетворяет соотношению $z^{(1)}(\alpha_{1c}^*) = z^{(1c)}$, где $z^{(1)}(\alpha_{1c}^*)$ определено по формуле (1.11):

$$
\tfrac{1}{3} R(1 - \cos\alpha_{1c}^*) = \tfrac{1}{3} R\, d_{1c}^M / d_{1c}^F
$$

или

$$\cos\alpha_{1c}^* = 1 - d_{1c}^M / d_{1c}^F \tag{3.3}$$

Эта сила, согласно формуле (1.12):

$$\mathbf{F}^{(1c)}(\alpha_{1c}^*) = 3\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix}\cos 2\varphi_0\\ \sin 2\varphi_0\end{Vmatrix} d_{1c}^*(\alpha_{1c}^*)\sin\alpha_{1c}^*\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha_{1c}^*}{2} \tag{3.4}$$

становится равной силе (3.1) при

$$d_{1c}^*(\alpha_{1c}^*) = \frac{d_{1c}^F}{\sin\alpha_{1c}^*\,\mathrm{tg}^2(\alpha_{1c}^*/2)} \tag{3.5}$$

Таким образом, для компенсации распределенного дебаланса $\rho_{1c}(\alpha)$, характеризуемого доступными измерению параметрами d_{1c}^F и d_{1c}^M, достаточно на параллели (3.3) устранить дебаланс (3.5).

Дебаланс $\rho_{1s}(\alpha)$ устраняется аналогичным образом. Угол параллели рассчитывается по формуле

$$\cos\alpha_{1s}^* = 1 - d_{1s}^M / d_{1s}^F \tag{3.6}$$

величина устраняемого дебаланса вычисляется соотношением

$$d_{1s}^*(\alpha_{1s}^*) = \frac{d_{1s}^F}{\sin\alpha_{1s}^*\,\mathrm{tg}^2(\alpha_{1s}^*/2)} \tag{3.7}$$

Таким же образом получены формулы для компенсации дебалансов $\rho_{3c}(\alpha)$ и $\rho_{3s}(\alpha)$. Для дебаланса $\rho_{3c}(\alpha)$ создаваемая им сила

$$\mathbf{F}^{(3c)} = \frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix}\cos 2\varphi_0\\ -\sin 2\varphi_0\end{Vmatrix} d_{3c}^F \tag{3.8}$$

создаваемый силой момент

$$\mathbf{M}^{(3c)} = R\frac{A\omega^2}{4}\begin{Vmatrix}\sin 2\varphi_0\\ \cos 2\varphi_0\end{Vmatrix} d_{3c}^M \tag{3.9}$$

точка приложения силы

$$z^{(3c)} = R\,d_{3c}^M / d_{3c}^F \tag{3.10}$$

эквивалентная параллель, на которой надо устранять дебаланс

$$\cos\alpha_{3c}^* = d_{3c}^M / d_{3c}^F - 1 \tag{3.11}$$

эквивалентный дебаланс, подлежащий устранению

$$d_{3s}^*(\alpha_{3c}^*) = \frac{d_{3c}^F}{\sin\alpha_{3c}^*\,\mathrm{tg}^2(\alpha_{3c}^*/2)} \tag{3.12}$$

Для дебаланса $\rho_{3s}(\alpha)$ в формулах (3.8)–(3.12) буква c во всех индексах меняется на букву s.

Для второй гармоники дебаланса $\rho_{2c}(\alpha)$ эквивалентная параллель находится из соотношения

$$\frac{\sin\alpha_{2c}^*}{1 + 2\cos\alpha_{2c}^*} = \frac{d_{2c}^M}{d_{2c}^F} \tag{3.13}$$

и эквивалентный дебаланс – по формуле

$$d_{2c}^*(\alpha_{2c}^*) = \frac{d_{1c}^F}{(1+\cos\alpha_{2c}^*)\operatorname{tg}^2(\alpha_{2c}^*/2)} \tag{3.14}$$

Для дебаланса $\rho_{2s}(\alpha)$ в формулах (3.13), (3.14) буква c в индексах меняется на букву s.

