МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2001

УДК 539.214; 539.374

© 2001 г. А.В. КОНОВАЛОВ

КРУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ И ТРУБЫ ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С БОЛЬШИМИ ПЛАСТИНЧАТЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Изложены постановка и результаты решения задач кручения круглого цилиндрического стержня и трубы из упругопластического материала с большими пластическими деформациями. В отличие от классических решений [1] в постановке задач отсутствуют предположения о равенстве нулю деформаций в направлении координатных осей цилиндрической системы координат, ось z которой совпадает с продольной осью стержня и трубы, а также равенства нулю нормальных составляющих напряжений на координатных площадках.

Объяснен эффект осевых остаточных деформаций при кручении стержня и трубы (эффект Пойнтинга). Этот эффект был экспериментально обнаружен опытным путем при кручении проволоки и стержней из стали, меди и алюминия [2–4]. Далее его наблюдали и изучали экспериментально при кручении цилиндрических и трубчатых образцов для этих и других металлов [5–8]. Однако авторы данных исследований не дали объяснения наблюдаемому явлению.

Установлено, что среднее нормальное напряжение в части внутреннего объема стержня и трубы положительно и может достигать значений, сопоставимых со значениями напряжения текучести.

1. Определяющие соотношения. Для решения задач кручения круглого цилиндрического стержня и трубы из упругопластического материала с большими пластическими деформациями используем определяющее соотношение, полученное ранее в работе [9]:

$$\sigma^{CR} = \lambda\dot{\Theta}I + 2(\lambda\Theta+\mu)D - JmS \tag{1.1}$$

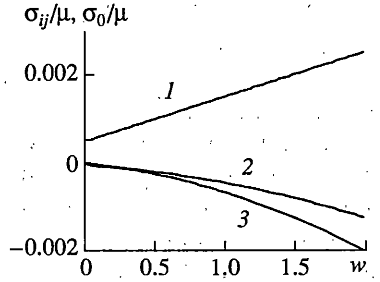
$$F(S,k) = 0,5S\cdot\cdot S - k^2 = 0, \quad \sigma^{CR} = \dot{\sigma} + \nabla v\cdot\sigma + \sigma\cdot\nabla v^T$$

$$S = \sigma - \sigma_0 I, \quad \sigma_0 = K\Theta I, \quad K = \lambda + {}^2\!/\!_3\mu$$

$$D = 0,5(\nabla v + \nabla v^T), \quad \dot{\Theta} = (1+\Theta)(I\cdot\cdot D), \quad \Theta = (V - V_0)/V_0$$

$$m = \left[\left[\mu\left(1 - \frac{2}{3}\Theta\right)S - S\cdot S\right]\cdot\cdot D - \frac{\mu}{3}\dot{\Theta}S\cdot\cdot I\right] \Bigg/ \left[k^2\left(1 + \frac{1}{\mu}\frac{dk}{d\chi}\right)\right]$$

где σ – тензор напряжений Коши; σ^{CR} – производная Коттер – Ривлина тензора напряжений Коши [10]; ∇v – градиент скорости перемещений v; D – тензор скоростей деформаций; λ, μ – коэффициенты Ламе; K – объемный модуль упругости; I – единичный тензор; Θ – относительное изменение индивидуального объема бесконечно малой частицы среды, V_0, V – соответственно индивидуальный объем бесконечно малой частицы среды до деформации и после деформации; F – скалярная функция нагружения; $k = k(\chi)$ – напряжение текучести; χ – параметр упрочнения, скорость изменения которого в силу малости упругих деформаций вычисляем по формуле $\dot{\chi} = \sqrt{2D \cdot\cdot D}$; точкой обозначено скалярное произведение тензоров, двумя точками – двойное скалярное произведение тензоров, точкой сверху – производная по времени, значок T означает транспонирование; $J = 0$ при $F < 0$ или при $F = 0$, $S \cdot\cdot \dot{S} \leqslant 0$; $J = 1$ при $F = 0$, $S \cdot\cdot \dot{S} > 0$.



Фиг. 1

Соотношение (1.1) справедливо для малых упругих деформаций, подчиняющихся закону Гука, и больших пластических деформаций, удовлетворяющих ассоциированному закону пластического течения [1]. Материал изотропный и изотропно упрочняющийся, пластически несжимаемый и удовлетворяет условию текучести Мизеса, изменение объема чисто упругое.

