МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

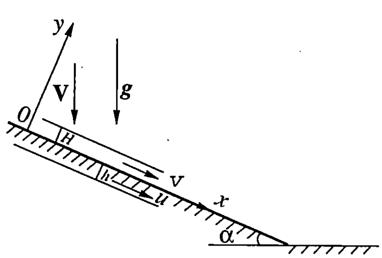
УДК 551.31

© 2001 г. А.Я. САГОМОНЯН

ОПОЛЗНИ НА СКЛОНАХ ХОЛМОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ В СЛОЕ, ОБРАЗОВАННОГО ДОЖДЕМ

Оползень – скольжение массы грунта (почвы) в слое на поверхности склона, вызванного нарушением равновесия действующих сил. Часть жидкости капель дождя проникает в пористую почву вплоть до мельчайших пор, ослабляя ее связанность (силы сцепления). В результате образуется водонасыщенная среда с механическими свойствами, отличными от таковых в почве до начала дождя: свойствами вязкости, пластичности. В этой сильно замоченной среде под действием силы тяжести на поверхности склона образуется тонкий слой, в котором частицы среды стекают вниз к подножию возвышенности. Можно считать, что в этом слое суспензии, частицы почвы и жидкости в порах движутся с одинаковой скоростью.

В настоящем исследовании суспензия (замоченная почва) моделируется однородной несжимаемой вязкопластической средой [1–3]. Оползни возможны в процессе дождя (ливня) и могут продолжаться или (начинаться) после его прекращения. В первом случае необходимо определить движение жидкости в тонком слое над поверхностью склона, образованного непроникшей в почву частью жидкости капель дождя, также стекающей к подножию (фиг. 1). Этот слой жидкости уносит также частицы почвы, попадающие в слой с поверхности склона. Это явление называется эрозией почвы. Обычно объемная концентрация частиц в слое жидкости имеет порядок 10^{-4}–10^{-5}. Здесь при определении движения оползня влиянием этих частиц на поток жидкости в слое пренебрегается. Ударное взаимодействие падающих капель дождя и жидкости в слое, шероховатость поверхности склона делают поток воды в слое турбулентным. Предполагается, что скорость **v** капель дождя, имеющая порядок 5–7 м/с постоянна и параллельна ускорению силы тяжести **g** (фиг. 1).



Фиг. 1

В "дождевом пространстве" над поверхностью склона объемная концентрация жидкости капель дождя ω, имеющая порядок 10^{-5}–10^{-6}, постоянна и равномерно распределена в пространстве. Рассматривается плоскопараллельное нестационарное движение. Известно [4], что в системе координат, взятой вдоль граничной поверхности с малой кривизной, и по нормали к ней приближенные уравнения движения Рейнольдса в тонком слое имеют тот же вид, что и в декартовой системе координат [4, 5]. В дальнейшем для наглядности полученных результатов поверхность склона считается неограниченной плоскостью, наклонной под углом α к горизонтальной поверхности Земли (фиг. 1). Этим, в частности, исключается рассмотрение граничных условий на вершине и у подножия возвышенности. Пусть x – координата, направленная вдоль поверхности склона вниз к подножию, y – направлена по внешней нормали к ней. Введенные ограничения приводят к тому, что параметры движения не зависят от координаты x, а приближенные уравнения Рейнольдса для жидкости и вязкопластической среды в слоях вдоль оси y соответственно принимают вид

$$\partial p/\partial y = -\rho g\cos\alpha, \qquad \partial p/\partial y = -\rho_0 g\cos\alpha \tag{1}$$

$$\rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1$$

где p – давления в слоях, ρ, ρ_1 – плотности воды и вещества почвы, ρ_0 – плотность суспензии вязкопластической среды, m – пористость почвы – объемная концентрация пор в почве.

