

УДК 539.4

© 2001 г. С.Ю. ВЕСЕЛКОВ, Ю.М. ДАЛЬ

ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛОВ НА СДВИГ В ОБЛАСТЯХ КОНЦЕНТРАЦИЙ НАПРЯЖЕНИЙ

Дискретный критерий хрупкой прочности В.В. Новожилова [1] получил широкое развитие в трудах отечественных ученых, посвященных статической и динамической прочности конструкционных материалов. В этих исследованиях рассматривались в основном проблемы самопроизвольного распространения трещин отрыва в упругих телах с идеальной кристаллической решеткой [2], или простой решеткой Браве, содержащей одну или две вакансии перед вершиной трещины [3].

Настоящая работа посвящена анализу пластического сдвигообразования металлов в окрестности концентраторов напряжений. В основу анализа положена модель Френкеля – Конторовой [4, 5], модифицированная авторами на случай высоких градиентов касательных напряжений, наличия дефектов в виде отдельных краевых дислокаций или их дислокационных ансамблей, больших смещений атомов (по сравнению с параметрами решетки). Следуя концепции В.В. Новожилова, в принятой модели учтен дискретный характер сил, вызывающих процесс пластического сдвига атомов.

Образование микротрещин в деформируемом металлическом теле начинается задолго до его разрыва [6]. В настоящее время существует несколько моделей зарождения микротрещин в металлах. Так, по наиболее распространенной теории Зенера – Стро, микроразрывы сплошности материала возникают в полосах скольжения краевых дислокаций, в местах их скопления у границ зерен или твердых включений. Согласно расчетам, для появления микротрещины в металле с пределом текучести $\sigma_0 = 320$ МПа необходимо скопление около 100 дислокаций, "поджатых" к границе зерна касательным напряжением [7].

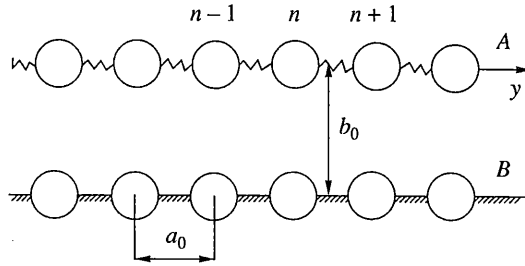
Как свидетельствуют эксперименты, в деформируемом образце полосы скольжения возникают и развиваются около точек приложения сосредоточенных нагрузок, в окрестности острых выемок, пор, включений и трещин. Целью настоящего исследования является анализ влияния физических (сосредоточенные силы) и геометрических (микротрещины) концентраторов напряжений на величину сдвиговой прочности металлов.

Для достаточно широкого класса концентраторов, касательное напряжение, действующее в плоскости скольжения, можно представить в виде:

$$\tau(x) = Dx^{-\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (1)$$

Здесь D – параметр, определяемый геометрией тела, интенсивностью внешних усилий и ориентацией плоскостей максимальных касательных напряжений (последние совпадают с плоскостями скольжения), α – постоянная, зависящая от вида концентратора напряжений (для сосредоточенных сил $\alpha \approx 1$, в случае трещин $\alpha \approx 1/2$), x – расстояние от концентратора напряжений.

Выделим две смежные атомные плоскости скольжения S ; одну из плоскостей будем считать подвижной, а другую закрепленной. Следуя [4], положим в основу анализа одномерную модель этих плоскостей, изображенную на фиг. 1. Здесь верхняя



Фиг. 1

атомная цепочка (А) предполагается деформированной, а нижняя (В) неподвижной. Рассмотрим в цепочке А три смежных атома с порядковыми номерами $(n-1)$, (n) и $(n+1)$. Координаты этих атомов:

до деформации

$$\hat{y}_{n-1} = (n-1)a_0, \quad \hat{y}_n = na_0, \quad \hat{y}_{n+1} = (n+1)a_0 \quad (2)$$

после деформации

$$\hat{y}_{n-1} = (n-1)a_0 + \psi_{n-1}, \quad \hat{y}_n = na_0 + \psi_n, \quad \hat{y}_{n+1} = (n+1)a_0 + \psi_{n+1} \quad (3)$$

Здесь a_0 – параметр идеальной кристаллической решетки в направлении сдвига y , ψ_m – перемещение m -го атома в направлении y .

Уравнение равновесия для n -го атома ($n \geq 2$): $T_n + p_{n,n-1} - p_{n,n+1} - R_n = 0$, где T_n – внешняя сдвигающая сила, действующая на n -й атом цепочки А, $p_{n,n-1}$ и $p_{n,n+1}$ – реакция взаимодействия между атомами с номерами $(n-1) - n$, $n - (n+1)$; R_n – результирующая цепочки В на n -й атом цепочки А.