2. Простой сдвиг. Так как при кручении цилиндрического стержня имеет место схема движения, близкая к простому сдвигу, то рассмотрим сначала пример простого сдвига упругопластической среды на величину w с большими пластическими деформациями и законом движения вида $x^1 = \xi^1 + w\xi^2$, $x^2 = \xi^2$, $x^3 = \xi^3$, где x^i – декартовы координаты системы отсчета, ξ^j – текущая лагранжевая система координат. Деформированное состояние при сдвиге плоское, объем не изменяется, $\Theta = 0$, поэтому имеем $S_{ij} = \sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, а единственная отличная от нуля компонента тензора скоростей деформаций равна $D_{12} = 0{,}5\dot{w}$, где $\dot{w}$ – скорость сдвига. Пусть напряжение текучести описывается линейной функцией

$$k = k_0 + B\chi, \qquad k_0/\mu = 0.0005 \quad (\mu = 40\,000 \text{ МПа}) \tag{2.1}$$

Компоненты тензора напряжений согласно определяющему соотношению (1.1) являются решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\sigma}_{12} = \mu\dot{w} - Jm\sigma_{12}, \quad \dot{\sigma}_{22} = -2\sigma_{12}\dot{w} - Jm\sigma_{22}, \qquad \dot{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{33} = \dot{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{23} = 0 \tag{2.2}$$

с нулевыми начальными условиями: $\sigma_{ij}(0) = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

На фиг. 1 представлены рассчитанные по системе (2.2) при $B/\mu = 0.001$ в функции (2.1) значения компонент тензора напряжений в зависимости от величины сдвига w. Кривая *1* соответствует σ_{12}/μ, кривая *2* – величине $\sigma_{22} \cdot 10^2/\mu$. Видно, что при простом сдвиге имеет место сжимающее напряжение σ_{22}, которое по абсолютной величине монотонно увеличивается в процессе сдвига и на два порядка меньше, чем сдвиговое напряжение σ_{12}. Появление напряжения σ_{22} обусловлено наличием конвективных слагаемых в производной Коттер – Ривлина тензора напряжений Коши в определяющем соотношении.

В работе [9] отмечается, что для конечных деформаций модуль шарового тензора σ_0 нельзя вычислять по формуле $\sigma_0 = (\sigma \cdot\cdot I)/3$, так как она не определяет точно долю напряжений, отвечающих за упругое изменение объема. Для иллюстрации сказанного рассмотрим ту же задачу простого сдвига, но тензор S в определяющем соотношении (1.1) будем вычислять по формуле

$$S = \sigma - \sigma_0 I = \sigma - \tfrac{1}{3}(\sigma \cdot\cdot I)I \tag{2.3}$$

Тогда система дифференциальных уравнений для компонент тензора напряжений имеет вид

$$\dot{\sigma}_{11} = -JmS_{11}, \quad \dot{\sigma}_{12} = \mu\dot{w} - \sigma_{11}\dot{w} - JmS_{12}, \quad \dot{\sigma}_{22} = -2\dot{w}\sigma_{12} - JmS_{22}, \qquad \dot{\sigma}_{33} = -JmS_{33}, \quad \dot{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{23} = 0 \tag{2.4}$$

с нулевыми начальными условиями: $\sigma_{ij}(0) = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

На фиг. 1 кривой *3* изображены вычисленные по системе (2.4) при $B/\mu = 0{,}001$ величины σ_{11}/μ, σ_{22}/μ, σ_{33}/μ и σ_0/μ, значения которых практически совпадают. Видно, что напряжения σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} и σ_0 при конечном сдвиге одного порядка со сдвиговым напряжением σ_{12}.

Различие решений систем (2.2) и (2.4) заключается в следующем. Если тензор S вычисляется по формуле (2.3), то модуль шарового тензора σ_0 будет отличен от нуля, так как не равна нулю компонента σ_{22}. Отсюда компоненты S_{ii} с одинаковыми индексами не совпадают с соответствующими компонентами σ_{ii}. Из первого и четвертого уравнений системы (2.4) видно, что с появлением пластических деформаций компоненты σ_{11} и σ_{33} станут отличными от нуля. Это приведет с ростом величины сдвига к возрастанию по абсолютной величине модуля шарового тензора σ_0 до значений близких к значениям напряжения σ_{12} (ср. кривые *1* и *3* на фиг. 1). Таким образом, использование формулы (2.3) приводит к тому, что при простом упругопластическом сдвиге без изменения объема модуль шарового тензора σ_0 не равен нулю. Это противоречит условию неизменности объема и, следовательно, условию равенства нулю модуля шарового тензора в данном процессе деформирования.