Уравнение турбулентного движения жидкости в тонком слое над поверхностью склона представляется в виде [4–6]:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \rho g\sin\alpha + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'}) \tag{2}$$

$$\partial v/\partial x = 0, \quad w = w(t)$$

Здесь μ – постоянный коэффициент вязкости воды, v, w – осредненные компоненты скорости по осям x, y; v', w' – компоненты скорости пульсаций по этим осям. На основе гипотезы Л. Прандтля о длине пути перемешивания l' частиц жидкости, получена следующая формула для касательного пульсационного напряжения τ' [6, с. 238]:

$$\tau' = (\rho\overline{v'w'}) = \rho l'\sqrt{\overline{w}'^2}\;\partial v/\partial y \tag{3}$$

В (2) и (3) чертой над символами обозначены осреднения по времени. Учитывая (3), уравнение (2) можно представить в виде [4–6]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g\sin\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\left((\nu+\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4}$$

$$\varepsilon = l'w, \quad w' = \sqrt{\overline{w}'^2}, \quad \nu = \mu/\rho$$

Уравнение движения вязкопластической среды в тонком слое под поверхностью склона, вдоль оси x в рейнольдсовском приближении запишется так:

$$\rho_0\partial u/\partial t = \rho_0 g\sin\alpha + \partial\tau^{\circ}_{yx}/\partial y \tag{5}$$

$$\tau^{\circ}_{yx} = \tau_m + \eta\partial u/\partial y, \quad \partial u/\partial y > 0$$

где $u(y, t)$ – скорость среды вдоль оси x, η – постоянный коэффициент вязкости, τ_m – предел текучести среды, τ°_{yx} – напряжение сдвига. Предполагается, что граница между слоем жидкости и пространством дождя является проницаемой поверхностью. В силу условий задачи она будет плоскостью, параллельной плоскости склона. Если $H(t)$ обозначает толщину слоя жидкости, то $y = H(t)$ будет уравнением проницаемой границы. Она является поверхностью разрыва параметров жидкости. Законы сохранения массы жидкости, изменения количества движения на ней определяются соотношениями

$$\omega(\dot{H}+V\cos\alpha)=\dot{H}+w_s,\quad \rho\omega(\dot{H}+V\cos\alpha)(V\cos\alpha-w_s)=p_s-p_a,\quad y=H(t) \tag{6}$$

$$\rho\omega(\dot{H}+V\cos\alpha)(V\sin\alpha-v_s)=\tau_s,\qquad \dot{H}=dH/dt \tag{7}$$

где v_s, w_s – компоненты осредненной скорости за поверхностью разрыва, p_s, p_a – давления за и перед ней, τ_s – напряжение сдвига за ней. Ниже показано, что толщина H имеет порядок $\omega \ll 1$. Тогда можно показать, что

$$w_s/v_s \ll 1,\quad p_s/p_a \approx 1,\quad p_s \approx p_a \tag{8}$$

С учетом этих оценок, после интегрирования по y первого уравнения в (1) получим

$$p-p_a=\rho g\cos\alpha(H(t)-y),\qquad 0\leqslant y\leqslant H(t) \tag{9}$$

В ряде работ, например в [7], принимается, что на пористой поверхности склона, скорость проникания жидкости в поры почвы w_0 линейно зависит от давления. Принимая это условие, можно записать

$$y=0,\quad w_0=K\rho g\cos\alpha H(t),\qquad w_1=mw_0 \tag{10}$$

где K – постоянный коэффициент, w_1 называется скоростью фильтрации. Теперь определим толщину слоя жидкости $H(t)$. Пусть ds элемент граничной линии $y=H(t)$. В единицу времени t через ds втечет жидкость капель в слой с массой dM_1:

$$dM_1=\rho\omega ds(\dot{H}+V\cos\alpha)$$

За это же время через элемент ds поверхности склона на противоположной стороне из слоя жидкости вытечет жидкость в почву массы dM_2:

$$dM_2=\rho mdsK\rho g\cos\alpha H(t)$$

По закону сохранения массы, должно иметь место равенство $dM_1-dM_2=\rho ds\dot{H}(t)$, из которого следует

$$\dot{H}=\frac{(\omega V-mK\rho gH)\cos\alpha}{1-\omega}$$

интегрируя последнее уравнение по времени при условии $t=0$, $H=0$, получим

$$H=A(1-e^{-Et}),\quad A=\frac{\omega V}{mK\rho g},\qquad E=\frac{mK\rho g\cos\alpha}{1-\omega} \tag{11}$$