Согласно [8] имеем

$$p_{n,n-1} = \alpha_1(\psi_{n-1} - \psi_n), \quad p_{n,n+1} = \alpha_1(\psi_n - \psi_{n+1}), \quad R_n = f \sin \frac{2\pi\psi_n}{a_0} \quad (4)$$

$$\alpha_1 = \frac{Eb_0c_0}{a_0(1-\nu^2)}, \quad f = \frac{Eb_0a_0^2}{4\pi(1+\nu)c_0} \quad (5)$$

где E , ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала тела; b_0 , c_0 – параметры решетки в двух перпендикулярных направлениях, причем b_0 – расстояние между атомами цепочек А и В.

Сила, действующая на n -й атом равна

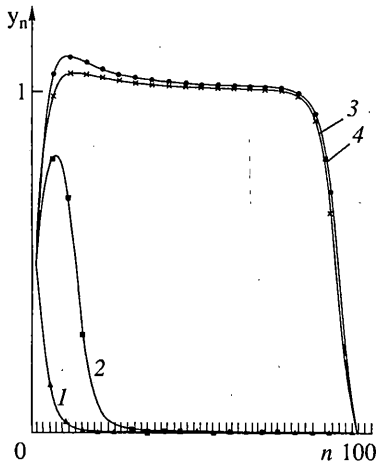
$$T_n = b_0 \int_{\hat{y}_n - \beta_n}^{\hat{y}_n + \gamma_n} f(y) dy \quad (6)$$

Здесь $f(y)$ – касательное напряжение внешнего силового поля в направлении оси y . Параметры β_n и γ_n , входящие в нижний и верхний пределы интегрирования, определяются очевидными зависимостями $\beta_n = (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1})/2$, $\gamma_n = (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n)/2$, которые с учетом соотношений (3) преобразуются к виду

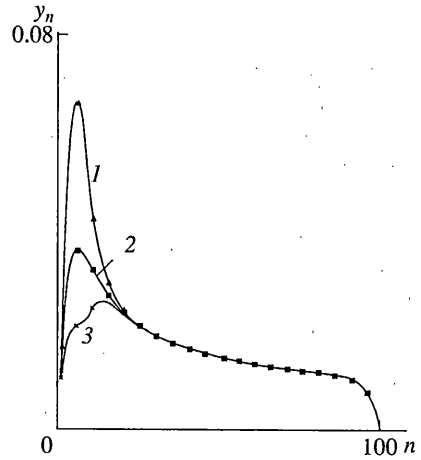
$$\beta_n = (a_0 + \psi_n - \psi_{n-1})/2, \quad \gamma_n = (a_0 + \psi_{n+1} - \psi_n)/2 \quad (7)$$

Примем в (6) функцию $f(y)$ в виде, соответствующем формуле (1):

$$f(y) = Dy^{-\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (8)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Подставляя (8) в (6) для $(0 < \alpha < 1)$, получаем

$$T_n = \frac{Db_0}{(1-\alpha)2^{1-\alpha}} \left[((2n+1)a_0 + \psi_n + \psi_{n+1})^{1-\alpha} - ((2n-1)a_0 + \psi_n + \psi_{n-1})^{1-\alpha} \right] \quad (9)$$

при $\alpha = 1$:

$$T_n = Db_0 \ln \frac{a_0(2n+1) + \psi_n + \psi_{n+1}}{a_0(2n-1) + \psi_n + \psi_{n-1}} \quad (10)$$

В результате внесения соотношений (4), (5), (9) или (10) в уравнение равновесия находим:

для $0 < \alpha < 1, n \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{Db_0}{(1-\alpha)2^{1-\alpha}} \left[((2n+1)a_0 + \psi_n + \psi_{n+1})^{1-\alpha} - ((2n-1)a_0 + \psi_n + \psi_{n-1})^{1-\alpha} \right] + \\ & + \alpha_2(\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1}) - R_1 \sin \frac{2\pi\psi_n}{a_0} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

для $\alpha = 1, n \geq 2$:

$$Db_0 \ln \frac{a_0(2n+1) + \psi_n + \psi_{n+1}}{a_0(2n-1) + \psi_n + \psi_{n-1}} + \alpha_2(\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1}) - R_1 \sin \frac{2\pi\psi_n}{a_0} = 0 \quad (12)$$

$$\alpha_2 = \frac{E}{a_0(1-\nu^2)}, \quad R_1 = \frac{E}{4\pi(1+\nu)} \left(\frac{a_0}{c_0} \right)$$