В работе [9] определяющее соотношение (1.1) сравнивалось с аналогичными соотношениями, полученными другими авторами. Отмечалось, что в случае применения в левой части первого равенства в (1.1) вместо производной Коттер – Ривлина тензора напряжений Коши любой другой коротационной производной в определяющее соотношение вносится ошибка, обусловленная разностью между производной Коттер – Ривлина и применяемой производной.

В частности для простого сдвига в работе [11] с использованием ряда коротационных производных получены формулы для вычисления компонент тензора напряжений, которые можно записать следующим образом:

$$\dot\sigma_{11} = -c_1\sigma_{12}\dot w - JmS_{11}, \quad \dot\sigma_{12} = \mu\dot w - (c_2\sigma_{11} + c_1\sigma_{22})\dot w/2 - JmS_{12} \tag{2.5}$$

$$\dot\sigma_{22} = -c_2\sigma_{12}\dot w - JmS_{22}, \quad \dot\sigma_{33} = -JmS_{33}, \quad \dot\sigma_{13} = \dot\sigma_{23} = 0$$

где величины c_1 и c_2 для разных производных представлены в таблице.

Коротационная производная	Коттер – Ривлин (Cotter – Rivlin)	Яуманна (Jaumann)	Труселла (Truesdell)	Грина – Нагди (Green – Naghdi)	Совербай – Чу (Sowerby – Chu)	Дурбана – Баруха (Durban – Baruch)
c_1	0	−1	−2	$-\dfrac{4}{w^2+4}$	$-\dfrac{2}{w^2+4}$	$-\dfrac{3}{2}$
c_2	2	1	0	$\dfrac{4}{w^2+4}$	$\dfrac{2}{w^2+4}$	$\dfrac{1}{2}$

Из данной таблицы и уравнений (2.5) следует, что в случае использования в определяющих соотношениях любой из рассматриваемых производных, кроме производной Коттер – Ривлина, напряжение σ_{11} при простом сдвиге будет отличным от нуля. При использовании производной Коттер – Ривлина в системе (2.5) она совпадает с системой (2.4).

3. Постановка задачи. Введем цилиндрическую систему координат φ (угол), z, r (радиус). В этой системе координат рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния упругопластического круглого цилиндрического стержня при кручении вокруг продольной оси z.

Начальные напряжения и деформации отсутствуют. Массовыми и инерционными силами пренебрежем. Закон движения зададим в виде

$$\varphi = \varphi_0 + w(1+a)z_0, \quad z = (1+a)z_0, \quad r = \psi(r_0, t) \tag{3.1}$$

где $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, $z_0 \in [0, Z_0]$, $r_0 \in [0, R_0]$ – координаты точек стержня до деформации, Z_0, R_0 – соответственно начальные длина и радиус стержня; $w = w(t)$ – угол закручивания сечения стержня при $z = 1$, t – время. Функции $a = a(t)$ и $\psi(r_0, t)$ неизвестны и определяются в процессе решения задачи. Из решения задачи простого сдвига следует, что компонента тензора напряжений σ_{22} отрицательная, что можно интерпретировать как сопротивление стремлению материала расшириться вдоль оси x^2. Исходя из этого в законе движения (3.1) при кручении допускается возможность стержня однородно удлиняться или укорачиваться вдоль продольной оси z.

Физические компоненты векторов скорости равны

$$v_\varphi = qrz, \quad v_z = \frac{z\dot{a}}{1+a}, \quad v_r = f(r), \quad q = \dot{w} + \frac{w\dot{a}}{1+a} \tag{3.2}$$

где функция $f(r)$ определяется для каждого момента времени в процессе решения задачи, при этом $f(0) = 0$.

Физические компоненты градиента вектора скорости ∇v, исходя из зависимостей (3.2), равны

$$(\nabla_i v_j) = \begin{Vmatrix} f/r & 0 & 0 \\ qr & \dot{a}/(1+a) & 0 \\ 0 & 0 & df/dr \end{Vmatrix} \quad (i, j = \varphi, z, r) \tag{3.3}$$

Будем считать, что поверхностные силы на боковой поверхности цилиндра отсутствуют, а нормальная составляющая поверхностных сил в актуальной конфигурации на торцевой поверхности Σ_1 с нормалью $n = (0, 1, 0)$ взаимно уравновешена. Последнее описывается равенствами

$$\int_{\Sigma_1} n \cdot \sigma \cdot n\, ds = 2\pi \int_0^R \sigma_{zz} r\, dr = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_1} n \cdot \sigma \cdot n\, ds = 2\pi \int_0^R \left[\dot{\sigma}_{zz} + \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \sigma_{zz} \right] r\, dr = 0$$

откуда с учетом (3.2) имеем

$$\int_0^R \left[\dot{\sigma}_{zz} + \left(\frac{f}{r} + \frac{df}{dr} \right) \sigma_{zz} \right] r\, dr = 0 \tag{3.4}$$

Здесь σ_{ij} $(i, j = \varphi)$, r, z – физические компоненты тензора напряжений Коши, R – текущее значение радиуса цилиндра, ds – элемент поверхности.