Из решения (11) следует асимптотическое значение толщины H:

$$H=H_m=A=\frac{\omega V}{mK\rho g}\ \text{ при }\ t\to\infty \tag{12}$$

Скорость расширения толщины слоя H равна

$$\dot{H}=\frac{\omega V\cos\alpha}{1-\omega}e^{-Et} \tag{13}$$

Из формул (11), (10) следует, что осредненная скорость $w(t)$ жидкости вдоль оси y определяется выражением

$$w(t)=w_s(t)=w_1(t)=-\omega V(1-e^{-Et})\cos\alpha \tag{14}$$

Равенство (7) является граничным условием уравнения (4) для жидкости в слое; другим, приближенным, условием этой задачи является непрерывность компоненты скорости жидкости капель вдоль оси χ на поверхности $y = H(t)$:

$$y = H(t), \quad v = v_s = V \sin\alpha \tag{15}$$

Анализ показал, что характер решений, полученных на основе условий (7) и (15), одинаков. Но процесс решения при условии (7), хотя и не представляет принципиальных трудностей, более громоздок. Ниже используется условие (15).

Отметим, что значение напряжения сдвига на границе $y = H$ при обоих условиях мало, но не равно нулю. По гипотезе Прандтля длина пути перемешивания l' связана с поперечной координатой y по формуле [8, 9]:

$$l' = ky \tag{16}$$

где k – постоянный коэффициент (для воды $k = 0.4$). Используя это равенство, можно придать уравнению (4) вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}(\nu + By)\right] = \frac{\partial v}{\partial t} - g\sin\alpha, \qquad B = k\sqrt{\overline{w}'^2} = kw' \tag{17}$$

В настоящее время величине l' не придают обязательный смысл "пути перемешивания", а рассматривают его как параметр, характеризующий масштаб турбулентности [5, с. 698]. Например, в теории "свободной" турбулентности, в задаче истечения турбулентной струи, принимается, что скорость изменения ширины струи пропорциональна поперечной пульсационной скорости [9, с. 675]. Здесь приближенно проницаемую поверхность $y = H$ можно рассматривать как свободную поверхность и по аналогии принять

$$\sqrt{\overline{w}'^2} = w' = \beta_1 \dot{H}(t) \tag{18}$$

где β_1 – постоянный безразмерный коэффициент. Используя (13), это равенство представим в виде

$$w' = \frac{\beta_1 \omega V \cos\alpha e^{-Et}}{1-\omega} \tag{19}$$

Тогда в уравнении (17) для величины $B(t)$ получим

$$B(t) = \frac{\beta_1 k \omega V \cos\alpha}{1-\omega} e^{-Et} \tag{20}$$

Уравнение (17) удобнее решать методом последовательных приближений, изложенным в (10). За первое приближение примем решение уравнения квазистатического движения

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}(\nu + By)\right] = -g\sin\alpha \tag{21}$$

После интегрирования его по y, получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{g\sin\alpha y}{\nu + By} + \frac{C_1}{\nu + By} \tag{22}$$

интегрирование (22) по y приводит к решению

$$v(y,t) = -\frac{g\sin\alpha y}{B} + \left(\frac{C_1}{B} + \frac{\nu g \sin\alpha}{B^2}\right)\ln(\nu + By) + C_2 \tag{23}$$

Функции времени C_1, C_2 будут определены из граничных условий. Второе и последующие приближения строятся методом [10], использованным в [3]. Рассматриваемое здесь движение сред относится к ползущим движениям [5, 9], и здесь ограничиваемся решением квазистатического движения (22) и (23).

Предел текучести τ_m вязкопластической среды в формуле (5) зависит от пористости почвы, ее водонасыщенности [1]. В естественных условиях с глубиной (вдоль отрицательной оси y в нашей задаче) пористость уменьшается, а предел текучести растет. Принято считать, что коэффициент вязкости η зависит от скорости сдвига [2, 5]. Для установления этих зависимостей необходимы дальнейшие экспериментальные исследования. Опытные данные работы [1] показывают, что в системе единиц килограмм–сила, метр, секунда, для грунтов, величины η и τ_m соответственно имеют порядок величин 1,1 и 5,74.