Таким образом, полная балансировка резонатора сводится к балансировке шести параллелей на углах α_{kc}^*, α_{ks}^* при $k = 1 \div 3$.

4. Альтернативный вариант балансировки. Сила (3.1) и момент (3.2), соответствующие дебалансу $\rho_{1c}(\alpha)$ с измеренными параметрами d_{1c}^F, d_{1c}^M могут быть созданы специально подобранными дебалансами $d_{1c}^*(\alpha_1)$ и $d_{1c}^*(\alpha_2)$ на двух любых выбранных заранее параллелях $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$. Соответствующая этим дебалансам сила, согласно соотношению (1.12), имеет вид

$$\mathbf{F}^{(1c)} = 3\frac{A\omega^2}{4}\left\|\begin{matrix}\cos 2\varphi_0\\ \sin 2\varphi_0\end{matrix}\right\|\left[d_{1c}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1}{2} + d_{1c}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_2}{2}\right] \tag{4.1}$$

Соответствующий им момент, согласно (1.13):

$$\mathbf{M}^{(1c)} = \\ = R\frac{A\omega^2}{4}\left\|\begin{matrix}-\sin 2\varphi_0\\ \cos 2\varphi_0\end{matrix}\right\|\left[d_{1c}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}(1-\cos\alpha_1) + d_{1c}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}(1-\cos\alpha_2)\right] \tag{4.2}$$

Приравнивая эти выражения силе и моменту, вычисленным по формулам (1.14), (1.15), с использованием измеренных значений параметров дебаланса, получаем уравнения для определения величин $d_{1c}^*(\alpha_1)$ и $d_{1c}^*(\alpha_2)$:

$$\begin{gathered} d_{1c}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} + d_{1c}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = d_{1c}^F \\ d_{1c}^*(\alpha_1)\sin\alpha_1\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}(1-\cos\alpha_1) + d_{1c}^*(\alpha_2)\sin\alpha_2\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}(1-\cos\alpha_2) = d_{1c}^M \end{gathered} \tag{4.3}$$

Уравнения для определения величин $d_{1s}^*(\alpha_1)$ и $d_{1s}^*(\alpha_2)$ получаются из выписанных заменой в индексах буквы c на букву s.

Уравнения для определения величин $d_{3c}^*(\alpha_1)$, $d_{3c}^*(\alpha_2)$ и $d_{3s}^*(\alpha_1)$, $d_{3s}^*(\alpha_2)$ имеют тот же вид с заменой знака минус в круглых скобках второго уравнения на знак плюс. Величины дебалансов $d_{2c}^*(\alpha_1)$, $d_{2c}^*(\alpha_2)$ и $d_{2s}^*(\alpha_1)$, $d_{2s}^*(\alpha_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} (1+2\cos\alpha_1)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1}{2}d_{2c}^*(\alpha_1) + (1+2\cos\alpha_2)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_2}{2}d_{2c}^*(\alpha_2) = d_{2c}^F \\ \sin\alpha_1\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1}{2}d_{2c}^*(\alpha_1) + \sin\alpha_2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_2}{2}d_{2c}^*(\alpha_2) = d_{2c}^M \end{gathered} \tag{4.4}$$

с заменой буквы c на букву s во всех индексах при записи уравнений для дебалансов $d_{2s}^*(\alpha_1)$ и $d_{2s}^*(\alpha_2)$. Эти уравнения следуют из соотношений (1.24), (1.25).

Все выписанные уравнения достаточно хорошо разрешимы при значениях углов α_1, α_2 равных, например, $\pi/3$ и $\pi/2$.

Таким образом, полная балансировка резонатора может быть выполнена удалением определенных масс с двух специально выбранных параллелей. Расчет подлежащих удалению масс, как в первом так и в альтернативном варианте балансировки, может быть проведен способами, предложенными в [1] для кромки резонатора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О балансировке волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 4–16.

Москва

Поступила в редакцию 14.09.2000