При $n = \overline{1, N}$ соотношения (11) или (12) образуют систему нелинейных разностных уравнений, относительно неизвестных ψ_n . Естественно считать, что $\psi_N = 0$. С физической точки зрения это означает отсутствие перемещений конечного атома на границе зерна (твердого включения). Перемещение первого атома ψ_1 допустимо полагать в ряде случаев либо заданным (последнее имеет место на свободной поверхности), либо составлять для него дополнительное уравнение равновесия (как это имеет место в окрестности вершины микротрещины, нагруженной симметричной самоуравновешенной нагрузкой). На фиг. 2 воспроизведен график смещений при $\alpha = 1$ в цепочке А,

состоящей из 100 атомов, начало которой $n = 1$ находится на свободной поверхности тела, а конец $n = N = 100$ упирается в жесткую стенку. Величина ψ_1 во всех случаях принималась равной $a_0/2$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям параметра $B = D/(Ec_0)$ соответственно равным 0.001, 0.027, 0.030, 0.060. Представленные результаты свидетельствуют о возможности двух качественно различных форм равновесия атомной цепочки в зависимости от величин T_n и ψ_1 . Незначительная внешняя сдвигающая сила вызывает малые, постепенно затухающие отклонения атомов от положения равновесия. С увеличением T_n амплитуда отклонений возрастает и при $T_n > T_n^*$ большая часть цепочки смещается на одно межатомное расстояние относительно подкладки, а последние атомы сильно поджимаются, что обуславливает значительный рост напряжений на правом конце цепочки.

При $\alpha = 1/2$ (микротрещина) наиболее интересным представляет учет влияния краевого условия для первого атома в ряду А на форму равновесия. Пусть подвижный ряд атомов находится в вершине равновесной микротрещины. В общем случае краевое условие можно записать так:

$$\sqrt{2 + \frac{\psi_1}{a_0} + \frac{\psi_2}{a_0}} - \frac{k\psi_1 - \psi_2}{a_0(1 - \nu^2)B_1} - \left(\frac{a_0}{c_0}\right)^2 \frac{1}{4\pi(1 + \nu)B_1} \sin \frac{2\pi\psi_1}{a_0} = 0 \quad (13)$$

где $1 \leq k \leq 3$ ($k = 3$ — соответствует одинаковому смещению атомов, симметричных относительно вершины трещины, а $k = 1$ — полному разрыву связи между этими атомами); $B_1 = D_1 \sqrt{2} / (Ec_0)$.

Результаты расчетов представлены в виде графиков на фиг. 3, где по оси абсцисс отложены порядковые номера n атомов ряда А, а по оси ординат — безразмерные перемещения $y(n) = \psi_n/a_0$. Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям $k = 1, 2, 3$ ($B = 0.01$). Как видно, краевое условие существенно влияет на смещение только первых 15–20 атомов.

Для большинства конструкционных материалов критическое напряжение сдвига τ на два–три порядка ниже τ_* , что объясняется наличием в материале значительного числа дислокаций. Поэтому естественно усложнить принятую модель, введя в ряд А краевую дислокацию. Иными словами, будем считать, что до деформации в ряд А внедрен (или, наоборот, из него изъят) один атом с порядковым номером $n = n_0$.

В этом случае уравнение (11) преобразуется к такой форме:

$$\begin{aligned} & \frac{Db_0}{(1 - \alpha)2^{1-\alpha}} \left[((2n+1)a_0 + \psi_n + \psi_{n+1} \pm \Psi(n) \pm \Psi(n+1))^{1-\alpha} - \right. \\ & \left. - ((2n-1)a_0 + \psi_n + \psi_{n-1} \pm \Psi(n) \pm \Psi(n-1))^{1-\alpha} \right] + \\ & + \alpha_1 (\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1} \mp 2\Psi(n) \pm \Psi(n+1) \pm \Psi(n-1)) - \\ & - R_1 \sin \frac{2\pi(\psi_n \pm \Psi(n))}{a_0} = 0, \quad \Psi(n) = \frac{2a_0}{\pi} \arctg e^{\frac{\pi(n_0 - n)}{l_0}} \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\Psi(n)$ — функция, описывающая отклонение атомов от начального положения равновесия, при внедрении в ряд А одного дополнительного атома.

В уравнениях (14) слагаемые с верхним знаком относятся к внедренному, с нижним — к изъянному атому из ряда А.

Как показали вычисления, если в А находится дополнительный атом, то образующаяся в его окрестности область сгущения движется в направлении, совпадающем с направлением касательных напряжений; при изъятном атоме образуется область разрежения, которая перемещается в направлении, противоположном направлению

скальвающих напряжений. Как показали расчеты, центр дислокации смещается на одно-два межатомных расстояния при касательных напряжениях $\tau_0 \approx 0.5 \cdot 10^{-5} E$.