Без должного обоснования примем коэффициент вязкости η постоянным, а предел текучести, изменяющимся по формуле

$$\tau_m = k_m(1-\gamma e^{cy}), \quad -\infty < y < 0 \tag{24}$$

постоянные k_m, γ, c определяются из опыта. Величина γ по смыслу меньше единицы, но близка к ней. При сильном водонасыщении можно принять $\gamma = 1$:

$$\tau_m = k_m(1-e^{cy}), \quad y \leqslant 0 \tag{25}$$

Для тонких слоев вязкопластической среды, характеризуемых условием $h/L \ll 1$, где L – характерная длина склона, $h(t)$ – толщина слоя вязкопластической среды, зависимость (25) приводит к приближенному равенству [3]:

$$\tau_m = -k_m c y = -k_0 y, \quad k_0 = k_m c, \quad -h \leqslant y \leqslant 0 \tag{26}$$

В дальнейшем в уравнении (5) коэффициент η считается постоянным, а предел текучести берется по формуле (26). При этих условиях уравнению (5) можно придать вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g\sin\alpha}{\nu_0} + \frac{k_0}{\eta} + \frac{1}{\nu_0}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{27}$$

$$\tau^{\circ}_{yx} = -k_0 y + \eta \partial u/\partial y, \quad \nu_0 = \eta/\rho_0$$

Это уравнение также можно решать методом последовательных приближений работы [10]. В условиях ползущего движения в уравнении (27) можно пренебречь последним членом справа. Тогда получим уравнение

$$\partial^2 u/\partial y^2 = -b, \quad b = g\sin\alpha/\nu_0 - k_0/\eta, \quad b > 0 \tag{28}$$

Неравенство в правой части (28) есть принятое условие.

После двухкратного интегрирования по y уравнения (28) получим

$$u(y,t) = -\tfrac{1}{2} b y^2 + C_1^* y + C_2^*$$

$$\partial u/\partial y = -by + C_1^*, \quad y \leqslant 0 \tag{29}$$

Функции времени C_1^*, C_2^* определяются из граничных условий.

Обратимся к граничным условиям уравнений (21) и (28), позволяющим определить произвольные функции времени в решениях (23) и (29). Выше, на границе $y = H(t)$ было установлено приближенное равенство (15): $y = H(t)$, $v = V\sin\alpha$, которое служит граничным условием уравнения (21).

Условие (15) всегда можно заменить более общим условием (7). На поверхности склона $y = 0$ должно выполняться условие прилипания частиц жидкости и вязкопластической среды. Учитывая второе равенство в формуле (5) и принятое приближение (26), это условие запишется так

$$v = u = U(t), \quad \mu\partial v / \partial y = \eta\partial u / \partial y, \quad y = 0 \tag{30}$$

где $U(t)$ – скорость частиц обеих сред на поверхности склона подлежит определению. Символом $h(t)$ как и выше, обозначим толщину вязкопластической среды. Граница этого слоя $y = -h$ также параллельна поверхности склона. Она разделяет слой подвижной среды от неподвижной почвы склона. На этой границе должно выполняться условие

$$y = -h(t), \quad u(-h, t) = 0 \tag{31}$$

Условие (15) и первое равенство в условии (30) приводят решение (23) к виду

$$v\,(y,t) = -\frac{g\sin\alpha y}{B} + \left(V\sin\alpha - U + \frac{g\sin\alpha H}{B}\right)\frac{\ln(1 + By/\nu)}{\ln(1 + BH/\nu)} + U \tag{32}$$

Используя граничное условие (31), можно записать решение (29) в форме

$$u(y,t) = \tfrac{1}{2}b(h^2 - y^2) + C_1^*(h + y), \quad \partial u / \partial y = -by + C_1^* \tag{33}$$

Функция C_1^* определяется из второго равенства условия (30) при $y = 0$:

$$C_1^*(t) = \frac{\mu}{\eta}\left[\left(V\sin\alpha - U + \frac{g\sin\alpha H}{B}\right)\frac{B}{\nu}\frac{1}{\ln(1 + BH/\nu)} - \frac{g\sin\alpha}{B}\right] \tag{34}$$

На поверхности склона скорость $U(t)$ согласно (33), связана с толщиной слоя вязкопластической среды $h(t)$ равенством

$$U(t) = \tfrac{1}{2}bh^2 + C_1^*h \tag{35}$$

где C_1^* определена формулой (34). Таким образом задача определения движения сред в слоях свелась к определению толщины h.