4. Алгоритм решения. Поскольку компоненты тензора скоростей деформаций D_{ij} в каждый момент времени, исходя из (3.3), зависят только от координаты r, то и физические компоненты тензора напряжений Коши σ_{ij} согласно определяющему соотношению (1.1) будут в каждый момент времени также зависеть только от r. Поэтому все дальнейшее решение задачи будем рассматривать при фиксированных значениях $\varphi_0 = 0$ и $z_0 = 0$. В этом случае в соответствии с законом движения (3.1) координаты φ и z материальных точек стержня не изменяются (точки перемещаются только вдоль радиуса), и, следовательно, не изменяются для них в процессе деформации ортонормированные базисные векторы системы координат наблюдателя. Последнее позволяет при дифференцировании по времени тензоров при фиксированных лагранжевых координатах φ_0, z_0, r_0 дифференцировать только их компоненты в системе координат наблюдателя.

Из определяющего соотношения (1.1) с учетом зависимостей (3.3) получим систему дифференциальных уравнений для физических компонент тензора напряжений Коши:

$$\dot\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\dot\Theta + 2(\lambda\Theta+\mu)D_{\varphi\varphi} - 2\sigma_{\varphi\varphi}D_{\varphi\varphi} - JmS_{\varphi\varphi} \tag{4.1}$$

$$\dot\sigma_{\varphi z} = 2(\lambda\Theta+\mu)D_{\varphi z} - 2\sigma_{\varphi\varphi}D_{\varphi z} - (D_{\varphi\varphi}+D_{zz})\sigma_{\varphi z} - JmS_{\varphi z}$$

$$\dot\sigma_{zz} = \lambda\dot\Theta + 2(\lambda\Theta+\mu)D_{zz} - 4\sigma_{\varphi z}D_{\varphi z} - 2\sigma_{zz}D_{zz} - JmS_{zz}$$

$$\dot\sigma_{rr} = \lambda\dot\Theta + 2(\lambda\Theta+\mu)D_{rr} - 2\sigma_{rr}D_{rr} - JmS_{rr}$$

$$\dot\sigma_{\varphi r} = \dot\sigma_{zr} = 0, \quad \dot\Theta = (D_{\varphi\varphi}+D_{zz}+D_{rr})(1+\Theta)$$

с начальными условиями в момент времени $t = 0$:

$$\sigma_{ij} = 0, \quad \Theta = 0 \quad (i, j = \varphi, z, r)$$

Так как $f/r = D_{\varphi\varphi}$, $df/dr = D_{rr}$, $D_{zz} = \dot a/(1+a)$, $D_{\varphi\varphi} = 0{,}5qr$, то равенство (3.4) позволяет выразить неизвестную величину $\dot a$ в каждый момент времени t через функцию $f(r)$ и ее производную после подстановки в него правой части третьего уравнения системы (4.1).

Решение задачи во времени t выполним по шагам с величиной шага Δt. На каждом временном шаге для определения функции $f(r)$ воспользуемся принципом виртуальной мощности в скоростной форме [12], который, если пренебречь массовыми силами, запишется для актуальной конфигурации в виде

$$\int\limits_V [\dot\sigma - \nabla v^T\cdot\sigma + (\nabla\cdot v)\sigma]\cdot\cdot\nabla h^T dV - \int\limits_\Sigma [\dot P - (n\cdot\nabla v\cdot n)P + (\nabla\cdot v)P]\cdot h\, ds = 0 \tag{4.2}$$

где h – вариация кинематически допустимых полей скоростей; ∇h – градиент h; $P = \sigma\cdot n$ – поверхностные напряжения; V, Σ – соответственно объем и поверхность цилиндра в актуальной конфигурации; dV – элемент объема.