Приведенный выше метод расчета эффективен для нескольких изолированных дислокаций. Когда речь идет о больших дислокационных образованиях, целесообразно обратиться к уравнению

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x_j - x_i} - D \ln \frac{(x_j + x_{j+1})/2}{(x_j + x_{j-1})/2} + \tau_j = 0 \quad (15)$$

описывающему плоское скопление дислокаций, заторможенное около препятствия. Здесь x_i, x_j – координаты центров дислокаций; τ_j – сопротивление скольжению j -й дислокации.

n	$K = 2$	$K = 5$	$K = 10$	$K = 100$	Постоянное внешнее поле
1	27.79	28.9	31.00	111.34	82.26
2	90.60	93.25	97.84	202.50	223.54
3	183.41	187.27	193.80	313.56	375.21
4	299.42	303.9	311.36	430.78	517.20
5	430.28	434.67	441.96	548.99	642.57
6	566.38	570.19	576.40	662.95	749.19
7	697.85	700.68	705.29	767.63	836.66
8	814.90	816.68	819.56	858.20	905.16
9	908.72	909.59	910.99	929.93	955.04
10	972.13	972.39	972.80	978.48	986.61

Решение уравнения (15) для $n = 6$ в случае постоянного внешнего силового поля получено в [9]. В таблице приведено решение для $n = 10$, когда $\alpha = 1$ (параметр K равен отношению усредненного по линии скольжения касательного напряжения внешнего силового поля к τ_j , а длина линии скольжения $d = 1000a_0$).

Локальное растягивающее напряжение, вызванное скопление дислокаций, определяется выражением

$$\sigma_{\theta\theta} = (\tau - \tau_i) \sqrt{2} / 2\rho \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \quad (16)$$

где d – средний диаметр зерна; ρ, θ – полярные координаты с центром на границе зерна, где ρ – радиус-вектор, θ – полярный угол. Заметим, что $\max \sigma_{\theta\theta}$ достигается при $\theta \approx 70^\circ$ (с осью Ox).

Следуя [1], запишем критерий разрушения границы зерна

$$\max \int_0^{\delta_0} \sigma_{\theta\theta} d\rho = \sigma_* \delta_0$$

где $\delta \approx 5a_0$ – ширина границы зерна, σ_* – сопротивление отрыву металла [10]. Отсюда, интегрируя, получим $(\tau - \tau_i) \sqrt{2} d \delta_0 = \sigma_* \delta_0$. Тогда критическая величина макроскопического касательного напряжения τ оказывается равной

$$\tau = \tau_i + \sigma_* \sqrt{\delta_0 / 2} / \sqrt{d} \quad (17)$$

Соотношение (17) не идентично известной зависимости Холла – Петча, так как определяет собой появление микротрещины, обусловленное скоплением дислокаций у границы зерна металла. Что касается формулы Холла – Петча, то она определяет взаимосвязь напряжения течения и размера зерна и имеет вид [11]:

$$\sigma_n = \sigma_0 + kd^{-1/2} \quad (18)$$

где σ_n – нижний предел текучести, σ_0 и k – некоторые постоянные. Закон был экспериментально обнаружен Холлом, Петчем и Лоу и называется обычно законом Холла – Петча. Петч показал, что это соотношение также может быть объяснено с помощью теории дислокационных скоплений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.
2. Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Дискретные и гибридные модели механики разрушения // СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. 158 с.
3. Корнев В.Н., Тихомиров Ю.В. Деформирование и потеря устойчивости участка цепочки атомов в вершине трещины // ПМТФ. 1993. № 3. С. 160–172.
4. Френкель Я.И. Введение в теорию металлов. Л.: Наука, 1972. 424 с.
5. Мелькер А.И., Говоров С.В. О дислокациях в двумерных кристаллах // ФТТ. 1988. Т. 30. Вып. 12. С. 3597–3604.
6. Атомистика разрушения. М.: Мир, 1987. 246 с.
7. Актуальные вопросы теории дислокаций. М.: Мир, 1968. 311 с.
8. Инденбом В.Л. Подвижность дислокаций в модели Френкеля – Конторовой // Кристаллография. 1958. Т. 3. № 2. С. 197–205.
9. Head A.K. The interaction of dislocation with boundaries and surface films // Austral. J. Phys. 1960. V. 13. № 2A. P. 278–283.
10. Ужик Г.В. Сопротивление отрыву и прочность металлов. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. 256 с.
11. Физическое металловедение. М.: Металлургия, 1987. Т. 1. 639 с.; Т. 2. 623 с.; Т. 3. 662 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
12.01.1998