Закон сохранения массы несжимаемой вязкопластической среды в объеме единичной ширины вдоль оси x, заключенной между границами $y = -h$, $y = 0$ (фиг. 1), приводит к равенству

$$\rho_1(1 - m)\dot{h} + \rho m w_0 = \rho\dot{h} \tag{36}$$

где скорость w_0 дана формулой (10). Из (36) определяется скорость границы $y = -h(t)$:

$$dh / dt = \dot{h} = w_0 = K\rho\cos\alpha H(t) \tag{37}$$

Подставив значение $H(t)$ по формуле (11) в правую часть формулы (37), после интегрирования получим

$$h(t) = B(t + (1/E)e^{-Et}) + C_0, \quad B = AK\rho g\cos\alpha \tag{38}$$

Постоянная интегрирования C_0 в (38) определяется из начальных условий. Принятая зависимость (25), приближение (26) и условия (30) на поверхности склона приводят к начальному условию для толщины $h(t)$:

$$h = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{39}$$

которое определяет постоянную C_0 в формуле (38):

$$h(t) = B[t - (1/E)(1 - e^{-Et})] \tag{40}$$

Величина C_1^* из двух уравнений (34) и (35) определяется формулой

$$C_1^* = \frac{\mu}{\eta} \frac{(V\sin\alpha + (gH/B)\sin\alpha - \frac{1}{2}bh^2)B/\nu - (g/B)\sin\alpha\ln(1+BH/\nu)}{(\mu/\eta)(Bh/\nu) + \ln(1+BH/\nu)} \tag{41}$$

Скорость частиц жидкости и вязкопластической среды на поверхности склона определена формулой (35), в которой C_1^* берется из равенства (41). Из формул (26) и (33) следует, что на границе вязкопластического слоя $y = -h(t)$ скорость сдвига и напряжение сдвига определяются равенствами

$$\partial u/\partial y = bh + C_1^*, \quad \tau_{yx}^\circ = \rho_0 g\sin\alpha h(t) + \eta C_1^* \tag{42}$$

В слое вязкопластической среды составляющая скорости частиц по оси y является функцией только времени и направлена в отрицательную сторону этой оси. Обозначим эту составляющую скорости через $W(t)$. Следовательно, секундное количество движения рассматриваемой несжимаемой среды, переносимое сквозь сечение в слое, параллельное плоскости склона, одинаково для всех таких сечений

$$\rho_0 W^2(t) = C(t) \tag{43}$$

С другой стороны на поверхности склона ($y = 0$) непрерывно образуется количество движения $K_0(t)$, равное

$$K_0(t) = \rho m w_0^2$$

Скорость w_0 задана формулой (10). Таким образом

$$\rho_0 W^2(t) = \rho m w_0^2(t) \tag{44}$$

Это равенство определяет составляющую скорости частиц вязкопластической среды в слое $W(t)$:

$$W(t) = (m\rho/\rho_0)^{1/2} w_0(t) \tag{45}$$

Массовый расход среды в единицу времени определяется интегралом от скорости, взятой по формуле (33):

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^{0} u dy = \rho_0 \left[\frac{bh^3}{3} + \frac{C_1^* h^2}{2}\right], \quad b > 0 \tag{46}$$

Рассмотрим движение оползня после прекращения дождя. Пусть дождь длится в течение времени $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и в момент прекращения дождя t_0 на поверхности склона мгновенно исчезает слой жидкости, а напряжение сдвига делается равным нулю

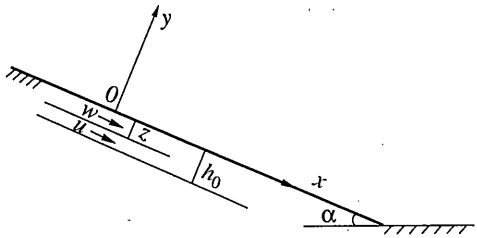
$$t = t_0, \quad y = 0, \quad H = 0, \quad \tau_{yx}^\circ = 0 \tag{47}$$