Так как в рассматриваемой задаче неизвестной является функция $f(r)$ только от переменной r, то вектор-функцию h и компоненты ее градиента возьмем в виде

$$h = (0, 0, h_r(r)), \quad (\nabla_j h_i) = \begin{Vmatrix} h_r/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dh_r/dr \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

Подставляя выражения (4.1) и (4.3) в равенство (4.2), получим

$$\int\limits_0^R \left\{\left(\dot\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}D_{\varphi\varphi} - 2\sigma_{\varphi z}D_{\varphi z} + \frac{\dot\Theta}{1+\Theta}\sigma_{\varphi\varphi}\right)\frac{h_r}{r} + \right.$$

$$\left. + \left(\dot\sigma_{rr} - \sigma_{rr}D_{rr} + \frac{\dot\Theta}{1+\Theta}\sigma_{rr}\right)\frac{dh_r}{dr}\right\} r\,dr = 0 \tag{4.4}$$

Решение системы уравнений (4.4), (3.4) осуществили методом конечных элементов, для чего отрезок $[0, R_0]$ разбили на N отрезков (конечных элементов) точками деления $r_0^0 = 0$, $r_0^1, \ldots, r_0^N = R_0$. На каждом k-ом отрезке $[r_0^{k-1}, r_0^k]$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) к функциям $r = r(r_0)$, $f(r)$, $h_r(r)$ применили конечно-элементную линейную апроксимацию:

$$r^{(k)}(\xi)=r^{k-1}+(r^k-r^{k-1})\xi,\quad f^{(k)}(\xi)=f^{k-1}+(f^k-f^{k-1})\xi \qquad (4.5)$$

$$h_r^{(k)}(\xi)=h_r^{k-1}+(h_r^k-h_r^{k-1})\xi$$

где r^k, f^k, h_r^k – значения функций r, f, h_r в точках разбиения r_0^k; $\xi \in [0, 1]$.

Так как на оси симметрии стержня z компонента скорости v_r равна нулю, то

$$f^0=0 \qquad (4.6)$$

Подставляя соответствующие правые части уравнений системы (4.1) с учетом выражений (3.3) в уравнения (4.4) и (3.4), используя аппроксимации (4.5), выполняя интегрирование на каждом конечном элементе по одной средней точке, учитывая произвольность значений h_r^k и граничное условие (4.6), получили систему N + 1 линейных алгебраических уравнений, позволяющую определить в каждый момент времени t неизвестные величины $\dot{a}$, f^k (k = 1, ..., N). По данным величинам в точках интегрирования конечных элементов вычисляли правые части уравнений (4.1). В этих же точках рассчитывали компоненты тензора напряжений Коши для момента времени $[t+\Delta t]$ по формуле $\sigma_{ij}(t+\Delta t)=\sigma_{ij}(t)+\Delta t\dot{\sigma}_{ij}$.

Переходя к следующему моменту времени и используя на нем описанную процедуру решения задачи, последовательно определили напряженно-деформированное состояние при кручении упругопластического цилиндрического стержня.

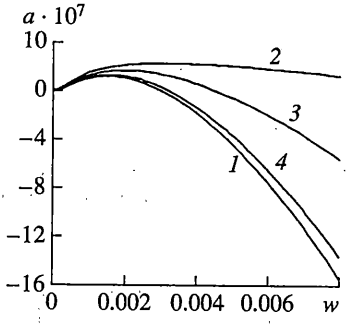
Постановка и алгоритм решения задачи кручения упругопластической трубы такие же, как для задачи кручения упругопластического цилиндра. Отличия состоят лишь в том, что $r_0 \in [R_1^0, R_2^0]$ (R_1^0, R_2^0 – соответственно внутренний и наружный радиус трубы до деформации), пределы интегрирования в уравнениях (3.4) и (4.4) равны текущим значениям внутреннего и наружного радиусов трубы R_1 и R_2, и отсутствует граничное условие (4.6).

5. Результаты решения задачи. *5.1. Удлинение и сжатие цилиндрического стержня и трубы вдоль продольной оси.* Во всех расчетах напряженно-деформированного состояния при кручении стержня и трубы коэффициент Ламе λ определяли через коэффициент Ламе μ и коэффициент Пуассона ω по формуле $\lambda = 2\mu\,\omega/(1-2\omega)$. Коэффициент Пуассона положили постоянным и равным 0.3. Приняли $R_0=R_2^0=1$. Так как решение системы уравнений (3.4), (4.4) не изменится, если обе части этих уравнений разделить на константу, например μ, то решение задачи выполнили в безразмерном виде для функций σ_{ij}/μ ($i, j = \varphi, z, r$).