Предполагается, что в момент t_0, на поверхности склона возникает параллельная ей подвижная поверхность, которая движется вдоль отрицательной оси y, в глубь почвы, по закону $y = -z(t)$ подлежащий определению (фиг. 2). Предполагается, что на этой поверхности напряжение сдвига равно пределу текучести. Это условие запишется так:

$$t > t_0, \quad y = -z(t), \quad \tau_{yx}^\circ = \tau_m = k_0 z(t), \quad \partial u/\partial y = 0 \tag{48}$$

Между поверхностями $y = -z(t)$, $y = 0$ среда находится в состоянии твердого тела, а его движение подчинено уравнению $\rho_0 z(t)\dot{w}(t) = (\rho_0 g\sin\alpha - k_0)z(t)$, $\dot{w} = dw/dt$, которое представим в виде

$$\dot{w} = -c, \quad c = k_0/\rho_0 - g\sin\alpha \tag{49}$$



Фиг. 2

В этих соотношениях $w(t)$ – скорость твердого тела. Движение вязкопластической среды между границами $y = -h$ и $y = -z$ в квазистатическом приближении, описывается уравнением (28), общее решение которого (29) здесь представим в виде

$$u(y,t) = -\tfrac{1}{2}by^2 + C_3 y + C_4, \quad \partial u / \partial y = -by + C_3$$

Функции времени C_3, C_4 в этом решении теперь определяются из условий

$$t > t_0, \quad y = -z(t), \quad u = w(t), \quad \partial u / \partial y = 0 \tag{50}$$

В результате получим

$$C_3 = -bz(t), \quad C_4 = w(t) - \tfrac{1}{2}bz^2$$

$$u(y,t) = -\tfrac{1}{2}b(z+y)^2 + w(t) \tag{51}$$

Из равенства (37) и условия $H = 0$ в (47) следует

$$t \geqslant t_0, \quad \dot{h} = 0, \quad h = h(t_0) = h_0 = \text{const} \tag{52}$$

Т.е. при $t > t_0$ толщина слоя вязкопластической среды остается постоянной, равной h_0. При образовании подвижной поверхности $y = -z(t)$ на поверхности склона, скорость w изменяется непрерывно. Поэтому начальное значение скорости движения твердого тела $w_0(t_0)$ являющееся условием уравнения (49), получим из решения (33) при $t = t_0$, $h = h_0$, $y = 0$:

$$w_0(t_0) = \tfrac{1}{2}bh_0^2 + C_1^* h_0 \tag{53}$$

где C_1^* определяется по формуле (41) при $H = H(t_0)$. Решение уравнения (49) при условии (53) дается формулой

$$w(t) = -c(t - t_0) + w_0(t_0) \tag{54}$$

С другой стороны скорость $u(y, t)$, определенная по формуле (51), должна равняться нулю на границе $y = -h_0$. Это условие приводит к равенству

$$2w(t) = b(h_0 - z)^2 \tag{55}$$

Два уравнения (54) и (55) определяют функциональную зависимость линии отвердевания $y = -z(t)$ от времени t.

Отметим, что настоящая задача при ламинарном движении в слое жидкости рассматривалась в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воларович М.П.* Применение методом исследования вязкости и пластичности в прикладной минералогии // Тр. ин-та прикл. минералогии. 1934. Вып. 66. 52 с.
2. Реалогия суспензий. М.: Мир, 1975. 334 с.
3. *Сагомонян А.Я.* К вопросу дождевой эрозии почв // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1995. № 5. С. 85–94.
4. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
5. *Лойцанский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
6. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Т. 1. / Под ред. С. Гольдштейна. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 379 с.
7. *Слезкин Н.А.* О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы пористого дна // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. 1957. № 5. С. 3–5.
8. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 576 с.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
10. *Швец М.Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 3. С. 259–266.
11. *Сагомонян А.Я.* Движение оползней, возникающих на склонах возвышенностей под действием дождя // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 143–148.

Москва

Поступила в редакцию
27.05.1999