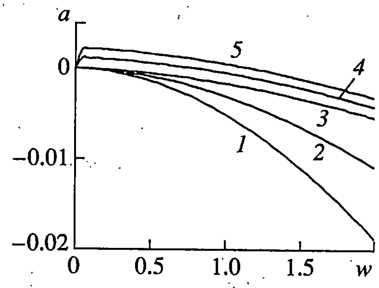
На начальной стадии кручения при упругих деформациях стержень и труба удлиняются. По мере появления и роста пластических деформаций удлинение переходит в сжатие. На фиг. 2 приведены рассчитанные при $B/\mu = 0.006$ в функции (2.1) значения a в зависимости от величины сдвига w для цилиндра (кривая *1*) и трубы (кривые *2*, *3* и *4* соответствуют $R_1^0/R_2^0 = 0.8,\ 0.6,\ 0.2$). Чем тоньше стенка трубы, тем больше удлинение трубы и меньше интенсивность ее последующего сжатия.

Степень удлинения и сжатия стержня и трубы вдоль продольной оси зависит от интенсивности упрочнения материала при пластической деформации. На фиг. 3 представлены значения a при большом закручивании на величину $w \leqslant 2$ для материала с линейной функцией напряжения текучести (2.1). Кривые *1*, *2* и *3* соответствуют значениям B/μ = 0.01, 0.006, 0.002. Видно, что чем больше интенсивность упрочнения материала, которая определяется параметром B, тем больше величина сжатия цилиндрического стержня.

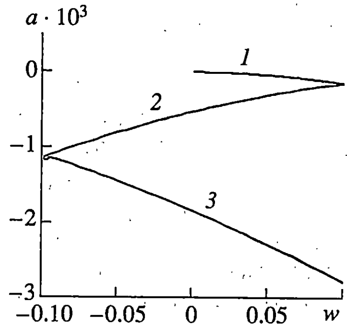
В экспериментах Пойтинга, описанных в [2], кручению были подвергнуты проволоки с приложенной постоянной продольной осевой нагрузкой. При этом имело место



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

удлинение испытываемых проволок. Для проверки этого факта решили задачу кручения цилиндрического стержня с дополнительно приложенной вдоль оси z постоянной нагрузкой. Предположили, что под действием приложенной нагрузки стержень в начальный момент однородно удлиняется, оставаясь в пределах упругих деформаций. Поскольку осевая нагрузка не зависит от времени, то дополнительное введение ее в задачу изменяет только начальные условия

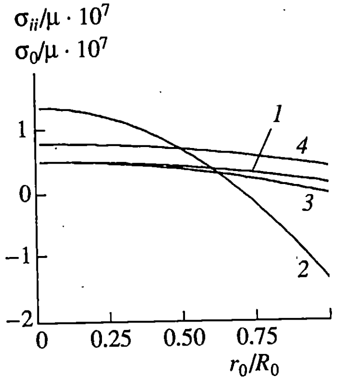
$$\sigma_{zz}(r,t)|_{t=0} = \sigma_{zz}^0 = \text{const}, \quad a(0) = \sigma_{zz}^0/(2\mu(1+\omega)), \quad \Theta(0) = \sigma_{zz}^0/(3K) \tag{5.1}$$

Изменением начальной конфигурацией стержня в силу малости упругих деформаций пренебрегли.

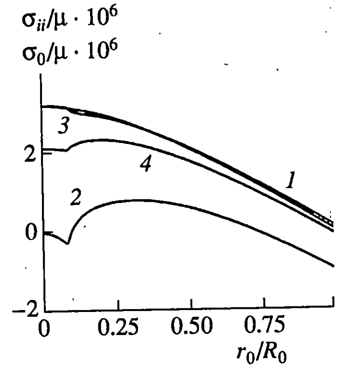
На фиг. 3 представлены вычисленные при $B/\mu = 0.002$ в функции (2.1) значения a для случая постоянной осевой нагрузки, при которой $\sigma_{zz}^0/\mu = 0.5\sigma_T/\mu$ (кривая *4*) и $\sigma_{zz}^0/\mu = 0.8\sigma_T/\mu$ (кривая *5*), где $\sigma_T = \sqrt{3}k_0$. При наличии осевой нагрузки стержень сначала удлиняется, а затем по мере закручивания сжимается. Чем больше осевая нагрузка, тем больше удлинение стержня на начальном этапе кручения.

На фиг. 4 показано изменение величины a при знакопеременном кручении цилиндра за три цикла (номер у кривой соответствует номеру цикла) для материала с параметром $B/\mu = 0.05$ в функции (2.1).

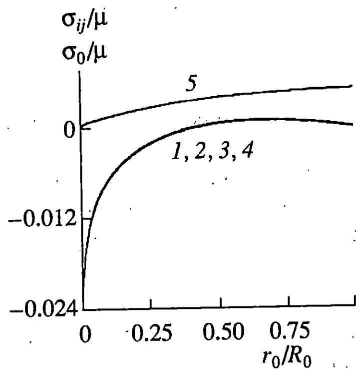
Результаты выполненных расчетов качественно совпадают с наблюдаемыми в опытах закономерностями осевой деформации цилиндрических стержней и труб при кручении и дают им объяснение. В частности, смена растяжения сжатием при повышении температуры для сплава D16 [7] объясняется уменьшением с ростом температуры интенсивности упрочнения B/μ. Расчеты моделируют также наблюдаемое в работах [5, 6] изменение закономерности укорачивания или удлинения стержня в на-



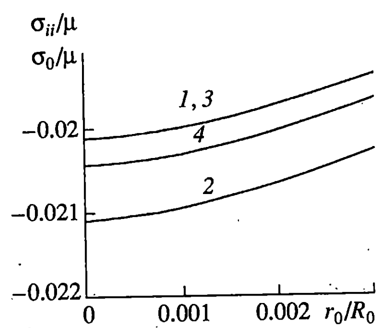
Фиг. 5



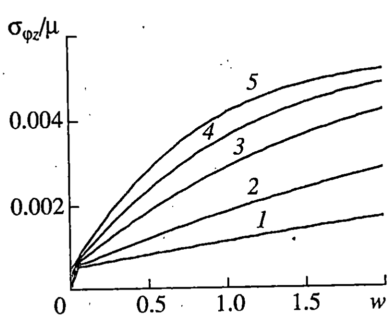
Фиг. 6



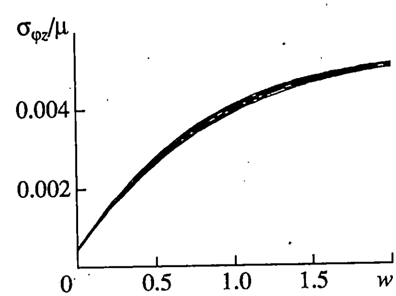
Фиг. 7



Фиг. 8



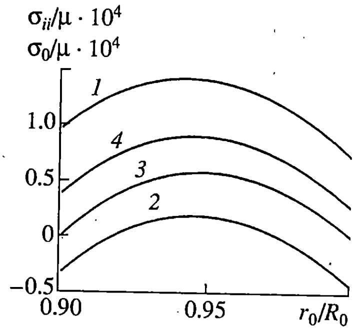
Фиг. 9



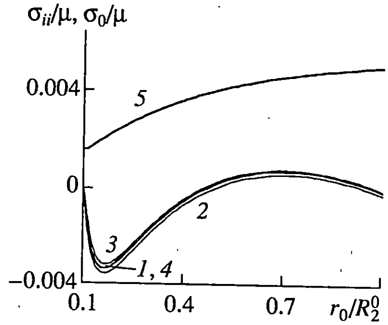
Фиг. 10

чале второго и последующих циклов в процессе знакопеременного кручения (см. фиг. 4). Это связано с процессом разгрузки при смене направления кручения. Количественно данные расчетов лежат в тех же диапазонах значений, которые имеют место в опытах.

Таким образом, эффект осевых остаточных деформаций при кручении цилиндрических стержней и труб моделируется на основе подхода конечных деформаций и примененных определяющих соотношений.



Фиг. 11



Фиг. 12

5.2. Напряженное состояние цилиндрического стержня и трубы. Все приведенные ниже результаты расчетов получены для напряжения текучести, описываемого зависимостью

$$k/\mu = 0.0005 + 0.006\chi - 0.003\chi^2 + 0.000705\chi^3 - 0.000062\chi^4 \tag{5.2}$$

которую получили аппроксимацией экспериментальных данных работы [13] для меди, где $\mu = 40\,000$ МПа.

На фиг. 5–8 приведены значения величин $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ (кривая *1*), σ_{zz}/μ (кривая *2*), σ_{rr}/μ (кривая *3*), σ_0/μ (кривая *4*), $\sigma_{\varphi z}/\mu$ (кривая *5* на фиг. 7) вдоль радиуса цилиндра при разных значениях угла закручивания: $w = 0.0005$ (фиг. 5), $w = 0.006$ (фиг. 6), $w = 2$ (фиг. 7, 8). На фиг. 8 показан укрупненный фрагмент данных, представленных на фиг. 7.

Для данных фигуры 5 весь материал стержня находится в упругом состоянии. В центральной области стержня напряжение σ_{zz} растягивающее, а в области, прилегающей к свободной, – сжимающее. Модуль шарового тензора σ_0 положителен во всех точках радиуса цилиндра. Значения напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, σ_{rr} на четыре порядка меньше значения сдвигового напряжения $\sigma_{\varphi z}$.

При увеличении закручивания в области, прилегающей к наружной поверхности цилиндра, появляются пластические деформации. Зона этих деформаций расширяется, распространяясь во внутреннюю область цилиндра и сокращая тем самым зону упругих деформаций. Например, для данных фиг. 6 граница упругой и пластической зон проходит при $r_0/R_0 = 0.08$ в точке излома кривой *2*. Напряжение σ_{zz} в центральной части цилиндра становится при этом сжимающим (ср. кривые *2* на фиг. 5–7). Расчеты показывают, что упругая зона при кручении исчезает. Так при разбиении радиуса цилиндра на 2000 элементов все они перешли в пластическое состояние при угле закручивания $w = 0.51$.

При большом угле закручивания напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, σ_{rr} имеют близкие между собой значения одного порядка со сдвиговым напряжением $\sigma_{\varphi z}$. В центральной части цилиндра они сжимающие и по модулю значительно превышают напряжение $\sigma_{\varphi z}$ (см. фиг. 7 и 8). Эти напряжения при больших углах закручивания играют основную роль в пластической деформации в центральной области цилиндра.

На фиг. 9 для цилиндрического стержня и на фиг. 10 для трубы с толщиной стенки $R_1^0 / R_2^0 = 0.9$ приведены значения величины $\sigma_{\varphi z}/\mu$ в зависимости от угла закручивания $w \leqslant 2$. Кривыми с номерами *1*, *2*, ..., *5* представлены данные при r_0/R_0 соответственно равных 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1 (фиг. 9) и $(r_0 - R_1^0)/(R_2^0 - R_1^0)$ соответственно равных 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 (фиг. 10, здесь чем выше кривая, тем большее значение имеет указанное отношение).

На фиг. 11 и 12 приведены значения $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ (кривая *1*), σ_{zz}/μ (кривая *2*), σ_{rr}/μ (кривая *3*), σ_0/μ (кривая *4*), $\sigma_{\varphi z}/\mu$ (кривая *5* на фиг. 12) вдоль радиуса трубы при угле закручивания $w = 2$ для трубы с толщиной стенки R_1^0 / R_2^0 равной 0.9 (фиг. 11) и 0.1 (фиг. 12).

Из данных на фиг. 10 и 11 видно, что при кручении тонкостенной трубы с большими углами закручивания напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, σ_{rr} на порядок меньше, чем сдвиговое напряжение $\sigma_{\varphi z}$. Модуль шарового тензора σ_0 во всех точках радиуса стенки трубы положителен.

При кручении толстостенной трубы на большой угол напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, σ_{rr} имеют близкие между собой значения одного порядка со сдвиговым напряжением $\sigma_{\varphi z}$ (аналогично кручению цилиндра). В области, прилегающей к внутренней стенке трубы, они сжимающие и по модулю превышают напряжение $\sigma_{\varphi z}$. Однако в отличие от цилиндра значения напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, σ_{rr} по модулю резко уменьшаются при приближении к внутренней стенке трубы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
2. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 647 с.
4. *Фридман Я.Б.* Механические свойства металлов. Ч. 1. Деформация и разрушение. М.: Машиностроение, 1974. 472 с.
5. *Андронов И.Н., Богданов Н.П., Лихачев В.А.* Осевое деформирование сплавов при знакопеременном кручении // Проблемы прочности. 1989. № 6. С. 106–108.
6. *Андронов И.Н., Беляев С.П., Каменцева З.П. и др.* Осевые деформации в никелиде титана, инициируемые кручением // Проблемы прочности. 1990. № 3. С. 117–119.
7. *Андронов И.П., Богданов Н.П., Власов В.П. и др.* Закономерности осевого деформирования металлов при пластическом кручении // Проблемы прочности. 1990. № 7. С. 86–88.
8. *Bell J.F.* Experiments on the kinematics of large plastic strain in ordered solids // Int. J. Solids Struct. 1989. V. 25. No. 3. P. 267–278.
9. *Коновалов А.В.* Определяющие соотношения для упругопластической среды при больших пластических деформациях // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 5. С. 139–147.
10. *Cotter B.A., Rivlin R.S.* Tensors associated with time-dependent stress // Quart. Appl. Math. 1955. V. 13. No. 2. P. 177–188.
11. *Szabo L., Balla M.* Comparison of some stress rates // Int. J. Solids Struct. 1989. V. 25. No. 3. P. 279–297.
12. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
13. *Полухин П.И., Гун Г.Я., Галкин А.М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов: Справочник. М.: Металлургия, 1983. 352 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
1.07.1998